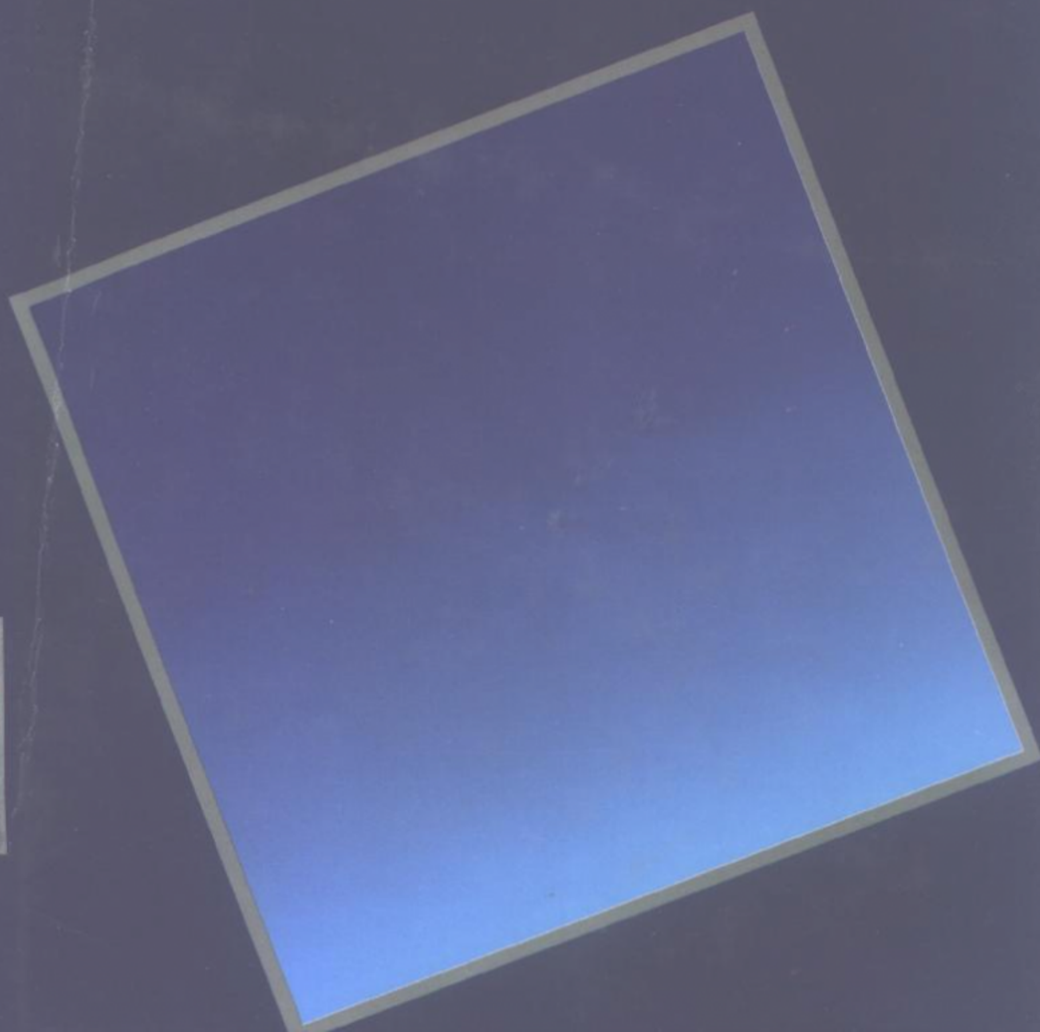
动力系统的稳定性理论和应用

Theory and Application of Stability for Dynamical Systems

廖晓昕 著

国防工业出版社



动力系统的稳定性理论和应用

Theory and Application of Stability for Dynamical Systems

廖晓昕 著





国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

动力系统的稳定性理论和应用/廖晓昕著.-北京:国防工业出版社,2000.4
ISBN 7-118-02183-0

Ⅰ.动... Ⅱ.廖... Ⅲ.动力系统-动力稳定性-研究 Ⅳ.TK05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 48858 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
三河市腾飞胶印厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 17⅝ 455 千字
2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月北京第 1 次印刷
印数:1-1500 册 定价:35.00 元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第三届评审委员会组成人员

序　　言

廖晓昕教授的专著《动力系统的稳定性理论和应用》申请国防科技图书出版基金，邀我作为推荐人并为之作序，我欣然同意。

我认识廖晓昕同志始于 1985 年 6 月在瑞典的国际控制论大会上，他留给我印象殊深的是对知识的勤奋刻苦好学和对科学的执着追求。他未曾去过苏联，大概 50～60 年代因受苏联科学体系的教育熏陶影响，对苏联自然科学理论的严谨性情有独钟，十分欣赏，特别对于李雅普诺夫(Ляпунов)稳定性理论和鲁里叶(Лурье)非线性控制系统绝对稳定性钻研很深，80 年代初他在国内两届高校微分方程教师进修班上系统地讲授过"稳定性的数学理论"，把苏联严谨的李雅普诺夫稳定性理论继续在中国传播，实为可贵。他当时自学英文时间不长，在飞机上，在旅舍里，在行途中争分抢秒利用一切机会提高英文听说能力。到 1993 年，我高兴地看到他的英文专著《Absolute Stabiltiy of Nonlinear Control Stystems》由荷兰 Kluwer 和中国的科学出版社联合出版了，这不能不说是他目标始终如一，长期坚持不懈，精益求精的结果。这本《动力系统的稳定性理论和应用》是他的又一力作，是他长期科研教学心血的结晶。

众所周知，稳定性问题是人们研究各类动态系统(包括各种工业系统，自然界存在的各类系统以及社会经济系统等)所面临的最基本最重要的问题之一，它的重要性是不言而喻的，稳定性理论已积累了十分丰富的成果，特别是上世纪末俄国数学家 A. M. Ляпунов 在运动稳定性领域作出了创世纪性质的成就以来，这一领域取得了长足的进展。

为全面系统深入地介绍稳定性理论的经典成果及近代进展，廖晓昕教授撰写了这本专著:《动力系统的稳定性理论和应用》,它具有以下鲜明的特色:

1.理论体系严密、系统、完整。需要指出的是由于稳定性理论的严密性,因此数学上、逻辑上阐述稍有失之不严,常会使读者产生误解,而本书对此有足够充分的重视。

2.内容十分丰富、翔实。既介绍了 Ляпунов 稳定性的经典内容及应用(前五章),又论述直到目前 Ляпунов 直接法的最新结果(后五章)。

3.收集了相当丰富的俄罗斯学者的研究成果。由于 Ляпунов 稳定性理论源于俄罗斯,也由于俄罗斯向来重视基础研究,因此,在这一领域积累特别丰富,本书对此作了系统的介绍,同时也介绍了欧、美及我国学者一些经典成果。

4.充分反映了作者在本领域内的许多重要研究成果。由于作者在本领域内长期耕耘播种,有许多重要的贡献(如 Лурье 控制系统绝对稳定的充要条件及各种新的充分条件,神经网络及细胞神经网络的稳定性,偏泛函微分方程,随机泛函微分方程的稳定等等)。对稳定性理论有深刻的见解和长期积累的科研教学经验,因此作者是在高层次上撰著此书的。

研究稳定性理论在国内学术界有广泛的需要,出版这方面的著作是需要与及时的,国内虽有多本这方面的著作,但就内容而言,廖晓昕教授这本著作无疑是更有鲜明特色的近代专著。我希望并相信本书会受到读者的欢迎,产生好的社会影响,促进科学技术进步。

中国科学院院士　冯纯伯

1999 年元月 20 日

前　言

动力系统稳定性的重要性是人所共知的,上世纪俄罗斯著名数学力学家李雅普诺夫(Ляпунов)院士首创的运动稳定性的一般理论,受到了各国学者的高度重视,苏联控制论专家列托夫(Летов),数学家马尔金(Малкин)先后在他们的专著序言中说到"无论现代控制以何种方法描述,总是建立在 Ляпунов 运动稳定性的牢固基础上",美国数学家 LaSalle 也说过:"稳定性理论在吸引全世界数学家注意……,Ляпунов 直接法得到了工程师们的广泛赞赏,稳定性理论在美国正迅速变为训练控制论工程师们的标准部分"。我国著名科学家钱学森、宋健在《工程控制论》中写到:"对于控制系统的第一个要求是稳定性,从物理意义上讲,就是要求控制系统能稳妥地保持预定的工作状况,在各种不利因素的影响下不至于动摇不定,不听指挥……",这些足以说明了稳定性具有普遍意义,事实上,在经典控制中,稳定性是唯一的要求,即使在现代控制中,它仍然是主要的性能指标。近 10 多年来,Ляпунов 函数又成功地应用到神经网络,借助于动力系统的吸引子和电子电路的实现来完成某些智能优化计算和联想记忆,开辟了新途径。

本书试图以 Ляпунов 函数及泛函为主线,贯穿全书,辅佐以 LaSalle 不变原理、比较原理及代数方法,以统一的观点和近代的手段介绍各种方程所描述的动力系统的稳定性,全书共分为 10 章。第一章扼要地介绍了动力系统的概念及全书要用到的主要数学工具。第二章、第三章,集中概括地叙述了用常微分方程描述的动力系统的 Ляпунов 经典理论及其各种推广。第四章详细地论

述了非线性控制系统的绝对稳定性的充要条件和由此派生出来的各种充分条件。第五章讨论了两类典型的人工神经网络(Hopfield神经网络和细胞神经网络)的稳定性。第四、五两章可视为Ляпунов稳定性理论对实际系统的具体应用。当然其它各章也不乏各种应用实例。离散动力系统的稳定性是近代稳定性课题之一。第六章详细地阐述了差分方程描述的离散动力系统的稳定性。第七章给出了微分差分方程动力系统的稳定性的基本理论和方法及较多的实例。由于泛函微分方程的实例,大部分是微分差分方程,故在第八章中论述泛函微分方程稳定性时只概括地介绍一些理论结果和方法,实例不多。第九章介绍用偏微分方程、偏泛函微分方程描述的动力系统的稳定性。最后一章是介绍英国毛学荣教授与作者合作的关于随机微分方程、随机泛函微分方程的稳定性结果。

作者感谢国防科技图书出版基金的资助,也感谢国家自然科学基金[69874016号,69674008号,19371032号,1890422号,84科基115号]及国家教委高等学校博士点专项科研基金[97048722号]、湖北省自然科学基金、香港王宽诚教育基金会的资助,还感谢英国皇家学会的资助使毛学荣教授能邀请我赴英国愉快地合作,因为书中很多内容取材于这些基金资助的成果。作者也感谢华中理工大学校、系、所领导和许多同事朋友的大力支持,尤其是杨叔子院士。作者还应特别感谢中科院院士、俄罗斯自然科学院外籍院士冯纯伯教授在百忙中为本书作序,并对书稿的结构体系安排及写作内容提出了宝贵的意见。

限于作者知识水平,书中难免存在缺点和错误,衷心盼望和热忱欢迎读者批评指正。

廖晓昕于华中理工大学
自动控制科学与工程系
1999年2月18日

目　　录

Contents

第一章　预 备 知 识

本章给出动力系统的概念及一些实例，说明动力系统的广泛性，统一地介绍动力系统平衡位置的各种稳定性、吸引性的定义；叙述 Ляпунов 函数及 K 类函数的定义和相互关系；给出 Dini 导数概念；讨论 M 矩阵、Hurwitz 矩阵、正定矩阵统一的简化判据，这些内容，在全书中起基本工具的作用。

§1　动力系统概念

我们以记号 X 表示具有度量 ρ 的度量空间，R 表示实数集合。

定义 1.1.1　$\pi(X,R,\pi)$表示定义在 X 空间上的一个动力系统，其中 π 是乘积空间 $X\times R$ 到空间 X 的一个映射，此映射满足下列公理：

1）　恒等公理　　$\pi(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{x},\forall\,\boldsymbol{x}\in X$

2）　群公理　　$\pi(\pi(\boldsymbol{x},t_1),t_2)=\pi(\boldsymbol{x},t_1+t_2)$

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in X,\forall\,t_1,t_2\in R$$

3）　连续公理：π 是一个连续映射。

在 X 空间上给定了一个动力系统，则空间 X 和映射 π 分别称为该动力系统的相空间和映射。

映射 $\pi(\boldsymbol{x},t)$对于固定的 $t\in R$，便确定了一个映射 $\pi^t(\boldsymbol{x}):X\to X$，称此映射为转换；对固定的 $\boldsymbol{x}\in X$，便确定了一个映射 $\pi_{\boldsymbol{x}}(t):R\to X$，称 $\pi\boldsymbol{x}(t)$为运动。

下面看一些动力系统的例子。

例1　设 J 表示整数集合，J_+ 表示正整数集合，R^n 表示 n 维欧氏空间，$\|x\|$ 表示 R^n 中欧氏范数，x 既可表示向量，也可表示一个函数。

令　$x: J_+ \to R^n, x'(n) = x(n+1)$

$\dot{x} = x' - x$

$T: R^n \to R^n$

差分方程 $x' = Tx$

表示　$x(n+1) = T(x(n)) \quad \forall n \in J_+ \qquad (1.1\text{-}1)$

始值问题

$$x' = Tx \qquad x(0) = x_0$$

的解，$x(n) = T^n(x_0)$　这里 T^n 为 T 的 n 次迭代。

$T^{n+1} = T(T^n)$　　而 $T^0 = I$ 表示恒等映射。

这样，每个差分方程(1.1-1)都定义了一个动力系统 $\pi: \pi(n, x_0) = T^n x_0$，反之，$R^n$ 上的任何一个离散动力系统都有与之相对应的差分方程。

例2　考虑一般的自治常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) & x \in R^n \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.1\text{-}2)$$

其中 $f: R^n \to R^n$ 是连续的，且假定对每个 $x \in R^n$，存在定义在 R 上满足 $\varphi(0, x) = x$ 的唯一解 $\varphi(t, x)$，则由解的唯一性可推得 $\forall t_1, t_2 \in R$，有

$$\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$$

φ 作为一个从 $R \times R^n$ 到 R^n 的函数是连续的，显然映射 $\pi: R^n \times R \to R^n$ 使得 $\pi(x, t) = \varphi(t, x)$ 在 R^n 上定义了一个动力系统。

例3　一般非自治常微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.1\text{-}3)$$

其中 $\boldsymbol{f}:R\times R^n\to R^n$ 连续,假定对每个$(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in R\times R^n$ 有唯一解$\varphi(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,$\varphi(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$,对一切 $t\in R$ 有定义,考虑映射 $\pi:X\times R\to X$,其中 $X=R\times R^n$,$\pi((t,\boldsymbol{x})s)=(s+t,\varphi(s+t,t,\boldsymbol{x}))$,于是 π 在X 上定义了一个动力系统,事实上,这个动力系统对应于 R^{n+1}内等价的自治微分系统。

例 4　泛函微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)\\ \boldsymbol{x}(0)=\varphi\end{cases}\tag{1.1-4}$$

其中 $\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta):[-r,0]\to R^n$,$C\overset{\mathrm{def}}{=}C([-r,0]\to R^n)$是连续函数,$\varphi:[-r,0]\to R^n$ 具有一致收敛拓扑结构的空间,$\boldsymbol{f}:X\subset C\to R^n$,这里 X 是C 中一个开集,$\boldsymbol{f}$ 是连续的。

若对于某个 $a>0$,$\forall\, t\in[0,a]$有满足(1.1-4)的唯一解 $\boldsymbol{x}(t)$,且当$-r\leqslant t\leqslant 0$,$\varphi\in X$,$\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t)$。

这样,(1.1-4)式实际也定义了一个动力系统。

例 5　考虑线性偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=au+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i},\\ u(\varphi,0)=\varphi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\end{cases}\tag{1.1-5}$$

其中 $a,b_1,\cdots,b_n$ 是实常数。

Φ 是当$\boldsymbol{x}\in R^n$ 时给定的连续可微函数$\varphi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$所形成的空间,其中当$\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty$,$\varphi(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\to$常数 L_φ,假设 $\|\varphi\|=\sup\limits_{x\in R^n}|\varphi|$。

易验证,(1.1-5)式的解 $u(\varphi,t)$定义了一个动力系统。

还可以举出很多动力系统的实例,这足以说明动力系统的概念具有高度的抽象性和广泛的概括性,研究稳定性即研究动力系统的一类特殊的渐近行为,因而可以用统一的观点来处理。

§2　动力系统平衡位置的稳定性、吸引性

定义 1.2.1　给定一个动力系统(X,R,π),若存在点 $\boldsymbol{x}\in X$,

使得 $\pi(x,t)=x, \forall t\in R$,称 x 为此动力系统的一个平衡点,记为 x^e。

以 $\rho(x,x^e)$表示 x 与x^e 的距离,在 R^n 中,$\rho(x,x^e)$常以 $\|x-x^e\|$ 来表示,以下讨论动力系统(X,R,π)的平衡点 x^e 的稳定性、吸引性,都是对此动力系统而言的,除非特别声明,稳定性概念都是指的 Ляпунов 意义下的。

定义 1.2.2 称 x^e 是稳定的,若 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0$,使得当 $\rho(x_0,x^e)<\delta$,有 $\rho(\pi(x,t),x^e)<\varepsilon$,对一切 $t\geqslant 0$ 成立。

定义 1.2.3 称 x^e 是吸引的,若存在 $\sigma>0$,当 $\rho(x,x^e)<\sigma$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\pi(x,t)=x^e$,称 $D=\{x,\rho(x,x^e)<\sigma\}$为 x^e 吸收区域。

定义 1.2.4 称 x^e 是渐近稳定的,若 x^e 既是吸引的,又是稳定的。

定义 1.2.5 称 x^e 是全局渐近稳定的,若吸引区域为整个 X 空间。

定义 1.2.6 称 x^e 是指数稳定的,若存在 $\alpha>0, \forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0$,当 $\rho(x_0,x^e)<\delta$,有 $\rho(x,x^e)\leqslant \varepsilon e^{-\alpha t}$, $t\geqslant 0$ 成立。

定义 1.2.7 称 x^e 是全局指数稳定的,若 $\forall \delta>0, \exists d>0, \exists k(\delta)>0$,当 $\rho(x_0,x^e)<\delta$,有

$$\rho(\pi(x,t),x^e)\leqslant k(\delta)e^{-\alpha t} \qquad t\geqslant 0$$

其它类型的稳定性、有界性、耗散性等定义分别在以后各章中给出。

§3 Ляпунов 函数和 K 类函数[1,28]

前两节在一般抽象空间 X 上考虑动力系统,但最常见也是本书主要讨论的还是 R^n 空间,且不失一般性,不妨设 $x=0$ 为平衡位置。

设 $\Omega\subset R^n$,Ω 是包含原点的 n 维开邻域,令 $I\overset{\text{def}}{=}[0,+\infty)$, $W(x)\in C[\Omega,R]$, $V(t,x)\in C[I\times\Omega,R]$分别表示定义域为

Ω、$I\times\Omega$，值域均为 R 的连续函数。

定义 1.3.1 称函数 $W(\boldsymbol{x})$在 Ω 上正定，若在 Ω 上 $W(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，且 $W(\boldsymbol{x})=0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$；称函数 $W(\boldsymbol{x})$在 Ω 上负定，若 $-W(\boldsymbol{x})$在 Ω 上正定。

正定、负定函数统称为定号函数，也称为 Ляпунов 函数。

定义 1.3.2 称函数 $W(\boldsymbol{x})$在 Ω 上半正定，若在 Ω 恒有 $W(\boldsymbol{x})\geqslant 0$，称函数 $W(\boldsymbol{x})$在 Ω 上半负定，若在 Ω 上 $-W(\boldsymbol{x})$半正定。

半正定、半负定函数分别称为常正、常负函数，统称为常号函数。

例 1 $W(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, $\quad \boldsymbol{x}=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)$

$A=A^T$ 为实的正定矩阵，则 $W(\boldsymbol{x})$在 R^n 上为正定函数，若 $A=A^T$ 为实的半正定矩阵，则 $W(\boldsymbol{x})$在 R^n 上为半正定函数。

例 2 $W(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}x_2^2+k(1-\cos\boldsymbol{x}_1) \qquad k>0$

当 $0<x_1<2\pi$，为正定函数。

当 $0\leqslant x_1\leqslant 2\pi$，为半正定函数。

定义 1.3.3 称 $W(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R]$为无穷大正定函数，若 $W(\boldsymbol{x})$正定，且当 $\|\boldsymbol{x}\|\rightarrow\infty$，$W(\boldsymbol{x})\rightarrow+\infty$。

例 3
$$
\begin{aligned}
W(x_1,x_2) &= 2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cos(x_1+x_2)\\
&\geqslant 2x_1^2+x_2^2-2\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_1\right|\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_2\right|\\
&=2x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_1^2-\frac{2}{3}x_2^2=\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{3}>0
\end{aligned}
$$

$$W(x_1,x_2)\rightarrow\infty, \text{当 } x_1^2+x_2^2\rightarrow\infty$$

故 $W(x_1,x_2)$为无穷大正定函数。

对于一个无穷大正定函数，则 $\forall c>0$，$W(\boldsymbol{x})=c$ 有一包含原点的封闭曲面。

定义 1.3.4 称函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times\Omega,R]$正定，若存在正定函数 $W(\boldsymbol{x})\in C[\Omega,R]$，使之 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant W(\boldsymbol{x})$且 $V(t,0)\equiv 0$。

称 $V(t,\boldsymbol{x})$负定,若$-V(t,\boldsymbol{x})$正定。

称 $V(t,\boldsymbol{x})$半正定,若 $W(\boldsymbol{x})$半正定,且 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant W(\boldsymbol{x})$。

称 $V(t,\boldsymbol{x})$半负定,若$-V(t,\boldsymbol{x})$半正定。

例 4 $V(t,x_1,x_2)=(1+\mathrm{e}^{-2t})(x_1^2+x_2^2+\cos(x_1+x_2))$ 正定。

例 5 $V(t,x_1,x_2)=\mathrm{e}^{-t}(x_1^2+x_2^2)$ 半正定,$t\geqslant 0$。

正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$是 $I\times R^n$ 空间中随时间变化的超曲面簇,t 为参数,但永远在不随时间变化的超曲面 $W=W(t)$的上方,当 $0<c<1$ 随时间变化的超曲面簇 $V(t,\boldsymbol{x})=c>0$,永远包含在超闭曲面 $W(\boldsymbol{x})=c$ 的内部。

定义 1.3.5 称函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times\Omega,R]$具有无穷小上界,若存在正定函数 $W_1(\boldsymbol{x})\in C[\Omega,R]$,使

$$|V(t,\boldsymbol{x})|\leqslant W_1(\boldsymbol{x})$$

称 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R]$具有无穷大下界,若存在无穷大正定函数 $W_2(\boldsymbol{x})$,使

$$V(t,\boldsymbol{x})\geqslant W_2(\boldsymbol{x})$$

具有无穷小上界和无穷大下界的时变函数 $V(t,\boldsymbol{x})$上、下界于两个定常函数 $W_1(\boldsymbol{x}),W_2(\boldsymbol{x})$之间。随着时间变化的超曲线面簇 $V(t,\boldsymbol{x})=c>0$,夹在两个固定不变的超曲面 $W_1(\boldsymbol{x})=c$,$W_2(\boldsymbol{x})=c$ 之间。

定义 1.3.6 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times\Omega,R]$,$W(\boldsymbol{x})\in C[\Omega,R]$可正可负,则分别称为变号函数。

例 6 $W(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$

例 7 $V(t,x_1,x_2)=(\sin t)x_1^2+(\cos t)x_2^2$

均为变号函数。

定义 1.3.7 函数 $\varphi\in C[[0,r],R]$ 是严格单调上升函数,且有 $\varphi(0)=0$,则称 φ 是属于K 类函数也称楔函数,记为 $\varphi\in K$。

若 $\varphi\in[R^+,R^+]$,且 $\varphi\in K$,$\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r)=+\infty$,则称 φ 是属于 KR 类函数,记为 $\varphi\in KR$。

关于正定函数与 K 类函数之间存在如下重要的等价关系。

命题 1.3.1 对于在 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant R$ 上任意连续正定函数 $W(\boldsymbol{x})$，必存在两个 K 类函数 φ_1,φ_2，使

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant W(\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

对于 R^n 上的任意无穷大正定函数 $V(\boldsymbol{x})$ 必存在两个 KR 类函数 Ψ_1,Ψ_2，使

$$\Psi_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant \Psi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

这个命题的证明可参见文献[37]第一章。

§4 Dini 导数[27]

设 $g(t)\in C[I,R]$，则下面四个导数

$$D^+ f(t) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))$$

$$D_+ f(t) \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))$$

$$D^- g(t) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))$$

$$D_- g(t) \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim_{h\to 0^-}} \frac{1}{h}(g(t+h)-g(t))$$

分别称为 $f(t)$ 在 t 处的右上导数、右下导数、左上导数、左下导数，它们统称为 Dini 导数。

Dini 导数有可能为 $\pm\infty$，若不出现这种情况，则 Dini 导数恒存在，特别当 $g(t)$ 满足局部 Lipschitz 条件时，四个 Dini 导数均有限，显然 $g(t)$ 的导数存在当且仅当四个 Dini 导数有限且相等。

连续 $g(t)$ 的单调性与 Dini 导数的定号性有如下的关系。

命题 1.4.1 设 $g(t)\in C[I,R]$，则 $g(t)$ 在 I 上单调不减的充要条件是 $D^+ g(t) \geqslant 0\ (\forall t\in I)$。

证明可参见文献[37]第一章。

下面考虑一个正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$，沿方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R^n] \tag{1.4-1}$$

的解的 Dini 右上导数,按定义有

$$\mathrm{D}^+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4-1)}=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,\boldsymbol{x}(t+h))-V(t,\boldsymbol{x}(t))]$$

这个表达式中依赖于微分方程的解,而解的表达式又是未知的,因此,应用是困难的,为了克服此困难,日本数学家 T. Yoshizawa 给出了如下有趣的定理。

定理 1.4.1[27] 设 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times\Omega,R]$,且 $V(t,\boldsymbol{x})$关于 $\boldsymbol{x}$ 对 t 一致地满足局部 Lipschitz 条件,即

$$|V(t,\boldsymbol{x})-V(t,\boldsymbol{y})|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

则 $V(t,\boldsymbol{x})$沿方程组(1.4-1)式的解的右上导数、右下导数分别为

$$\mathrm{D}^+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))-V(t,\boldsymbol{x})\} \tag{1.4-2}$$

$$\mathrm{D}_+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\underline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))-V(t,\boldsymbol{x})\} \tag{1.4-3}$$

(1.4-2)式,(1.4-3)式右边已不明显依赖于解 $\boldsymbol{x}(t)$,这正是这个定理的重要价值所在。

关于此定理的证明可参见文献[27]或文献[37]第一章。

如果 $V(t,\boldsymbol{x})$有连续的一阶偏导数,则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1.4\text{-}1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial V}{\partial t}+\mathrm{grad}V\cdot\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$$

且 $\mathrm{D}^+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\mathrm{D}_+V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\mathrm{D}^-V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\mathrm{D}_-V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(1.4\text{-}1)}=\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1.4\text{-}1)}$

根据定理 1.4.1 可知,$V(t,\boldsymbol{x}(t))$沿方程(1.4-1)式的解不

减(不增),当且仅当 $D^+V(t,\boldsymbol{x}(t))\geqslant 0(D^+V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant 0)$。

§5　M 矩阵、Hurwitz 矩阵、正定矩阵

无论是在离散动力系统或连续动力系统中,还是在计算数学,数理统计中,M 矩阵是一个近代的实用的数学工具[78]。

定义 1.5.1　称实矩阵 $A(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个 M 矩阵,若下列条件满足:

1)$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

2)下列 n 个行列式大于零

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{ii} \end{vmatrix}>0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

M 矩阵的等价条件有数十个,则常见实用的[78]有:

Ⅰ.$a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,)$,且 $A^{-1}\geqslant 0$,即 A^{-1} 为一非负矩阵;

Ⅱ.$a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,)$,且存在常数 $c_j>0$,使得 $\sum\limits_{j=1}^{n}c_ja_{ij}>0,i=1,2,\cdots,n$;

Ⅲ.$a_{ii}>0,a_{ij}\leqslant 0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$,且存在常数 $d_j>0$,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_ia_{ij}>0\quad(j=1,2,\cdots,n)$;

Ⅳ.$a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\leqslant 0,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$,$\forall$ 正数组 $\boldsymbol{\xi}=\mathrm{col}(\xi,\cdots,\xi_n)$,代数方程组

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$$

有正数组解　$\boldsymbol{\eta}=\mathrm{col}(\eta_1,\cdots,\eta_n)$;

Ⅴ.$a_{ii}>0,a_{ij}\leqslant 0\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,$-A$ 是一个 Hurwitz 稳定矩阵,即 A 仅有负实部特征值;

Ⅵ.$a_{ii}>0\quad(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\leqslant 0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,矩阵

$$G \overset{\text{def}}{=} (I - D^{-1}A)$$

的谱半径 $\rho(G)<1$[即 G 的特征值都在复平面的单位圆内],这里 $D=\text{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$,$D^{-1}$为 D 的逆矩阵。

其中定义 1.5.1 给出 M 矩阵的条件,相对容易验证,有构造性的计算程序。

$A(a_{ij})_{n\times n}$仅有负实部特征值,则称 A 为 Hurwitz 矩阵。

$$\det|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

判定 A 为 Hurwitz 矩阵的 Hurwitz 判据为:

若 $a_i>0, i=1,2,\cdots,n$,则 A Hurwitz 矩阵当且仅当

$$\Delta_1 \overset{\text{def}}{=} a_1 > 0, \qquad \Delta_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \cdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & \cdots & & & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}a_n > 0$$

这里当 $s<0$ 或 $s>n$,则 $a_s=0$。

设　实对称阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$对应的二次型为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

$V(\boldsymbol{x})$的正定性、常号性及变化性常能用 Sylvester 条件来判定,简称 A 正定[负定]半正定半负定。

记　$\Delta_i \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$

著名的 Sylvester 判据为:

A 正定等价于　$\Delta_i>0$　$i=1,2,\cdots,n$

A 半正定等价于　$\Delta_i\geqslant 0$　$i=1,2,\cdots,n$

A 负定等价于　　$(-1)^i\Delta_i>0$,　$i=1,2,\cdots,n$

A 半负定等价于　　$(-1)^i\Delta_i\geqslant 0$　$i=1,2,\cdots,n$

从上面可看出,无论验证一个矩阵是否为 M 矩阵,定号矩阵,还是 Hurwitz 矩阵,都要同时验证 n 个行列式的符号,这是冗繁的,现在介绍一个方法,只需验证这 n 个行列式的最后一个,其它的在计算最后一个行列式时顺便地、附带地算出来了,可见它们与最后一个行列式不完全是独立的。

定义 1.5.2　行列式的某行[列]乘以一个正数,或某行[列]乘以任意数加到另一行[列]的变化称为行列式的保号变换。

显然,总可以通过行列式的保号变化将一个行列式三角化,即

$$|A| \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{通过一系列保号变换} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} |B| \quad \text{或通过一系列保号变换} \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} |C|$$

定理 1.5.1　1)设 $A=A^T$,将 $|A|$ 通过一系列保号变换化为 $|B|$ 或 $|C|$,则

A 正定[半正定],当且仅当

$$b_{ii}>0 \quad (\text{或 } c_{ii}>0)$$

$$[b_{ii}\geqslant 0 \quad \text{或 } c_{ii}\geqslant 0] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

A 负定[半负定],当且仅当

$$b_{ii}<0 \quad (\text{或 } c_{ii}<0)$$

$$[b_{ii} \leqslant 0 \quad 或\ c_{ii} \leqslant 0] \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

2)设 $a_{ii}>0, a_{ij} \leqslant 0 \quad i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，$A$ 为 M 矩阵，当且仅当 $b_{ii}>0[或\ c_{ii}>0], i=1,2,\cdots,n$

3)当 $a_i>0, f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0, i=1,2,\cdots,n$，为 Hurwitz 多项式，当且仅当

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ & & & & a_{n-3} \\ a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{用保号变换}}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{或用保号变换}}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

有 $b_{ii}>0[c_{ii}>0], i=1,\cdots,n-1$

证：仅证 $A=A^T$ 时，A 正定的情况，其它是类似的，故略。

因为

$$A\ 正定 \Leftrightarrow a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \cdots \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0,$$

由 $a_{11}>0$ 可知 $b_{11}>0$。由 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，可知 $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}>0$，故由 $a_{11}>0$ 与 $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}>0$，可推知 $b_{22}>0$。

类似地可推知

$$b_{ii} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

反之,由 $b_{ii}>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$可推知

$$\tilde{\Delta}_1 \overset{\text{def}}{=} b_{11} > 0, \qquad \tilde{\Delta}_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} > 0 \cdots$$

$$\tilde{\Delta}_n \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

进而可推知

$$\Delta_1 \overset{\text{def}}{=} a_{11} > 0, \qquad \Delta_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \cdots$$

$$\Delta_n \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

例 1　验证 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$为 M 矩阵。

显然,$a_{ii}>0, a_{ij}\leqslant 0, i\neq j$,但不是对角占优的。

用上述方法来验证。

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{以 4 乘第 2 行加第 1 行}]{\text{用 2 乘第 3 行减去第 2 行}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & * & * & * \\ 0 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & -5 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{以 11 乘第 4 行加第 2 行}]{\text{第 3 行减去 5 乘第 4 行,}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & * & * & * \\ 0 & 11 & * & * \\ 0 & 0 & 15 & -24 \\ 0 & 0 & -21 & 48 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{用}\frac{1}{24}\text{乘第 4 列}]{\text{用}\frac{1}{3}\text{乘第 3 列}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & * & * & * \\ 0 & 11 & * & * \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{用}\frac{7}{2}\text{乘第 4 列加到第 3 列}]{}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & * & * & * \\ 0 & 11 & * & * \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} |B|$$

显然,矩阵 B 的主对角线元素全大于零,故 A 为 M 矩阵。

注 行列式中打 * 的元素表示没有必要再写出,因为下一步符号的计算,已没有任何作用,因此,当 $a_{ij}(i>j)$ 全化为零时,a_{ij} 的作用就完成了,可以弃之。

第二章　常微分方程动力系统

Ляпунов 稳定性理论最早在微分方程中建立(1892 年)，本章首先介绍 Лапунов 稳定性经典理论的稳定性定理、渐近稳定性定理、不稳定性定理及近代证法。这是稳定性理论奠基性的工作，然后介绍这些基本定理的某些推广。基本定理的逆定理，则仅指出参考文献，略去证明。

§1　Ляпунов 稳定性定理

考虑一般 n 维非自治常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.1-1}$$

$\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R^n]$，且 $\boldsymbol{f}(t,0)\equiv\mathbf{0}$，$\boldsymbol{f}$ 保证方程(2.1-1)解的唯一性，令 $G_H=\{(t,\boldsymbol{x}),t\geqslant t_0,\|\boldsymbol{x}\|<H\}$。

定理 2.1.1[1]　若在 G_H 上存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{f}_i(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0 \tag{2.1-2}$$

则(2.1-1)式的零解 $\boldsymbol{x}=0$ 稳定。

证：由 $V(t,\boldsymbol{x})$ 正定知存在 $\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\in K$，使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.1-3}$$

$\forall\varepsilon>0(0<\varepsilon<H)$，$\exists\delta(t_0,\varepsilon)$ 由于 $V(t_0,0)=0$ 及 $V(t,\boldsymbol{x})$ 的连续性，知当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(t_0,\varepsilon)$ 时有

$$V(t_0,\boldsymbol{x}_0)<\varepsilon$$

令 $\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，由(2.1-2)、(2.1-3)式有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)<\varphi(\varepsilon)$$

因为 $\varphi \in K$，故有

$$(\| \boldsymbol{x}(t) \|) < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

即 $\boldsymbol{x}=0$ 稳定。

注 定理 2.1.1 是可逆的，参见文献[37]。

例 1 $V(t,\boldsymbol{x})$正定的定义如换为

$$V(t,\boldsymbol{x}) > 0 \qquad \boldsymbol{x} \neq 0$$

则定理 2.1.1 结论一般不成立。

例如

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}x_1$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}x_2$$

通解为 $x_1 = x_1^{(0)} e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}, x_2 = x_2^{(0)} e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}$，显然零解不稳定，但作 $V = e^{-2t}(x_1^2 + x_2^2)$，则有

$$V(t,\boldsymbol{x}) > 0, \boldsymbol{x} \neq 0, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -e^{-2t}(x_1^2 + x_2^2) \leqslant 0$$

如令 $V = (x_1^2 + x_2^2)e^{-2t} = c$，则有 $x_1^2 + x_2^2 = ce^{2t}$。

不难看出等值曲线 $V=c$ 以 e^{2t} 的速度增长离开原点；轨线以 $e^{\frac{1}{2}t}$ 的速度增长离开原点，故 $V(t,\boldsymbol{x})$正定的定义不能换成 $V(t,\boldsymbol{x})>0, \boldsymbol{x}\neq 0$。

定理 2.1.2[8] 若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$，使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} \leqslant 0$$

则(2.1-1)式的零解 $\boldsymbol{x}=0$ 一致稳定。

证：由假设，知存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in K$，使得在 G_H 内有

$$\varphi_1(\| \boldsymbol{x} \|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_2(\| \boldsymbol{x} \|)$$

$\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < H)$ 取 $\delta = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon))$，从而有 $\varepsilon = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(\delta))$，故有 $\varphi_1(\| \boldsymbol{x}(t) \|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) \leqslant \varphi_2(\| \boldsymbol{x}_0 \|) < \varphi_2(\delta)$，当 $\| \boldsymbol{x}_0 \| < \delta$，进而有 $\| \boldsymbol{x}(t) \| < \varphi_1^{-1}(\varphi_2$

$(\delta))=\varepsilon(t\geqslant t_0)$。$\delta$ 与 t_0 无关,从而(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 一致稳定。

注 定理2.1.2也可逆[37]。

§2 Ляпунов 渐近稳定性定理

定理 2.2.1[8,9] 若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$,使得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}$ 负定,则(2.1-1)式的零解是一致渐近稳定的。

证:因定理2.2.1的条件蕴涵定理2.1.2的条件,故只需证 $\boldsymbol{x}=0$ 一致吸引,令 $V(t)\overset{\text{def}}{=}V(t,\boldsymbol{x}(t))$

由条件知存在 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in K$,使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}&\leqslant-\varphi_3(\|\boldsymbol{x}\|)\\&\leqslant-\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))<0\end{aligned}\tag{2.2-1}$$

即 $\int_{V(t_0)}^{V(t)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}\leqslant-(t-t_0)$ 亦即

$$\int_{V(t)}^{V(t_0)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}\geqslant t-t_0$$

$\forall\,\varepsilon>0,\varepsilon<H$,利用

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t)\overset{\text{def}}{=}V(t,\boldsymbol{x}(t))$$

及 $V(t_0)\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}_0\|)\leqslant\varphi_2(H)$,便有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_1\|x(t)\|}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}&=\int_{\varphi_2\|x(t)\|}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}\\&\quad+\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}\\&\geqslant\int_{V(t)}^{V(t_0)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}\geqslant t-t_0\end{aligned}$$

取 $T=T(\varepsilon,H)>\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}$

显然，当 $t \geqslant t_0 + T$ 时，由上式可进而得到

$$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))} \geqslant t - t_0 - \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)} \frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t)))}$$
$$> t - t_0 - T \geqslant 0$$

这就可推出

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|) < \varphi_1(\varepsilon) \qquad \text{当 } t \geqslant t_0 + T(\varepsilon, H)$$

由于 $T = T(\varepsilon, H)$ 与 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 都无关，故 $\boldsymbol{x}=0$ 是一致吸引的，从而 $\boldsymbol{x}=0$ 一致渐近稳定。

注 定理 2.2.1 也可逆[37]。

注 在定理 2.2.1 同样的条件下，Ляпунов[1] 只证明了 $\boldsymbol{x}=0$ 是渐近稳定的，我们把它称为 Ляпунов 渐近稳定性定理。

例 1 说明 Ляпунов 渐近稳定性定理不可逆的例子

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{1+t} \tag{2.2-2}$$

(2.2-2)式的通解为 $\quad x(t) = \dfrac{1+t_0}{1+t} \quad \boldsymbol{x}_0 \to 0 \quad t \to +\infty$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $|x_0| < \delta$，有 $|x(t)| \leqslant |x_0| < \varepsilon$。故 $x=0$ 稳定，从而渐近稳定。

但不存在具有无穷小上界的 $V(t,x)$，使得 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 负定。

事实上，若不然，设存在 $V(t,\boldsymbol{x})$ 和 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in K$ 使得

$$\varphi_1(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(|x|)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} \leqslant -\varphi_3(|x|)$$

一方面，在通解中取 x_0，使之 $|x_0| = \delta < H$

当 $t_1 = 1 + 2t_0$ 时，有 $x(t_1, t_0, x_0) = \dfrac{1+t_0}{2(1+t_0)} x_0 = \dfrac{x_0}{2}$

故有 $|x(t_1, t_0, x_0)| = \dfrac{\delta}{2} \neq 0$，因而 $V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) > 0$。

但另一方面

$$0 < \varphi_1(|x(t_1)|) \leqslant V(t_1, x(t_1)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

$$\leqslant V(t_0,x_0)-\varphi_3(|\frac{\delta}{2}|)(t_1-t_0)$$

$$\leqslant V(t_0,x_0)-\varphi_3(|\frac{\delta}{2}|)(1+t_0)$$

取 $t_1=1+2t_0$,当 $t_0\to\infty$,右边第二项趋于 $-\infty$,故 $V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\to -\infty$,与

$$\varphi_1(|x_0|)\leqslant V(t_0,x_0)\leqslant\varphi_2(|x_0|)<\infty$$

矛盾,故说明不存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$,使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定,从而 Ляпунов 渐近稳定性定理不可逆。

注 Masscra[5]举了一个例子,说明定理 2.2.1 中 $V(t,\boldsymbol{x})$ 具有无穷上界的假设是重要的,但加了无穷小上界的条件,则保证了一致渐近稳定,故对渐近稳定,条件还可以减弱。

定理 2.2.2 若在 G_H 上存在具有无穷上界的无限大正定函数$V(t,\boldsymbol{x})$,使得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}$是负定的,则(2.1-1)式的零解 $\boldsymbol{x}=0$ 是全局一致渐近稳定的。

证:其证明方法与定理 2.2.1 的证法相似,故略,详细证明留给读者。

§3 指数稳定性定理

下面来讨论指数稳定性,这是一种最好的稳定性,解收敛于平衡位置的速度快,这个速度在控制论中被称为过渡过程的品质指标。

定义 2.3.1[16] 设 $\varphi_1,\varphi_2\in K$,若存在 $\mu>0$, $\forall r\in[0,\mu]$, $\exists\ k_1>0,k_2>0$,使得

$$k_1\varphi_1(r)\leqslant\varphi_2(r)\leqslant k_2\varphi_1(r) \tag{2.3-1}$$

称 φ_1,φ_2 具有局部同级增势,若 $\forall r\in[0,+\infty)$,(2.3-1)式成立,称 φ_1,φ_2 具有全局同级增势。

定理 2.3.1 若在 G_H 上存在 $V(t,\boldsymbol{x})$ 与 $\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}$ 具有同级增

势，$\alpha>0$ 及具有局部同级增势的 $\varphi_1(r),\varphi_2(r),\varphi_3(r)\in K$，使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (2.3\text{-}2)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant-\varphi_3(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (2.3\text{-}3)$$

则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 是指数稳定的。

证：由于 φ_2 与 φ_3 具有同级增势，故存在 $k_1>0$ 使之有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant-\varphi_3(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant-k_1\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant-k_1V(t,\boldsymbol{x}) \qquad (2.3\text{-}4)$$

由(2.3-4)式有

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{-k_1(t-t_0)}$$

进而有 $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}_0\|)\mathrm{e}^{-k_1(t-t_0)}$，由于 φ_1,φ_2 与 $\|\boldsymbol{x}\|^\alpha$ 具有同级增势，故存在 $l_1>0,l_2>0$，使得

$$\begin{aligned}l_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)^\alpha&\leqslant\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\\&\leqslant l_2\|\boldsymbol{x}_0\|^\alpha\mathrm{e}^{-k_1(t-t_0)}\end{aligned}$$

最后有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\left(\frac{l_2\|\boldsymbol{x}_0\|^\alpha}{l_1}\right)^{1/\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{k_1}{\alpha}(t-t_0)}\overset{\text{def}}{=}M(\boldsymbol{x}_1)\mathrm{e}^{-\frac{k_1}{\alpha}(t-t_0)} \qquad (2.3\text{-}5)$$

此式说明了(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 指数稳定。

注 将定理 2.3.1 中的 G_H 改为 $I\times R^n$，$\varphi_1,\varphi_2\in K$ 改为 $\varphi_1,\varphi_2\in KR$，其它条件不变，则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 是全局指数稳定的，请读者作为练习完成证明。

注 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 与 $\|\boldsymbol{x}\|^\alpha$ 具有同级增势，这条件是重要的。

例 1 $\qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x^3$

显然，零解一致渐近稳定，通解为：

$$x(t)=x_0\sqrt{1/[1+2x_0^2(t-t_0)]}$$

故 $x=0$ 不是指数稳定的。

若令 $V=\mathrm{e}^{-1/x^2}V(0)$

则
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=-2V$$

显然可令 $\varphi_1(|x|)=\varphi_2(|x|)=\mathrm{e}^{-1/x^2},\varphi_3(|x|)=2\mathrm{e}^{-1/x^2}$
它们都具有同级增势,但找不到 $\alpha>0$,使得 φ_1 与 $\|\boldsymbol{x}\|^{\alpha}$ 具有同级增势。

可以证明,定理 2.3.1 与下列定理 2.3.2 等价。

定理 2.3.2 若在 G_H 上存在 $V(t,\boldsymbol{x})$,及常数 $c_1\geqslant1,c_2>0$,使得

$$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant c_1\|\boldsymbol{x}\|$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant-c_2\|\boldsymbol{x}\|$$

则(2.1-1)式的零解 $\boldsymbol{x}=0$ 指数稳定。

请读者作为练习完成证明。

§4 Ляпунов 不稳定性定理[2]

下面介绍不稳定性的经典结果。

定理 2.4.1 Четаев 设在 G_H 存在可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$,具有 $V(t,0)=0$,使得:

1)对 $t\geqslant t_0$ 在原点任意邻域内,有 $V>0$ 的区域。

2)在区域 $V>0$ 中,$V(t,\boldsymbol{x})$有界。

3)在 $V>0$ 中,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}$正定(即 $\forall\varepsilon>0,\exists l>0$ 使得在 $V\geqslant\varepsilon>0$ 中,有$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant l>0,t\geqslant t_0$),则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

证:选取 $\varepsilon>0,0<\varepsilon<H$,今证 $\exists\boldsymbol{x}_0$ 不论 $\|\boldsymbol{x}_0\|$ 多小,解 $\boldsymbol{x}(t)$ 总会越出 $\|\boldsymbol{x}\|<\varepsilon$,事实上,在 $V>0$ 区域中,任取 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $\|\boldsymbol{x}_0\|\ll1$,且 $V(t_0,X_0)>0$,由条件 1),这是可能的,又因为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}>0\ (t\geqslant t_0)$$

故有 $V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \geqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0) > 0$

若 $\boldsymbol{x}(t)$不越出 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$,则将一直位于区域 $V(t,\boldsymbol{x})>0$ 中,由条件 3),存在 $l>0$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t_0))}{\mathrm{d}t} \geqslant l > 0$$

故有 $V(t,\boldsymbol{x}(t)) = V(t_0,\boldsymbol{x}_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \geqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0) + l(t - t_0)$ 当 $t \geqslant 1$, $V(t,\boldsymbol{x}(t_1))$ 可任意大,与条件 2)矛盾,故 $\boldsymbol{x}(t)$总会越出 $\|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \varepsilon$。

下面证明 Ляпунов 两个不稳定性定理都是 Четаев 定理的特例。

推论 2.4.1 Ляпунов 第一不稳定性定理[1]

若存在定义在 G_H 上的可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$, $V(t,0)=0$ 使得

1)定理 2.4.1 的条件 1)成立(原点的任何邻域内存在 $\boldsymbol{x}_0$,使 $V(t_0,\boldsymbol{x}_0)>0$)。

2) V 具有无穷小上界。

3) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}$正定。

则(2.1-1)式的零解不稳定。

证:因为 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0} V(t,\boldsymbol{x})=0$,故 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta(\varepsilon)$,当 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$,有 $|V(t,\boldsymbol{x})|<\varepsilon\ (t\geqslant t_0)$,从而在原点某邻域 $O_\delta=\{\boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{x}\|<\delta\}$与 $V>0$ 的交集内 $V(t,\boldsymbol{x})$有界,定理 2.4.1 条件 2)成立。

因为存在正定函数 $W(\boldsymbol{x})$,使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant W(\boldsymbol{x})$,故

$\forall\, \varepsilon>0$,在 $V=\varepsilon$ 中有 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\delta$,取

$$l = \inf_{\delta\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H} W(\boldsymbol{x}) > 0$$

从而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant l>0$,即在 $V>0$ 内$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$正定,定理 2.4.1 条件全满足,故结论真。

推论 2.4.2 Ляпунов 第二不稳定性定理[1]

若存在定义在 G_H 上的可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 使得

1)在原点任意邻域内有 $V>0$ 的区域。

2)V 在 $t\geqslant t_0$, $\|\boldsymbol{x}\|<H$ 内有界。

3)$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}=\lambda V+W(t,\boldsymbol{x})$,其中 $\lambda>0$, $W(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$, $t\geqslant t_0$,则(2.1-1)式的零解不稳定。

证:条件 1),2)蕴涵定理 2.4.1 的条件 1),2)成立。

现取 $\forall\varepsilon>0$,取 $l(\varepsilon)=\lambda\varepsilon$,在 $V\geqslant\varepsilon$ 上有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant\lambda\varepsilon>0$$

从而条件 3)蕴涵定理 2.4.1 中条件 3),这样定理 2.4.1 条件全满足,从而结论成立。

定理 2.4.2 设存在定义于 G_H 上的连续可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 满足:

1)当 t 固定时,$V(t,\boldsymbol{x})$ 对 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}$ 正定。

2)存在 $\alpha>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, T=T(\varepsilon)>0$, $\boldsymbol{x}_0$, $\|\boldsymbol{x}_0\|=\alpha$,使得 $V(T,\boldsymbol{x}_0)<\varepsilon$。

则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

证: 用反证法,设(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 稳定,则对 $\forall\alpha>0$, $\exists\,\delta=\delta(\alpha)>0$,当 $\|x_0\|<\delta$ 时,有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|^2<\alpha\quad(t\geqslant t_0)$$

因对固定的 t, $V(t,\boldsymbol{x})$ 正定,故当 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\delta$ 时,存在 $l>0$,使 $V(t_0,\boldsymbol{x})\geqslant l>0$。

取 $0<\varepsilon<l$,按条件有 $\boldsymbol{x}$ 及 $T\geqslant t_0$,当 $\|\boldsymbol{x}\|=\alpha$ 时有

$$V(t,\boldsymbol{x})<\varepsilon$$

设 $\boldsymbol{x}_T=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$, $\|\boldsymbol{x}_T\|^2=a$,则 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0,T,\boldsymbol{x}_T)$,这时,必有 $\|\boldsymbol{x}_0\|>\delta$,否则,若 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\delta$ 有

$$\alpha=\|\boldsymbol{x}_T\|^2=\|\boldsymbol{x}(T,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|^2<\alpha$$

矛盾,故 $V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\geqslant l>\varepsilon>0$

但由于$\frac{dV}{dt}>0$,从而有

$$\varepsilon < l \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant V(T, x(T, t_0, x_0)) < \varepsilon$$

又导出矛盾,从而(2.1-1)式的零解 $x=0$ 不稳定。

§5 Ляпунов 稳定性定理的推广

本节介绍 Ляпунов 稳定性基本定理的某些推广,有些是将基本定理中的条件减弱,有些是换成其它条件。

Малкин[3]曾给出一个稳定性定理,若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x)$ 和负定函数 $V_1(t,x)$,使在任何固定域 $0<\lambda\leqslant\|x\|\leqslant\mu\leqslant H$ 中,有

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{dV}{dt} - V_1\right) = 0 \tag{2.5-1}$$

则(2.1-1)式的 $x=0$ 不稳定。

现介绍下面改进的 Малкин 稳定性定理[37,41]。

定理 2.5.1 若在 G_H 内存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,x)$ 和负定函数 $V_1(t,x)$,使在任何固定域 $0<\lambda\leqslant\|x\|\leqslant\mu\leqslant H$ 中,$\forall\delta>0$, $\exists t^*(\delta)$ 当 $t\geqslant t^*$ 时有

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(2.1\text{-}1)} < V_1(t,x) + \delta \tag{2.5-2}$$

则(2.1-1)式的 $x=0$ 稳定。

证:由定理假设和存在 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|), V_1(t,x) \leqslant -\varphi_3(\|x\|), \forall\varepsilon>0$$

令 $\quad \varepsilon_1 \overset{\text{def}}{=} \varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)), \lambda \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{\|x\|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{2}} \varphi_3(\|x\|)$

取 $\delta=\frac{\lambda}{2}$,由定理条件知在区域

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\leqslant\|x\|\leqslant H$$

$\forall \varepsilon>0, \exists t^*(\delta)$，当 $t \geqslant t^*$，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} < V_1(t,\boldsymbol{x}(t)) + \delta \leqslant -\varphi_3(\|\boldsymbol{x}(t)\|) + \delta$$

$$\leqslant -\inf_{\|x\| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{2}} \varphi_3(\|\boldsymbol{x}(t)\|) + \delta = -\frac{\lambda}{2} < 0 \qquad (2.5\text{-}3)$$

从而当 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \overset{\text{def}}{=} \|\boldsymbol{x}(t^*)\| \leqslant \varepsilon_1, t \geqslant t^*$ 时有

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(t^*,\boldsymbol{x}(t^*))$$

$$\leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}(t^*)\|) \leqslant \varphi_2(\varepsilon)$$

进而有 $\qquad \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \varphi_1^{-1}(\varphi_2(\varepsilon_1)) = \varepsilon$

在 $[t_0, t^*]$ 上，利用解对始值的连续依赖性，只要 $\|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \eta \ll 1$，就有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \varepsilon_1$，故(2.1-1)式的零解稳定。

注 此定理与定理 2.1.1 不同之处是允许 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 变号。

注 Малкин 定理条件(2.5-1) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - V_1\right) = 0$ 等价于 $\forall \delta>0, \exists t^*(\delta)$，当 $t \geqslant t^*$ 有

$$V_1(t,\boldsymbol{x}) - \delta < \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < V_1(t,\boldsymbol{x}) + \delta$$

显然此不等式左边的限制量是多余的。

例 1 考虑

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|\right)(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - x_1^3 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|\right)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) - x_2^3 \end{aligned} \qquad (2.5\text{-}4)$$

且 $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j \overset{\text{def}}{=} x^{T}Ax$，半负定。则(2.5-4)式的零解稳定。

证：令 $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.5\text{-}4)} = \sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|\right)\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j - x_i^4\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|\right)\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{2} x_i^4$$

令 $$V_1 = -\sum_{i=1}^{2} x_i^4 \qquad V_1 \text{ 负定。}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V_1 + (\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|)x^T A x$$

显然$\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - V_1) = \lim\limits_{t\to\infty}(\frac{1}{1+t} + \cos t - |\cos t|)x^T A x$ 不存在,不满足 Малкин 定理条件,但满足定理 2.5.1 的条件。

下面介绍自治系统稳定性的结果。

设(2.1-1)式为自治系统,即 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 故 $\widetilde{G}_H = \{\boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{x}\| < H\}$。

定理 2.5.2[40] 若存在定义于 $\widetilde{G}_H$ 上的正定函数 $V(\boldsymbol{x})$及正数序列$\{r_k\}$,$\{\eta_k\}$其中$\lim\limits_{t\to\infty} r_k = 0$,且在 Ω 内,存在 $\mathscr{D}_k = \{\boldsymbol{x} | 0 < r_k - \eta_k \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant r_k, \eta_k > 0, k = 1,2,\cdots\}$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} \leqslant 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}_k, k = 1,2,\cdots$$

则(2.1-1)式的零解稳定。

证: $\forall \varepsilon > 0$,设 $\varepsilon < H$,令

$$l = \inf_{\|\boldsymbol{x}\| = \varepsilon} V(\boldsymbol{x}) > 0$$

因$\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$,故存在 $k_0 > 0$,当 $k > k_0$ 时,有 $r_k < l$,取 $\tilde{k} = k_0 + 1$,由于$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to 0} V(\boldsymbol{x}) = 0$,故对 $r_{\tilde{k}} > 0$, $\exists\ 0 < \delta < \varepsilon$,当$\|\boldsymbol{x}\| < \delta$ 有

$$V(\boldsymbol{x}) < r_{\tilde{k}} - \eta_{\tilde{k}}$$

取始值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$,今证 $\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$,当 $t \geqslant t_0$。

反证:若不然,由解的连续性,当 $0 < t - t_0 \ll 1$ 时,有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$。

当 t 增加时,必有某时刻 t^*,使 $\|\boldsymbol{x}(t^*)\| = \varepsilon$,从而由连续函数的介值性质知必存在 $t_2 > t_1 > 0$,使得

$$V(\boldsymbol{x}, t_1) = r_{\tilde{k}} - \eta_{\tilde{k}}$$

$$V(\boldsymbol{x}(t_2)) = r_{\tilde{k}}$$

于是一方面有

$$V(\boldsymbol{x}(t_1)) < V(\boldsymbol{x}(t_2))$$

另一方面,在 $r_{\tilde{k}}-\eta_{\tilde{k}}\leqslant V(\boldsymbol{x})\leqslant r_{\tilde{k}}$ 上,因为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$$

故 $V(\boldsymbol{x}(t))$非增,从而 $V(\boldsymbol{x}(t_2))\leqslant V(\boldsymbol{x}(t_1))$,这一矛盾证明了 $\boldsymbol{x}=0$ 的稳定性。

此定理的特点是允许在 $\mathscr{D}_k$ 之外,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$变号。

例 2　考虑下列系统零解的稳定性

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x(x^2+y^2)[1-\cos\ln(x^2+y^2)\\ \qquad\qquad -\sin\ln(x^2+y^2)] \qquad \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(x^2+y^2)[1-\cos\ln(x^2+y^2)-\sin\ln(x^2+y^2)]\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}\tag{2.5-5}$$

令 $V=x^2+y^2$,则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2(x^2+y^2)[1-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\ln(x^2+y^2))]$$

取 $r_k=e^{-2k\pi-\frac{\pi}{4}}>0,\eta_k=e^{-2k\pi}(e^{-\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{2}})$

当 $k\to\infty$, $e^{-2k\pi-\frac{\pi}{4}}\to 0$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$,当 $e^{-2k\pi-\frac{\pi}{2}}\leqslant x^2+y^2\leqslant e^{-2k\pi-\frac{\pi}{4}}$时,故(2.5-5)式的 $x=y=0$ 稳定。

下面给出一致稳定性定理的推广[41]。

定理 2.5.3　若在 G_H 上存在可微函数 $V(t,\boldsymbol{x})$和可微正定函数 $W(\boldsymbol{x})$及单调不减函数 $\theta(t)$,具有 $\theta(t_0)=1$,使得

$$V(t,\boldsymbol{x})-\theta W(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}U(t,\boldsymbol{x})$$

和

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0\qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant 0$$

则(2.1-1)式的零解一致稳定。

证:1)若 $V(t,\boldsymbol{x})-\theta(t)W(\boldsymbol{x})\equiv 0$,则 $W(\boldsymbol{x})=\dfrac{V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\theta(t)}$,

因为$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$,故沿解 $\boldsymbol{x}(t)$, $V(t,\boldsymbol{x}(t))$单调不增,而 $\theta(t)$ 单调不减,从而 $W(\boldsymbol{x}(t))$单调不增,于是有

$$\frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$$

故(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 一致稳定。

2)若 $V(t,\boldsymbol{x})-\theta(t)W(\boldsymbol{x})=U(t,\boldsymbol{x})\neq 0 \qquad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant 0$

$\widetilde{V}(t,\boldsymbol{x})=V(t,\boldsymbol{x})-U(t,\boldsymbol{x})=\theta(t)W(\boldsymbol{x})$

故 $\widetilde{V}(t,\boldsymbol{x})-\theta(t)W(\boldsymbol{x})\equiv 0$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}$$

$$\leqslant\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$$

由 1)的证明,可知(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 一致稳定。

注 如果 $\theta(t)\to+\infty$,当 $t\to\infty$,定理 2.5.3 的其它条件不变,(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 还是吸引的。

因为若 $V(t,\boldsymbol{x}(t))-\theta(t)W(\boldsymbol{x}(t))\equiv 0$

$$W(\boldsymbol{x}(t))=\frac{V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\theta(t)}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$$

可知
$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant W(\boldsymbol{x}(t))=\frac{V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\theta(t)}\to 0$$

故
$\|\boldsymbol{x}(t)\|\to 0$,从而 $\boldsymbol{x}=0$ 吸引。

同理可证 $V(t,\boldsymbol{x})\neq 0$ 的情况。

例 3
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{1+t}+\frac{x^2}{1+t}-\frac{x^3}{1+t}\tag{2.5-6}$$

取 $\theta(t)=1+t$, $W(x)=x^2$,取 $V(t,x)\equiv 0$,于是

$$U(t,x)=-(1+t)x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\equiv 0$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-x^2+2x^2-2x^3+2x^4=x^2+(-2x+2x^2)x^2$$

$$\geqslant x^2 - |2x - 2x^2| x^2 > 0 \qquad \text{当 } x \neq 0$$

$$x \in \Omega = \{x \mid |2x - 2x^2| < 1\}$$

定理 2.5.3 条件满足,故(2.5-6)式的 $x=0$ 一致稳定,且吸引。

§6 渐近稳定性定理

设(2.1-1)式为自治系统, 即 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,且 $\widetilde{G}_H=\{\boldsymbol{x},\|\boldsymbol{x}\|<H\}$。

现在介绍著名的 Красовский-Барбашин[12]渐近稳定性定理。

定义 2.6.1 称 $E=\{\boldsymbol{x},|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0),t\geqslant t_0\}$ 为过始值,$t=t_0,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$,(2.1-1)式的正半轨线;若 $\boldsymbol{x}_0\neq 0$,称 E 为非平凡的正半轨线;称 $\boldsymbol{x}^*\in\widetilde{G}_H$ 为正半轨线 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的 ω 极限点,若存在序列$\{t_k\}$(其中 $t_k\to\infty$,当 $k\to\infty$),使得

$$\boldsymbol{x}^* = \lim_{t_k\to\infty}\boldsymbol{x}(t_k,t_0,\boldsymbol{x}_0)$$

记 $\Omega(t_0)$为 ω 极限点组成的集合。

若 $\boldsymbol{x}=0$ 是渐近稳定的,则 $\boldsymbol{x}=0$ 是任何正半轨线 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$($\boldsymbol{x}_0$ 在吸收区域内)的 ω 极限点。

引理 2.6.1 设 $\boldsymbol{x}^*$是 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$的 ω 极限点,则 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*)$ 的正半轨线上的点都是 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$的 ω 极限点,从而 Ω 是由整条轨线组成。

证:由假设,存在$\{t_n\}\to\infty$使得

$$\boldsymbol{x}^* = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)$$

设 $\boldsymbol{x}(\tau,t_0,\boldsymbol{x}^*)$是过 $\boldsymbol{x}^*$轨线上的任意点,由自治系统解的性质有

$$\boldsymbol{x}(t_n+\tau,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(\tau,t_0,\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0))$$

又由解对始值的连续依赖性,故有

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n+\tau,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(\tau,t_0,\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{x}(\tau,t_0,\boldsymbol{x}^*)$$

即 $\boldsymbol{x}(\tau,t_0,\boldsymbol{x}^*)$也是 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$的 ω 极限点。

定理 2.6.1 若在 $\widetilde{G}_H$ 上存在正定可微函数 $V(\boldsymbol{x})$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} \leqslant 0$$

而集合 $M=\{\boldsymbol{x},\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}=0,\boldsymbol{x}\in\widetilde{G}_H\}$,除 $\boldsymbol{x}=0$ 外,不含非零解的正半轨线,则(2.1-1)式零解渐近稳定。

证:根据定理 2.1.1 知(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 稳定。

$\forall\varepsilon>0,(0<\varepsilon<H)\ \exists\delta(\varepsilon)>0$,当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$,有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon < H$$

由 Weierstrass 聚点原理知 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$的 ω 极限集$\Omega(\boldsymbol{x}_0)$非空且有界。

今证 $\Omega(\boldsymbol{x}_0)=\{0\}$。若不然,有$\{t_n\}$当 $n\to\infty,t_n\to\infty$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}^* \neq 0 \qquad (2.6\text{-}1)$$

由条件有

$$\lim_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = V(\boldsymbol{x}^*) > 0 \qquad (2.6\text{-}2)$$

考虑过$(t_0,\boldsymbol{x}^*)$的轨线 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*)$则有

$$V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*))\leqslant V(\boldsymbol{x}^*)$$

若对 $t\geqslant t_0$ 故有

$$V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*))\equiv V(\boldsymbol{x}^*)$$

于是有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}=0$

则非零解整条正半轨线 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*)\subset M$,与假设矛盾,于是存在 $t_1\geqslant t_0$,使

$$V(\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}^*)) < V(\boldsymbol{x}^*)$$

由引理 2.6.1 知$\forall t_1>t_0,\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}^*)$是 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$的 ω 极限点,从而存在$\{t_n^*\},t_n^*\to\infty$(当 $n\to\infty$),使得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n^*,t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}^*)$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = V(\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}^*)) < V(\boldsymbol{x}^*)$

(2.6-3)

这与(2.6-2)式矛盾,故 $\Omega=\{0\}$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$$

例 1　考虑具有阻尼的单摆振荡系统平衡位置的稳定性。

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{H}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{2.6-4}$$

式中 H 表示阻尼，m 表示质量，l 为摆长，g 是重力加速度，令 $x=\varphi,y=\dot{\varphi}$，则(2.6-4)式化为下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{g}{l}\sin x-\dfrac{H}{m}y\end{cases} \tag{2.6-5}$$

取 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$　　当 $0<x<2\pi$ 时，$V(x,y)$ 正定。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=\frac{\partial V}{\partial x}y+\frac{\partial V}{\partial y}\left[-\frac{g}{l}\sin x-\frac{H}{m}y\right]=-\frac{H}{m}y^2\leqslant 0$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，得 $M=\{y\mid y=0\}$ 不含非零的正半轨线，故零解渐近稳定。

若 $\widetilde{G}_H$ 改为 R^n，便有：

定理 2.6.2　若存在无穷大正定函数 $V(\boldsymbol{x})\in C'[R^n,R]$，使得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$，且集合 $M=\{\boldsymbol{x}\mid\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}=0\}$，除 $\boldsymbol{x}=0$ 外不含(2.1-1)式的整条正半轨线，则(2.1-1)式的零解全局稳定。

证：由条件 $\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$ 有

$$V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)$$

$\forall M>0,\exists R$，当 $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant R$，有 $V(\boldsymbol{x})\geqslant M$，故若 $V(\boldsymbol{x})\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)$ 必存在 $r>0$，使 $\|\boldsymbol{x}\|<r$，从而 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 囿于 R^n 中一紧集之中，仿定理 2.6.1，可证 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$，从而(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 全局稳定。

例 2　考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = f(z) - ay \\ \dfrac{dz}{dt} = -g(x) - by\end{cases} \tag{2.6-6}$$

式中 $f(0)=g(0)=0, a>0, b>0, g(x)\in C', f(z)\in C$,且 1) $xg(x)>0$,当 $x\neq 0$;2) $zf(z)>0$,当 $z\neq 0$;3) $g'(x)<ab$,当 $x\neq 0$; 4) $V(x,y,z) = a\int_0^x g(x)dx + yg(x) + \int_0^z f(z)dz + \frac{b}{2}y^2$ 是无穷大正定的。

则(2.6-6)式的零解 $x=0$ 全局稳定。

证:令 $M(x,y) \overset{\text{def}}{=} a\int_0^x g(x)dx + yg(x) + \frac{b}{2}y^2$

$$\overset{\text{def}}{=} aG(x) + yg(x) + b\bar{y}(y)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{[2\sqrt{b}\,\bar{y}(y) + \frac{1}{\sqrt{b}}yg(x)]^2}{4\bar{y}(y)} + \frac{4aG(x)\bar{y}(y) - \frac{1}{b}y^2g^2(x)}{4\bar{y}(y)} \tag{2.6-7}$$

其中 $\bar{y} = \frac{1}{2}y^2$

令

$$V(x,y) \overset{\text{def}}{=} 4aG(x)\bar{y}(y) - \frac{1}{b}y^2g^2(x)$$

$$\overset{\text{def}}{=} 4\int_0^x g(x)\left\{\int_0^y [a - \frac{g'(x)}{b}]ydy\right\}dx$$

由条件 1)、3)知 $V(x,y)$正定,这就蕴涵 $M(x,y)$正定。

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(2.1\text{-}1)} = y^2[g'(x) - ab] \leqslant 0$$

集合 $y=0$ 不含(2.6-6)式的非零的整条正半轨线,故(2.6-6)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 全局稳定。

§7 推广的 Marckhoff 定理

下面介绍一个推广 Marckhoff 定理的一个结果。

定理 2.7.1[37,41] 若(2.1-1)式在 G_H 上满足:

1)存在正定函数 $W(\boldsymbol{x})$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{x}_i}f_i(t,\boldsymbol{x})=(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))$$

有上界或下界;

2)存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\qquad 负定。$$

则非自治系统(2.1-1)式零解渐近稳定。

证:由条件 2)知零解稳定,今证零解吸引。

先考虑内积$(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}))$有上界的情况。

反证:设零解非吸引,则存在$\{t_n\}$, $t_n\to+\infty$, $(n\to+\infty)$使某 $\varepsilon>0$,有

$$\|\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\geqslant\varepsilon \tag{2.7-1}$$

由 $W(\boldsymbol{x})$的正定性,知存在 $\delta>0$,使对一切 m,有

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}(t_m,t_0,\boldsymbol{x}_0))\geqslant\delta$$

又由假设存在常数 $k>0$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}=(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})) \tag{2.7-2}$$

今证 $\forall\, t\in[t_m-\frac{\delta}{2k},t_m]$有

$$W(\boldsymbol{x}(t))\geqslant\frac{\delta}{2}\qquad \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) \tag{2.7-3}$$

若不然,必存在 $\tilde{t}\in[t_m-\frac{\delta}{2k},t_m]$,使得

$$W(\boldsymbol{x}(\tilde{t}))<\frac{\delta}{2}$$

由中值定理知存在 $t^* \in (\tilde{t}, t_m)$,使得

$$\frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{x}, t^*)}{\mathrm{d}t} = \frac{W(\boldsymbol{x}(t_m) - W(\boldsymbol{x}(\tilde{t}))}{t_m - \tilde{t}} \geqslant \frac{\delta - \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2k}} = k \tag{2.7-4}$$

(2.7-4)式与(2.7-2)式矛盾,故(2.7-3)式成立。

于是,由 $W(\boldsymbol{x})$ 正定,知存在 $\eta > 0$,使对一切 m 和一切 $t \in \left[t_m - \frac{\delta}{2k}, t_m\right]$,有

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| \geqslant \eta > 0 \tag{2.7-5}$$

再由$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定,知存在 $c > 0$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)} \leqslant -c$$

对一切 $t \in \left[t_m - \frac{\delta}{2k}, t_m\right]$成立。

不妨设 $t_1 - \frac{\delta}{2k} > t_0$,且上述如区间互不相交,则有

$$V(t_m) - V(t_0) = \int_{x_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{m} \int_{t_i - \frac{\delta}{2k}}^{t_i} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant -cm\frac{\delta}{2k} \to -\infty \qquad 当\ m \to \infty$$

与 $V(t, \boldsymbol{x})$正定矛盾,故(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x} = 0$ 吸引,从而渐近稳定。

对于内积$\left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\right)$有下界的情况,证明类似,故略。

推论 2.7.1 即 Marckhoff 定理[14]

设(2.1-1)式右端在 G_H 上有界,且在 G_H 上存在正定函数 $V(t, \boldsymbol{x})$,使得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}$负定,则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x} = 0$ 渐近稳定。

注 定理 2.7.1 和推论 2.7.1,用 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$的某种有界性来代替 $V(t, \boldsymbol{x})$的无穷小上界,可见 $V(t, \boldsymbol{x})$的无穷小上界对渐近稳定不是必要的。

例 1

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-x}{1+t}+t^2y^{2k-1}-tx^{2r-1}+\dfrac{1}{t}xy^{2k}\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-y}{1+t^2}-t^2x^{2k-1}-ty^{2r-1}+\dfrac{1}{t}x^{2k}y\end{cases}\tag{2.7-6}$$

其中 $0<\tau\leqslant t<+\infty$，$\tau$ 为常数，r,k 为自然数。

用定理 2.7.1 证明(2.7-6)式的零解渐近稳定性。

证：作 $V(t,x,y)=(1+t)(x^{2k}+y^{2k})\geqslant x^{2k}+y^{2k}$，$V$ 正定，但不具有无穷小上界。

当 $x^{2k}+y^{2k}\leqslant\alpha^2\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\tau}{\alpha(1+\tau)}$时，由于

$$\begin{aligned}4k(1+\frac{1}{\tau})x^{2k}y^{2k}&=-2k(1+\frac{1}{\tau})(x^{2k}-y^{2k})^2\\&\quad+2k(1+\frac{1}{\tau})(x^{4k}+y^{4k})\\&\leqslant-2k(1+\frac{1}{\tau})(x^{2k}-y^{2k})^2+k(x^{2k}+y^{2k})\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{(2.1\text{-}1)}&=(x^{2k}+y^{2k})+2k(1+t)(x^{2k-1}\dot{x}+y^{2k-1}\dot{y})\\&=(x^{2k}+y^{2k})+2k(1+t)\Big[-\frac{x^{2k}+y^{2k}}{1+t}\\&\quad-t(x^{2(k+r-1)}+y^{2(k+r-1)})+\frac{2}{t}x^{2k}y^{2k}\Big]\\&\leqslant(1-2k)(x^{2k}+y^{2k})-2k\tau(1+\tau)[x^{2(k+r-1)}\\&\quad+y^{2(k+r-1)}+4k(1+\frac{1}{\tau})x^{2k}y^{2k}]\\&\leqslant-(2k-1-k)(x^{2k}+y^{2k})\\&\quad-2k\tau(1+\tau)[x^{2(k+r-1)}+y^{2(k+r-1)}]\end{aligned}$$

即$\dfrac{dV}{dt}$负定。

再定义 $W(x,y)=x^{2k}+y^{2k}$，则 $W(x,y)$正定。

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial W}{\partial x},f(t,x,y)) &= 2k(x^{2k-1}\dot{x}+y^{2k-1}\dot{y}) \\
&= 2k[-\frac{x^{2k}+y^{2k}}{1+t}-t(x^{2(k+r-1)} \\
&\quad +y^{2(k+r-1)})+\frac{2}{t}x^{2k}y^{2k}] \\
&\leqslant \frac{4k}{\tau}x^{2k}y^{2k}\leqslant \frac{2k}{\tau}(x^{2k}+y^{2k})^2 \\
&\leqslant \frac{2k}{\tau}a^4
\end{aligned}
$$

由定理 2.7.1 可知(2.7-6)式的 $x=y=0$ 渐近稳定。

定理 2.7.2 若存在定义于 G_H 内的 $V(t,\boldsymbol{x})$, $W(\boldsymbol{x})$, $\theta(t,\boldsymbol{x})$,其中 $W=W(\boldsymbol{x})$正定,$\theta(t,\boldsymbol{x})$非负关于 x 连续,$\theta(t,\boldsymbol{x})\Rightarrow+\infty$关于 x 一致成立($t\to\infty$), 又$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$。则(2.1-1)式零解 $\boldsymbol{x}=0$ 渐近稳定。

证:由条件知,当 $t\gg 1$ 时,$\theta(t,\boldsymbol{x})\Rightarrow\infty$(当 $t\to\infty$)关于 $\boldsymbol{x}$ 一致成立,因而 $V(t,\boldsymbol{x})\geqslant W(\boldsymbol{x})$,故 $V(t,\boldsymbol{x})$正定($t\gg 1$),从 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(2.1\text{-}1)}\leqslant 0$ 可知 $\boldsymbol{x}=0$ 稳定。

由 $W(\boldsymbol{x})$正定,知存在 $\varphi\in K$,使 $W(\boldsymbol{x})\geqslant\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$,条件蕴涵 $V(t,\boldsymbol{x}(t))$单调不增,且有界,故存在常数 $M>0$,使得

$$
\begin{aligned}
M\geqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))&\geqslant\theta(t,\boldsymbol{x}(t))W(\boldsymbol{x}(t)) \\
&\geqslant\theta(t,\boldsymbol{x}(t))\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|)
\end{aligned}
$$

从而 $\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant\frac{M}{\theta(t,\boldsymbol{x}(t))}$

$\forall\varepsilon>0,\varphi(\varepsilon)>0,\exists T$,当 $t>T$ 时,有

$$\theta(t,\boldsymbol{x}(t))>\frac{M}{\varphi(\varepsilon)}$$

即 $\varphi(\varepsilon)>\frac{M}{\theta(t,\boldsymbol{x}(t))}$ 故

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|)<\varphi(\varepsilon)$$

从而$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$,即 $\boldsymbol{x}=0$ 渐近稳定。

注 定理 2.7.2 推广了 Четаев[2]定理，当 $\theta(t,\boldsymbol{x})\equiv\theta(t)$便是 Четаев 定理。

例 2 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{t+\sin x} \tag{2.7-7}$$

取 $V=(t+\sin x)x^2\ \theta(t,x)=t+\sin x\ (t_0\geqslant 1)$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2(t+\sin x)x\left(\frac{-x}{t+\sin x}\right)+x^2\left(1+\cos\cdot\frac{x}{t+\sin x}\right)$$

$$=-2x^2+x^2\left(1-\frac{x\cos x}{t+\sin x}\right)$$

$$=-x^2\left(1+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)\leqslant 0,\qquad 0<\|x\|<1$$

故当 $\|x\|\leqslant H\ll 1, t\geqslant t_0\gg 1$，定理 2.7.1 条件满足，故(2.7-7)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 渐近稳定。

§8 推广的不稳定性定理

对于(2.1-1)式为自治系统，即 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\widetilde{G}_H=\{\boldsymbol{x},\|\boldsymbol{x}\|<H\}$有下列推广的 Ляпунов 不稳定性定理[39]，介绍这个结果之前，先介绍下面引理。

引理 2.8.1 若在 G_H 内，存在具有下界的函数 $V(\boldsymbol{x})$，且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0 \tag{2.8-1}$$

则任何 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，当 $t\to\infty$，它不离开区域 G，且它的 ω 极限集 Ω 位于某一超曲面 $V=V_0=\text{const}$。

证：设 $\boldsymbol{x}_0\in G_H$，并设 $y\in\Omega(\boldsymbol{x}_0)$，于是存在 $t_n\to\infty$，使得

$$y=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)$$

由于(2.8-1)式的条件，故函数 $V(\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0))$不增且有下界，因此存在极限

$$V_0=\lim_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0))$$

由 V 的连续性，故

$$V(y)=\lim_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0))$$

但因为 $V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))$是单调不增有下界，从而

$$\lim_{t_n\to\infty} V(\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = V_0$$

故对于任何 $y\in\Omega$，有 $V(y)=V_0$，这就说明所有极限点位于同一曲面上。

定理 2.8.1[39] 若在 $\widetilde{G}_H$ 内存在$V(x)$，具有 $V(0)=0$，且在 $\boldsymbol{x}=0$ 的任意领域内，$\exists\,\boldsymbol{x}_0$，使 $V(\boldsymbol{x}_0)>0$，又$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant 0$，且 $M=\{\boldsymbol{x}\mid\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\}$不含(2.1-1)式的非零的整条正半轨线，则 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

证：由条件可知，对某固定的 $\varepsilon>0$，$\forall\,\delta>0(\delta<\varepsilon)\;\exists\,\boldsymbol{x}_0\in B_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|<\delta\}$，使得 $V(\boldsymbol{x}_0)=V_0>0$，又由 $V(\boldsymbol{x})$的连续性及 $V(0)=0$，知存在 η，$0<\eta<\delta$；当$\|\boldsymbol{x}\|<\eta$ 时有

$$|V(\boldsymbol{x})|< V_0$$

现证 $\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$在 $t>t_0$ 某时刻越出闭区域 $B_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\{\boldsymbol{x}:\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon\}$

若不然，必有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon\ (t\geqslant t_0)$$

由$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant 0$ 得到

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0)>0\ (t\geqslant t_0)$$

从而 $\quad\eta\leqslant\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$

因 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 ω 极限集非空，$\forall\,y\in\Omega(\boldsymbol{x}_0)$，从而存在序列$\{t_n\}$，$t_n\to\infty$(当 $n\to\infty$)使得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0) = y$$

由于$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant 0$，从而 $V(\boldsymbol{x}(t))$不减且有上界，故存在极限

$$\lim_{t\to+\infty} V(\boldsymbol{x}(t)) = c>0$$

由 V 的连续性，知 $V(y)=c$，由 y 的任意性，在 $\Omega(\boldsymbol{x}_0)$上有$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=$

$0, \Omega(\boldsymbol{x}_0)$是由整条正半轨线组成,矛盾,故 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

例 1　考虑

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 3(1+x_2)^2 x_2 \end{cases} \tag{2.8-2}$$

的零解的稳定性。

取 $V = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} | = 6(1+x_2^2)x_2^2 \geqslant 0$$

令$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$,得 $\boldsymbol{x}_2=0$,进而得 $\boldsymbol{x}_1(t)=0$

故$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 除零解外,不合方程(2.8-2)式的整条正半轨线,从而 $x_1=x_2=0$ 不稳定。

定理 2.8.2　若在 G_H 上存在 $V(t,\boldsymbol{x})\in C'[G_H,R]$,具有 $V(t,0)=0$ 使得:

1)在 $x=0$ 的任意邻域 B_δ 内,有 $V>0$ 的区域。

2)在 $V>0$ 内 V 有界,且有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} |_{(2.1\text{-}1)} \geqslant \xi(t)g(V) + U(t,\boldsymbol{x}) \tag{2.8-3}$$

其中 $\xi(t)$在 $t\geqslant t_0$ 任意有限区间上可积,且$\int_{t_0}^{+\infty}\xi(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$, $g(V)$ 为 V 的连续函数且当$V>0$ 时,有

$$g(V)>0, U(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$$

则(2.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

证:　由条件 1)知对$\forall\,\delta>0$,可选取$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$,使当

$$\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta, V(t_0,\boldsymbol{x}_0) = \alpha > 0$$

今证 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$在某时刻 t_1 必越出区域$\|\boldsymbol{x}\|<h<H$,由条件 2)知有

$$V(t,\boldsymbol{x}(t)) \geqslant V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0)) = \alpha > 0$$

故 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$恒在 $V>0$ 的区域内,不能越过 $V=0$ 的边界而进入其它区域。

设在 $t\geqslant t_0$,恒有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant h<H$,由条件 2)便有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.1\text{-}1)}\geqslant \xi(t)g(V)$$

从而

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{V(t,x(t))}\frac{\mathrm{d}V}{g(V)}\geqslant\int_{t_0}^{t}\xi(t)\mathrm{d}t\to+\infty \qquad 当\ t\to+\infty \tag{2.8-4}$$

故 $V(t,\boldsymbol{x}(t))\to+\infty$,这与 $V(t,\boldsymbol{x}(t))$在 $V>0$ 内有界性矛盾,故必在某时刻 t 越出 $\|\boldsymbol{x}\|<h$,从而 $\boldsymbol{x}=0$ 不稳定。

例 2　考虑方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{t+1}(x^2+xy)\mathrm{e}^{\cos(x+y)}+y\mathrm{e}^{\sin t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x\mathrm{e}^{\sin t}+y^2\mathrm{e}^{\cos(x+y)} \qquad t\geqslant 0\end{cases} \tag{2.8-5}$$

的零解的稳定性。

证　令 $V(x,y)=x+y$,则 $V(x,y)$的正区域为

$$\mathscr{D}=\{t\geqslant 0,x+y>0\}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2.8\text{-}5)}=\frac{1}{1+t}(x+y)^2e^{\cos(x+y)}+\frac{x^2}{t+1}e^{\cos(x+y)}$$
$$+(x+y)e^{\sin t}+y^2e^{\cos(x+y)}(1-\frac{1}{1+t})$$

在 $\mathscr{D}$ 中:$\xi(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\dfrac{1}{1+t}>0$,且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau+1}=+\infty$。

$$g(V)=V^2\mathrm{e}^{\cos V}=(x+y)^2\mathrm{e}^{\cos(x+y)}>0$$

$$U(t,x,y)=y^2(1-\frac{1}{t+1})\mathrm{e}^{\cos(x+y)}+$$

$$(x+y)\mathrm{e}^{\sin t}+\frac{x^2}{1+t}\mathrm{e}^{\cos(x+y)}\geqslant 0$$

故根据定理 2.8.2,知零解不稳定。

第三章　Ляпунов 直接法的拓广

建立在能量函数基础而发展起来的 Ляпунов 直接法，有着普遍和深刻的理论意义和应用价值，不仅仅是用来研究 Ляпунов 的稳定性，而且要研究一个动力系统的其它渐近行为，往往都可以借助于 Ляпунов 函数及直接法的思想，本章对常微分方程动力系统介绍 Ляпунов 直接法的各种拓广，如 LaSalle 不变原理、比较原理、Lagrange 稳定性、耗散性、收敛性、结构扰动下的 Robust 稳定性、有界性、实用稳定、相对稳定、集合稳定、非常稳定、条件稳定等内容。

§1　LaSalle 不变原理[30]

1960 年前后美国数学家 LaSalle 发现了 Ляпунов 函数与 Birkoff 极限集之间的内在联系而提出了著名的不变原理。现就常微自治系统介绍相应的 LaSalle 不变原理。考虑

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R]\tag{3.1-1}$$

$\boldsymbol{f}$ 保证(3.1-1)式解的唯一性。

定义 3.1.1　称集合 $M\subset R^n$ 为(3.1-1)式定义的轨线的正向不变集，若 $\forall\, \boldsymbol{x}_0\in M$ 恒有，$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\subset M(t\geqslant t_0)$，称当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\to M$，若 $\exists\, \boldsymbol{p}\in M$ 和 $t_n\to\infty$，使得 $\|\boldsymbol{x}(t_n,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{p}\|\to 0$，记为 $t\to\infty$，$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\to M$，称 $\boldsymbol{p}$ 为 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的 w 极限点。

引理 3.1.1　若 $\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$ 对一切 $t\geqslant 0$ 有界，则 $\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$ 的 ω 极限点组成的 $\Omega(\boldsymbol{x}_0)$ 集有下列性质：

1) $\Omega(x_0)$ 非空；

2) $\Omega(x_0)$ 是紧集[即有界闭集]；

3) $\Omega(x_0)$ 是(3.1-1)式的轨线的不变集；

4) 当 $t\to+\infty$时，$x(t,t_0,x_0)\to\Omega(x_0)$。

证：1) 由 Weierstass 聚点原理，知存在 $t_n\to+\infty(n\to\infty)$，

使得 $$\lim_{t_n\to\infty} x(t_n)=\lim_{t_n\to\infty} x(t_n,0,x_0)=x^*\in\Omega(x_0)$$

故 $\Omega(x_0)$非空。

2) $\forall\{p_n\}\subset\Omega(x_0)$，使得 $p_n\to p$(当 $n\to\infty$)，现证：

$p\in\Omega(x_0)$， $\forall\varepsilon>0,\exists n_0$使得有 $p_{n_0}\in\Omega(x_0)$，且

$$\|p_{n_0}-p\|<\varepsilon/2$$

故存在$\{t_n\}$，当 $n\to\infty,t_n\to\infty$， 当 $n\gg1$ 有

$$\|x(t_n)-p_{n_0}\|<\varepsilon/2$$

因而 $\|x(t_n)-p\|\leqslant\|x(t_n)-p_{n_0}\|+\|p_{n_0}-p\|<\varepsilon$

由于 ε 的任意性，故有 $p\in\Omega(x_0)$，这就证明了 $\Omega(x_0)$是有界闭集，从而是紧的。

3) $\forall p\in\Omega(x_0)$，则存在 $t_n\to\infty(n\to\infty)$，使

$$\lim_{t_n\to\infty} x(t_n,0,x_0)=p$$

由解的唯一性有

$$x(t+t_n,0,x_0)=x(t,0,x(t_n,0,x_0))$$

且 $$\lim_{t_n\to\infty} x(t+t_n,0,x_0)=x(t,t_0,p)$$

从而轨线 $x(t,t_0,p)\subset\Omega(x_0)$

即 $\Omega(x_0)$是正向不变的(还可证明是负向不变的)。

4) 现证：$x(t,0,x_0)\to\Omega(x_0)$，用反证法，

若不然，设 $t\to+\infty,x(t)\times\Omega(x_0)$，则存在 $\varepsilon_0>0,\forall T>0$，

$\exists t^*>T$，使$\forall p\in\Omega(x_0)$有

$$\|x(t^*)-p\|\geqslant\varepsilon$$

故存在$\{t_n\}$ $t_n\to\infty,n\to\infty$，使对一切 $p\in\Omega(x_0)$有

$$\|x(t_n)-p\|\geqslant\varepsilon$$

但当 $t \geqslant 0$,$\boldsymbol{x}(t)$有界,从而点列$\{\boldsymbol{x}(t_n)\}$有聚点 $\boldsymbol{x}^* \in \Omega(\boldsymbol{x}_0)$,且 $\boldsymbol{x}(t_n) \to \boldsymbol{x}^*$,这是矛盾的,引理获证。

定理 3.1.1 (LaSalle 不变原理)设 $\mathscr{D} \in R^n$ 为紧集,从 $\mathscr{D}$ 内出发的解 $\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$恒在 $\mathscr{D}$ 中,若$\exists\, V(\boldsymbol{x}) \in C[\mathscr{D}, R]$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.1\text{-}1)} \leqslant 0$$

又设 $E = \{\boldsymbol{x} \mid \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(3.1\text{-}1)} = 0 \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{D}\}$,$M \subset E$ 是最大不变集,则当 $t \to \infty$,有 $\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x}_0) \to M$。

特别地若 $M = \{0\}$,则(3.1-1)式的零解渐近稳定。

证:设 $\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x}_0)$是从 $\mathscr{D}$ 内出发的解 $\boldsymbol{x}_0$ 的 ω 极限集为 $\Omega(\boldsymbol{x}_0)$,因为$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(3.1\text{-}1)} \leqslant 0$,故 $V(\boldsymbol{x}(t))$单调不增,而 $V(\boldsymbol{x}(t))$在紧集 $\mathscr{D}$ 上连续,故在 $\mathscr{D}$ 上有下界。因而

$$\lim_{t_n \to \infty} V(\boldsymbol{x}(t)) = V_\infty$$

故 V 在$\Omega(\boldsymbol{x}_0)$上有 $V(\boldsymbol{x}) = V_\infty = c$, $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} = 0$。其中 $\boldsymbol{x}(t) \in \Omega$。而 Ω 是 E 中不变集,故 $\Omega \subset M$, $\boldsymbol{x}(t) \to \Omega$ 蕴涵 $\boldsymbol{x}(t) \to M$。

这个定理的基本思想是利用解的 ω 极限集 Ω 的不变性来确定它的位置:

$$\Omega \subset M \subset E \subset \mathscr{D}$$

在一些具体应用中,往往作出满足定理的 Ляпунов 函数的同时,也给出了集合 $\mathscr{D}$,我们可以定义 $\mathscr{D}$ 为

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid V(\boldsymbol{x}) \leqslant l\}$$

若 $\mathscr{D}$ 为有界集,且在 $\mathscr{D}$ 中$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$,则对任何从 $\mathscr{D}$ 出发的解 $\boldsymbol{x}(t)$恒停为在 $\mathscr{D}$ 中。于是有:

定理 3.1.2 设 $\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x}\ V(\boldsymbol{x}) \leqslant l\}$是有界集, $V(\boldsymbol{x})$在 $\mathscr{D}$ 中有连续的一阶偏导数, 且在 $\mathscr{D}$ 中

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$$

则(3.1-1)式的从 $\mathscr{D}$ 出发的每一个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\to M$,当 $t\to\infty$ $(\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D})$,其中 M 的含义与定理 3.1.1 中定义相同。

例 1　用 LaSalle 不变原理讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx+x^2=0\qquad(a>0,b>0)\tag{3.1-2}$$

的 $x=0$ 的稳定性。

先化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-bx-ay-x^2\end{cases}\tag{3.1-3}$$

取函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}bx^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x^3$

如图 3.1 所示,作下列有界闭区域 $\mathscr{D}$

$$V\leqslant\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2$$

$$W_1=x\geqslant-\beta$$

$$W_2=y+ax\geqslant-\alpha\beta\qquad\beta>0$$

$\forall\,\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{D}$, 当 $t\geqslant t_0$, 今证 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 恒停留在 $\mathscr{D}$ 内。

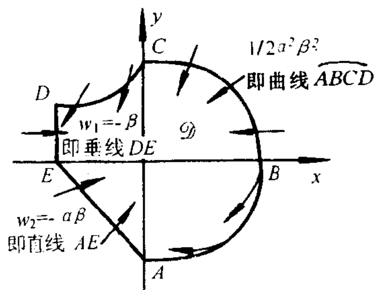


图 3-1

若不然,设解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 离开 $\mathscr{D}$,必与曲线 $\widehat{ABCD}$ 或直线 $\overline{AE},\overline{DE}$ 相交而穿出,因为 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.1\text{-}3)}=-\alpha y^2<0$,当 $y\neq0$,故 $\boldsymbol{x}$

(t)不能由$\widehat{ABCD}$曲线由里向外穿出。

在$\overline{DE}$上，因为 $y \geqslant 0$ 故

$$\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}t}\Big|_{x=-\beta} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{x=-\beta} = y > 0, \quad 当\ y \neq 0$$

轨线的走向是从左到右，即从外到里。

在$\overline{AE}$上，因为 $x \leqslant 0$ 且 $-x = \beta + \dfrac{y}{\alpha} < \beta$ 　　当 $y \neq 0$

故当 $0 < \beta < b$ 时有

$$b > \beta > -x \quad b + x > 0 \quad 当\ y \neq 0$$

从而$\dfrac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t} = -x(b+x) > 0$　当 $y \neq 0$。

因此，轨线走向也是由外向里的，于是解 $x(t, t_0, x_0)$一直停留在$\mathscr{D}$中。

又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\alpha y^2$$

故当$0 < \beta < b$，　$x(t) \to 0, t \to \infty$，从而(3.1-3)式的零解渐近稳定。

LaSalle 不变原理推广了自治系统的 Ляпунов 渐近稳定性定理。与 Красовский-Барбашин 定理比较，前者理论上更一般，且不要求 $V(x)$定号，只要求$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$常负，如果 $M = \{0\}$，则 $x = 0$ 是渐近稳定的，且给出了吸收区域估计，但一般地，最大不变集的结构可能十分复杂，条件的验证不如 Красовский-Барбашин 定理条件来得方便。

§2　比较原理[25,36,37,179]

Ляпунов 直接法的基本定理及其各种推广解决了很多实际问题。但有些问题却很棘手，如果结合其它方法，则可相得益彰。其中理论上最完善，应用上最方便的是比较方法，或称为比较原理，先从一个简例来说明这种方法的思想实质。

例如系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=(-2+4\cos t)x_1^2+(\cos t)x_2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=(\sin t)x_1+(-2+4\cos t)x_2\end{cases}\tag{3.2-1}$$

如果令 $V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.2\text{-}1)}=(-2+4\cos t)x_1^2+(\cos t)x_1x_2+(\sin t)x_1x_2+(-2+4\cos t)x_2^2$$

显然$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是变号的。

因此,不能用前面讲过的任何方法来判定稳定性,但如果变为微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant(-2+4\cos t)x_1^2+x_1^2+x_2^2+(-2+4\cos t)x_2^2\leqslant(-1+4\cos t)V$$

则有 $$V(t)\leqslant V(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(-1+4\cos t)\mathrm{d}t}\to 0\quad(\text{当 } t\to\infty)\tag{3.2-2}$$

由于可知(3.2-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 渐近稳定,

而 $$V(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(-1+4\cos t)\mathrm{d}t}$$

恰恰是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(-1+4\cos t)V$$

$$V(t)=V(t_0)$$

的解。

这个例子启发我们,用 Ляпунов 函数,结合微分不等式可得到关于稳定性的许多更一般的结果,下面介绍一般的比较方法,先叙述两条引理。

引理 3.2.1 设 $\varphi(t)\in C[I,R]$ 满足

$$D^+\varphi(t)\leqslant f(t,\varphi(t))\qquad[D_+\varphi(t)\geqslant f(t,\varphi(t))]\tag{3.2-3}$$

可设 $\overline{\Phi}(t)[\underline{\Phi}(t)]$为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \tag{3.2-4}$$

过$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$的右行最大[最小]解,则成立下列不等式:

$$\varphi(t) \leqslant \overline{\Phi}(t) \qquad [\varphi(t) \geqslant \underline{\Phi}(t)] \qquad t \geqslant t_0 \tag{3.2-5}$$

引理 3.2.2 设 $f(t,\boldsymbol{x})$在平面区域 $R:|t-t_0|\leqslant a,|x-x_0|\leqslant b$ 上连续,且关于 x 单调不减;可设 $\varphi(t)$是$|t-t_0|\leqslant a$ 上的连续函数,且$(t,\varphi(t))\in R$ 若$\varphi(t)$ 满足积分不等式

$$\varphi(t)\leqslant x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_0+h)$$

$$[\varphi(t)\geqslant x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))]\mathrm{d}\tau$$

则有 $\varphi(t)\leqslant\overline{\Phi}(t) \qquad [\varphi(t)\geqslant\underline{\Phi}(t)] \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_0+h)$
其中 $\overline{\Phi}(t),\underline{\Phi}(t)$是微分方程(3.2-4)的过始值$(t_0,x_0)$的定义在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 上的最大[最小]解。

而 $$h=\min(a,\frac{b}{m}),\ m=\max_{(t,\boldsymbol{x})\in R}|f(t,\boldsymbol{x})|$$

这两个引理的证明见文献[35、36]。

考虑 n 维非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{3.2-6}$$

$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R^n]$ 保证解的唯一性 $\boldsymbol{f}(t,0)\equiv 0$。

同时考虑纯量比较方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g(t,w) \tag{3.2-7}$$

其中 $$g\in C[I\times R^+,R^+] \qquad g(t,0)\equiv 0$$

(3.2-7)式的初始扰动 $w_0>0$。

定理 3.2.1 [比较原理[25]]若存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R]$, V 关于$\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件且满足

$$D^+V|_{(3.2\text{-}6)}\leqslant g(t,V)$$

则有以下结论。

1) (3.2-7)式的零解稳定蕴涵(3.2-6)式的零解稳定;

2) 若 V 还具有无穷小上界,则(3.2-7)式的零解一致稳定蕴涵(3.2-6)式的零解一致稳定;

3) (3.2-7)式的零解渐近稳定,蕴涵着(3.2-6)式的零解渐近稳定;

4) 若 V 还有无穷小上界,则(3.2-7)式的零解一致渐近稳定,蕴涵(3.2-6)式的零解一致渐近稳定;

5) 若存在 $a>0,b>0$ 使得

$$a\|\boldsymbol{x}\|^{b}\leqslant V(t,\boldsymbol{x})$$

且 V 有无穷小上界,则(3.2-7)式的零解指数稳定,蕴涵(3.2-6)式的零解指数稳定;

6) 若还存在 $\varphi,\psi\in KR$,使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\psi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

则(3.2-7)式的零解全局一致渐近稳定,蕴涵(3.2-6)式的零解全局一致渐近稳定。

证: 1) 存在 $\varphi\in K$,.使得 $\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})$

$\forall\varepsilon>0,\forall t_0\in I,\exists\delta^*(t_0,\varepsilon)>0$, 当 $0<w_0<\delta^*$, 有

$$w(t,t_0,w_0)<\varphi(\varepsilon)$$

可因 $V(t,\boldsymbol{x})$连续, $V(t,0)=0$, 故对上述的 δ^*, $\exists\delta(t_0,\varepsilon)$, 当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时,有

$$0<V(t_0,\boldsymbol{x}_0)<\delta^*$$

由
$$D^+V(t)\mid_{(3.2\text{-}6)}\leqslant g(t,V(t))$$
$$V(t_0,\boldsymbol{x}_0)=V_0$$

和比较方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=g(t,w)$$
$$w(t_0)=w_0=V_0$$

由引理 3.2.1 有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(t,t_0,w_0) < \varphi(\varepsilon)$$

从而 $$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0$$

故(3.2-6)式的零解稳定。

2) 由条件知存在 $\varphi,\psi \in R$ 使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \psi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

$\forall \varepsilon > 0$，对应有 $\varphi(\varepsilon)>0$ 对此 $\varphi(\varepsilon)$，$\exists \delta(\varepsilon)>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$，就有 $$w_0 \overset{\text{def}}{=} V(t_0,\boldsymbol{x}_0) \leqslant \psi(\|\boldsymbol{x}_0\|) < \psi(\delta(\varepsilon)) = \delta^*$$

从而当 $0<w_0<\delta^*$，就有

$$w(t,t_0,w_0) < \varphi(\varepsilon)$$

类似于1)的证明有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(t,t_0,w_0) < \varphi(\varepsilon), \quad t \geqslant t_0$$

故当 $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$，有 $\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$，(3.2-6)的零解一致稳定。

3) 此时，结论1)成立，适当地选取 $\sigma(t_0)>0$，当 $0<w_0<\sigma(t_0)$ 由比较方程和引理3.2.1有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(t,t_0,w_0) \to 0 (\text{当 } t \to +\infty)$$

这就意味着 $\boldsymbol{x}(t) \to 0$（当 $t \to +\infty$），故(3.2-6)式的零解渐近稳定。

4) 条件蕴涵结论2)成立，又因比较方程的零解一致渐近稳定，故 $\forall \varepsilon>0$，$\forall t_0 \in I$，$\exists \eta>0$ 和 $T(\varepsilon)>0$，当 $0<w_0<\eta$，$t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ 有

$$0 < w(t,t_0,w_0) < \varphi(\varepsilon)$$

今选取 $\delta_0, w_0, \boldsymbol{x}_0$ 使之满足

$$w_0 = V(t_0,\boldsymbol{x}_0) \leqslant \psi(\|\boldsymbol{x}_0\|) < \psi(\delta_0) \leqslant \eta$$

由比较引理3.2.1有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(t,t_0,w_0) < \varphi(\varepsilon)$$

从而 $$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \qquad (\text{当 } t \geqslant t_0 + T(\varepsilon))$$

即(3.2-6)式的零解一致渐近稳定。

5) 由于(3.2-7)式的零解指数稳定，故存在 $\alpha>0$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \eta(\varepsilon)>0$，当 $0<w_0<\eta(\varepsilon)$，(3.2-7)式的解有

$$w(t,t_0,w_0)\leqslant \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad 当(t\geqslant t_0)$$

今取 $\quad w_0=V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\leqslant\psi(\|\boldsymbol{x}_0\|)<\psi(\delta(\varepsilon))\leqslant\eta(\varepsilon)$

由引理 3.2.1 有

$$a(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|)^b\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant w(t,t_0,w_0)\leqslant \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$$

即 $$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant(\varepsilon/a)^{1/b}e^{-\frac{\alpha}{b}(t-t_0)}$$

从而(3.2-6)式的零解指数稳定。

6) 在此条件下,2)的条件和结论均成立,故(3.2-6)式的零解一致稳定。

今证(3.2-6)式的解一致有界, $\forall r>0$ 对应 $\psi(r)>0$, 因为(3.2-7)式的关于 $w_0>0$ 的解一致有界,故当 $w_0<\psi(r)$, $\exists\tilde{\beta}(r)>0$, 使得

$$w(t,t_0,w_0)<\tilde{\beta}(r)$$

故当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<r$ 时有

$$w_0=r(t_0,\boldsymbol{x}_0)\leqslant\psi(\|\boldsymbol{x}_0\|)<\psi(r)$$

由引理 3.2.1 有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant w(t,t_0,w_0)<\tilde{\beta}(r)$$

因为 $\varphi\in KR$,故有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varphi^{-1}(\tilde{\beta}(r))\overset{\text{def}}{=}\beta(r)$$

从而(3.2-6)式的零解一致有界。

再证(3.2-6)式零解的一致吸引。

$\forall\varepsilon>0,\alpha>0,t_0\in I$ 有 $\varphi(\varepsilon)>0,\psi(\alpha)>0,t_0\in I$ 对此 ε, α, $\exists T(\varepsilon,\alpha)>0$ 当 $0<w_0<\psi(\sigma)$ $t\geqslant\varepsilon_0+T(\varepsilon,\alpha)$ 时有

$$w(t,t_0,w_0)<\varphi(\varepsilon)$$

今取 $\quad w_0=V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\leqslant\varphi(\|\boldsymbol{x}_0\|)<\varphi(\alpha)$

由比较引理便有

$$\varphi\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant w(t,t_0,w_0)<\varphi(\varepsilon)$$

故知 $\quad$ 当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\alpha$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon \qquad (当\ t\geqslant t_0+T(\varepsilon,\alpha))$$

从而(3.2-6)式的零解全局一致渐近稳定。

定理 3.2.2 若 $f(t,x)\in C[G_H,R^n]$，$g(t,u)\in C[I\times B_H,R_+]$，其中 $B_H=[0,H]$，若在 G_H 上存在具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$D_+ V|_{(3.2\text{-}6)} \geqslant g(t,V)$$

则(3.2-7)式的零解不稳定，蕴涵(3.2-6)式的零解不稳定。

证：因为 $V(t,x)$ 具有无穷小上界，故存在 $\varphi\in K$，使得

$$\varphi(\|x\|)\geqslant V(t,x)$$

又因(3.2-7)式的零解不稳定，故 $\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall\,\delta>0$，$\forall\,\tilde{t}_0\in I$，$\exists\,t_1>\tilde{t}$ 及 $\exists\,w_0>0$，$w_0<\delta$，使得

$$w(t_1,\tilde{t}_0,w_0)\geqslant\varphi(\varepsilon_0)$$

今取
$$w_0=V(\tilde{t}_0,x_0)$$

于是由引理 3.2.1，有

$$\varphi(\|x(t_1)\|)\geqslant V(t_1,x(t_1))\geqslant w(t_1,\hat{t}_0,w_0)\geqslant\varphi(\varepsilon_0)$$

从而
$$\|x(t_1)\|\geqslant\varepsilon_0$$

即(3.2-6)式零解不稳定。

比较原理优越性是放弃了$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$负定、半负定这些要求；缺点是通过对$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的不等式的放大或缩小凑成一个关于$(t,V)$的函数$g(t,V)$，有时不太可能。若可能，则要丧失许多信息，为了充分发挥比较法的优点，克服缺点，人们还在不断发展这种方法。

Ляпунов 直接法，也称为 V 函数法，它远不只用于研究 Ляпунов 意义下的稳定，还可以用于研究以下的内容，下面逐一介绍。

§3 解的有界性[27,29]

仍考虑
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{3.3-1}$$

其中 $f(t,x)\in C[I\times R^n,R^n]$，保证解的唯一性，但不必假设

$f(t,0)\equiv 0$。

定义 3.3.1 称(3.3-1)式的每一个解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$有界，若存在常数 $\beta(t_0,\boldsymbol{x}_0)>0$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \beta(t_0,\boldsymbol{x}_0), \qquad \forall\, \boldsymbol{x}_0 \in R^n$$

若 $\forall\,\alpha>0, \forall\, t_0\in I, \exists\,\beta(\alpha)>0, \quad \forall\, x_0 \in S_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \alpha\}$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \beta(\alpha) \qquad (t \geqslant t_0)$$

则称(3.3-1)式的解一致有界。

记 $\quad \Omega_k^c \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x}\ \|\boldsymbol{x}\| \geqslant k>0\} \qquad$ 当 $k=0, \Omega_k^c \equiv R^n$

定理 3.3.1 若在 $I\times\Omega_k^c$上存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})$和 $\varphi\in KR$ 使得

$$V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (t.\boldsymbol{x}) \in I \times \Omega_k^c$$

和

$$D^+ V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \tag{3.3-2}$$

则(3.3-1)式的任意解是有界的。

证：$\forall\, \boldsymbol{x}_0 \in R^n$，若 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$恒在 Ω_k 内，则显然是有界的，若存在 $t_1>t_0$，使 $\boldsymbol{x}(t_1 t_0,\boldsymbol{x}_0)$在 Ω_k^c内，则令 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，于是由(3.3-2)式有

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}_1) \leqslant V(t_1,\boldsymbol{x}_1)$$

故 $\quad \|\boldsymbol{x}(t,t_1,\boldsymbol{x}_1)\| \leqslant \varphi^{-1}(V(t_1,\boldsymbol{x}_1)) \overset{\text{def}}{=} \beta(t_1,\boldsymbol{x}_1) = c$

从而(3.3-1)式的解是有界的。

例 1
$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} + p(t)\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + q(t)g(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3.3-3}$$

其中 $\quad p(t)\in C[I,R] \quad q(t)\in C^1[I,R] \quad g(\boldsymbol{x})\in C[R,R]$

且满足

1) $0<q(t)\leqslant M$

2) $p(t)\geqslant -\dfrac{\dot{q}(t)}{2q(t)}$

3) $\displaystyle\int_0^{\pm\infty} g(x)\mathrm{d}x = +\infty$

则(3.3-3)式的任意解 $x(t)$和它的一阶导数 $\dot{x}(t)$都是有界的。

证:将(3.3-3)式化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-p(t)g-q(t)g(x)\end{cases}\tag{3.3-4}$$

作
$$V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{y^2}{2q(t)}$$

根据条件 1)有

$$V(t,x,y)\geqslant\int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{y^2}{2M}$$
$$=W(x,y)\to+\infty(\text{当 } x^2+y^2\to\infty)$$

故存在 $\varphi\in KR$,使得

$$V(t,x,y)\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)$$

$$D^+V(t,x(t),y(t))=g(x(t))y(t)+\frac{y(t)}{q(t)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{y^2\dot{q}(t)}{2q^2(t)}$$
$$=g(x(t))y(t)-\frac{y(t)}{q(t)}\{p(t)y(t)+q(t)g(x(t))\}$$
$$-\frac{y^2(t)\dot{q}(t)}{2q^2(t)}=-\frac{y^2(t)}{q(t)}\left[p(t)+\frac{\dot{q}(t)}{2q(t)}\right]\leqslant0$$

故 $x(t)$和 $y(t)=\dot{x}(t)$在 I 上有界。

定理 3.3.2 若在 $I\times\Omega_k^c$ 上存在 $V(t,\boldsymbol{x})$满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$, $\varphi_1,\varphi_2\in KR$

2) $D^+V(t,\boldsymbol{x})|_{(3.3\text{-}1)}\leqslant0$

则(3.3-1)式的解是一致有界的。

证: $\forall\alpha>0$ 选取 $\beta(\alpha)$使 $\varphi_2(\alpha)<\varphi_1(\beta)$,故
$\forall\boldsymbol{x}_0\in S_\alpha=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\alpha\}$,由条件有

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)$$
$$\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}_0\|)\leqslant\varphi_2(\alpha)<\varphi_1(\beta)$$

故有
$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\beta$$

其中 β 不依赖于 $t_0,\boldsymbol{x}_0$, 故解一致有界。

例 2 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + f(x,\dot{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + g(x) = p(t) \tag{3.3-5}$$

设 1) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),g(\boldsymbol{x})$ 对所有变元连续;

2) $p(t)$ 在 I 上连续,且$\int_0^{+\infty} |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$;

3) $f(x,y) \geqslant 0$ 对一切 x,y 成立;

4) $G(\boldsymbol{x}) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq 0$ 且当 $|\boldsymbol{x}| \to \infty, G(\boldsymbol{x}) \to \infty$。

则(3.3-5)式的解一致有界。

证:先化为方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)y - y(x) + p(t) \end{cases} \tag{3.3-6}$$

取
$$V(t,x,y) = \sqrt{y^2 + 2G(x)} - \int_0^t |p(t)| \mathrm{d}s$$

当 $x^2 + y^2 \geqslant k^2 \gg 1$ 时有

$$\frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 2G(\boldsymbol{x})} \leqslant V(t,x,y) \leqslant \sqrt{y^2 + 2G(\boldsymbol{x})}$$

且
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.3\text{-}6)} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{y}^2 + 2G(\boldsymbol{x})}}\{g(x)y$$
$$+ y[-f(x,y)y - g(x) + p(t)]\} - |p(t)| \leqslant 0$$

故由定理 3.3.2 知(3.3-5)式的解一致有界。

下面介绍关于一致有界性的一个结果。

定理 3.3.3 设存在严格单调递增序列$\{r_k\}$,$r_k \to \infty$,当 $k \to \infty$,和正序列$\{\eta_k\}$,及无穷大正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$使在下列区域

$$\mathscr{D}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid 0 < r_k - \eta_k \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant r_k\}$$
$$k = 1,2,\cdots$$

上满足 $\quad D^+ V(t,\boldsymbol{x})|_{(3.3\text{-}1)} \leqslant 0$

则(3.3-1)式的解是一致有界的。

证: $\forall t_0 \in I, \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall \boldsymbol{x}_0 \in S_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \alpha\}$

要证明 $\exists \beta(\alpha) > \alpha > 0$ 使得 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \beta(\alpha)$

因为 $\boldsymbol{x}_0 \in S_\alpha$,当$\|\boldsymbol{x}_0\| < \alpha, 0 < t - t_0 \ll 1, \|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| < \alpha$

用反证法,设 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$无界,必存在 t^*使得

$\|\boldsymbol{x}(t^*,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\gg 1$,由于 $V(t,\boldsymbol{x})$ 是无穷大正定函数,故 $V(t^*,\boldsymbol{x}(t^*,t_0,\boldsymbol{x}_0))\gg 1$,由 $V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))$ 为 t 的连续函数,由连续函数的介值定理知存在 $t_0<t_1<t_2<t^*$ 和 $k_0(\alpha)$,使得

$$V(t_1,\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = r_{k_0} - \eta_k, \qquad V(t_2,\boldsymbol{x}(t_2,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = r_{k_0}$$

但在 $\mathscr{D}_{k_0}$内 $\quad D^+ V|_{(3.1\text{-}1)}\leqslant 0$

故有

$$r_{k_0} = V(t_2,\boldsymbol{x}(t_2,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant V(t_1,\boldsymbol{x}(t_1,t_0,\boldsymbol{x}_0)) = r_{k_0} - \eta_{k_0}$$

这是矛盾的,故 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是有界的,且有

$$V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant k_0(\alpha)$$

因为 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为无穷大正定函数,故存在 $\varphi\in KR$ 使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant k_0(\alpha)$$

从而 $$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \varphi^{-1}(k_0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\alpha)$$

即(3.3-1)式的任意解一致有界。

推论 3.3.1 设(3.3-1)式为自治系统,即 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,且存在严格单调递增正数序列$\{r_k\}$ $r_k\to+\infty$ 和正数序列$\{\eta_k\}$及无穷大正定函数 $V(\boldsymbol{x})$使得在

$$\mathscr{D}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid 0 < r_k - \eta_k \leqslant V(k) \leqslant r_k\} \quad k = 1,2,\cdots$$

上满足 $$D^{+1} V(\boldsymbol{x})|_{(3.3\text{-}1)} \leqslant 0$$

则(3.3-1)式的解有界。

例 3
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + \frac{\sqrt{2}}{2}x(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y + \frac{\sqrt{2}}{2}y(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$$

作 $\quad V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,它是无穷大正定函数。

取 $\quad r_k=2k\pi+\frac{7\pi}{4} \qquad \eta_k=\frac{\pi}{2} \qquad$ 则 $r_k-\eta_k=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x^2+y^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2)^2\sin(x^2+y^2)$$

$$=(x^2+y^2)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)+1\right]\leqslant 0$$

$$\text{当}(x,y)\in\ \mathscr{D}_k\stackrel{\text{def}}{=}\{(x,y)\mid r_k-\eta_k\leqslant V(x,y)\leqslant r_k\}$$

故例 3 的任何解有界，但$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$在$R^2$上是变号函数。可见对有界性而言，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$半负定的条件不是必要的。

§4　系统的耗散性[27,33]

本节利用 Ляпунов 函数来研究系统的耗散性，这是一种很重要的性质，在生态系统、神经网络系统中有重要应用，仍考虑(3.3-1)式。

定义 3.4.1　若存在常数$\beta>0$对(3.3-1)式的任意解$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，存在$T(t_0,\boldsymbol{x}_0)>0$，当$t\geqslant t_0+T(t_0,\boldsymbol{x}_0)$时有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\beta$$

则称(3.3-1)式为耗散系统，也称(3.3-1)式的解对界限B毕竟有界。

定义 3.4.2　若存在常数$\beta>0,\forall t_0\in I,\forall\alpha>0,\forall\boldsymbol{x}_0\in S_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|<\alpha\}$，$\exists\, T(\alpha)>0$。当$t\geqslant t_0+T(\alpha)$时，解$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$满足

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\beta$$

则称(3.3-1)是一致耗散的，也称(3.3-1)式的解对界限B毕竟一致有界。

有些著作中把毕竟有界、毕竟一致有界分别称为最终有界、最终一致有界。

耗散性可视为某一个集合的吸引性，请读者给出几何解释，以加深直观形象理解。

定理 3.4.1 设在 $I\times\Omega_H^c$上存在函数 $V(t,x)$ 满足

1) $\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)$ 其中 $\varphi_1,\varphi_2\in KR$

2) $D^{+1}|_{(3.3\text{-}1)}\leqslant-\psi(\|x\|)$ $\psi\in K$

则(3.3-1)式是一致耗散的,即对某 $\beta^*>H$ 是毕竟一致有界的。

证:$\forall x_0\in S_\alpha$ (其中 $\alpha\geqslant H$),选取 η 使得

$$\varphi_2(\alpha)<\varphi_1(\eta)$$

于是由条件有

$$\varphi_1(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x_0)$$
$$\leqslant\varphi_2(\|x_0\|)\leqslant\varphi_2(\alpha)<\varphi_1(\eta)$$

从而 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\eta$ $(t\geqslant t_0)$ 即(3.3-1)式的解一致有界。

今选取 $\beta>H,\forall\alpha>\beta,\ \forall x_0\in S_\alpha$,必存在 $t_1\geqslant t_0$使

$$\|x(t_1,t_0,x_0)\|<\beta$$

若不然,则对一切 $t\geqslant t_0$有

$$\beta\leqslant\|x(t,t_0,x_0)\|\leqslant\alpha$$

令 $$c^*=c(\beta)=\inf_{\beta\leqslant\|x\|\leqslant\alpha}\Psi(\|x\|)>0$$

则有 $$V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant V(t_0,x(t_0,t_0,x_0))$$
$$-c^*(t-t_0)\to-\infty(t\to\infty)$$

这不可能,从而 $\|x(t_1,t_0,x_0)\|<\beta$。

再选取 β^*满足 $\beta<\beta^*\leqslant\alpha$,且选取 $T(\alpha)=\dfrac{\varphi_2(\alpha)-\varphi_1(\beta^*)}{c^*}>0$

则当 $t\geqslant t_0+T(\alpha)$ 时有

$$\varphi_1(\|x(t)\|)\leqslant V(t,x(t,t_0,x_0))$$
$$\leqslant V(t_0,x(t_0,t_0,x_0))-c^*\frac{\varphi_2(\alpha)-\varphi_1(\beta^*)}{c^*}$$
$$\leqslant\varphi_2(\|x_0\|)-\varphi_2(\alpha)+\varphi_1(\beta^*)$$
$$\leqslant\varphi_2(\alpha)-\varphi_2(\alpha)+\varphi_1(\beta^*)=\varphi_1(\beta^*)$$

即 $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta^*$ 这就证明了(3.3-1)式是一耗散系统，对界 β^* 是毕竟一致有界的。

例 1

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - x^3 - xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - x^2 y - y^3 \end{cases} \tag{3.4-1}$$

易证，这是一个耗散系统，事实上，取

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}\Big|_{(3.4-1)} &= x^2 + y^2 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 \\ &= x^2 + y^2 - (x^2+y^2)^2 = (x^2+y^2)[1-(x^2+y^2)] \\ &< 0 \qquad \text{当} \qquad x^2 + y^2 > 1 \end{aligned}$$

满足定理 3.4.1 条件，故(3.4-1)式是一耗散系统。

例 2　验证

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + \dfrac{1}{2}y - x\left(x^2 + y^2 - \dfrac{2t}{1+t^2}\sin t\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - y\left(x^2 + y^2 - \dfrac{2t}{1+t^2}\sin t\right) \end{cases} \tag{3.4-2}$$

为一耗散系统。

作 $V = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}\Big|_{(3.4-2)} &= 2x^2 + y^2 - (2x^2+y^2)\left(x^2+y^2-\frac{2t}{1+t^2}\sin t\right) \\ &\leqslant -(2x^2+y^2)\left(x^2+y^2-1-\frac{2t}{1+t^2}\sin t\right) \\ &\leqslant -(2x^2+y^2)(x^2+y^2-2) < 0 \\ &\text{当} \qquad x^2+y^2 > 2 \end{aligned}$$

故(3.4-2)是一耗散系统。

下面介绍日本数学家 Yoschizawa[27] 关于耗散性的一般结果，这种用几个 Ляпунов 函数，用不同的 V 函数控制不同的状况变量的方法也是对 Ляпунов 直接法的一种发展。

定理 3.4.2 若在 I, $\|x\|<\infty$, $\|y\|\geqslant k>0$ 上存在 $V_1(t,x,y)$ 满足下列条件 1)、2)。

1) $\varphi_1(\|y\|)\leqslant V_1(t,x,y)\leqslant\psi_1(\|y\|)$ $\varphi_1,\psi_1\in KR$。

2) $D^+V_1|_{(3.3\text{-}1)}\leqslant -g_1(\|y\|)$ 这里 g_1 为正值连续函数,又假设对每个 $M\leqslant k$, 存在定义在 I, $\|x\|\geqslant k_1(M)$, $\|y\|\leqslant M$ 上的 $V_2(t,x,y)$ 满足下列条件 3)、4)。

3) $\varphi_2(\|x\|)\leqslant V_2(t,x,y)\leqslant\psi_2(\|x\|)$ $g_2,\psi_2\in KR$。

4) $D^{+1}V_2|_{(3.3\text{-}1)}\leqslant 0$。

此外,还假设 B 是满足 $\psi_1(k)<\varphi_1(B)$ 的数,且存在定义于 $T<t<\infty$, $\|x\|\geqslant k_2>0$, $\|y\|\leqslant B$ 上的函数 $V_3(t,x,y)$ 满足下列条件。

5) $\varphi_3(\|x\|)\leqslant V_3\leqslant\psi_3(\|x\|)$ $\varphi_3,\psi_3\in K$。

6) $D^+V_3|_{(3.3\text{-}1)}\leqslant -g_3(\|x\|)$,这里 g_3 为正值连续函数,则 (3.3-1)式的解一致耗散。

证:首先证明一致有界,对于满足 $k<\alpha$ 的 α,考虑(3.3-1)式的解

$$x(t)\overset{\text{def}}{=}x(t,t_0,x_0,y_0)\qquad y(t)\overset{\text{def}}{=}y(t,t_0,x_0,y_0)\quad \text{这里}$$

$t_0\geqslant 0$, $\|x_0\|\leqslant\alpha$, $\|y_0\|\leqslant\alpha$, 选取 $\beta(\alpha)>\alpha>0$ 使得

$$\psi_1(\alpha)<\varphi_1(\beta)$$

今证 $$\text{当 } t\geqslant t_0,\text{有 } \|y(t)\|<\beta(\alpha)\tag{3.4-3}$$

成立,若不然,即(3.4-3)式不成立,设在某 t_1 有 $\|y(t_1)\|=\beta(\alpha)$,此时,由连续函数介值定理知,存在 t_2 和 t_3, $t_0\leqslant t_2<t_3\leqslant t_1$ 使得

$$\|y(t_2)\|=\alpha\qquad \|y(t_3)\|=\beta$$

故对于 $t_2\leqslant t<t_3$有

$$\alpha<\|y(t)\|<\beta$$

在 $t_2\leqslant t<t_3$上考虑 $V_1(t,x(t),y(t))$有

$$\begin{aligned}\varphi_1(\beta)&\leqslant V_1(t_2,x(t_3),y(t_3))\\&\leqslant V_1(t_2,x(t_2),y(t_2))\leqslant\psi_1(\alpha)<\varphi_1(\beta)\end{aligned}$$

矛盾,故 $\| y(t) \| < \beta(\alpha), t \geqslant t_0$ 成立。

令 $\alpha_1(\alpha) = \max\{\alpha . K(\beta(\alpha))\}$,考虑定义在 $I, \| x \| \geqslant k_1(\beta), \| y \| \leqslant \beta$ 上的函数 $V_2(t, x, y)$,选取 $\beta_1 \beta(\alpha_1) > \alpha_1 > 0$ 使得

$$\psi_2(\alpha_1) < \varphi_2(\beta_1)$$

今证 $\| x(t) \| < \beta_1(\alpha)$, $\| y(t) \| < \beta(\alpha)$, 当 $t \geqslant t_0$ (3.4-4)

若不然,设在某 t_1^* 有

$$\| x(t_1^*) \| = \beta_1$$

则存在 $t_1^*, t_3^*, t_0 \leqslant t_2^* < t_3^* \leqslant t_1^*$ 使得

$$\| x(t_2^*) \| = \alpha_1, \quad \| x(t_3^*) \| = \beta_1$$

且对于 $t_2^* \leqslant t \leqslant t_3^*$ 有

$$\alpha_1 \leqslant \| x(t) \| \leqslant \beta_1, \quad \| y(t) \| < \beta(\alpha)$$

在 $t_2^* \leqslant t \leqslant t_3^*$ 上考虑 $V_2(t, x(t), y(t))$,则有

$$\varphi_2(\beta_1) \leqslant V_2(t_3^*, x(t_3^*), y(t_3^*)) \leqslant V_2(t_2^*, x(t_2^*), y(t_2^*))$$
$$\leqslant \psi_2(\alpha) < \varphi_2(\beta)$$

矛盾,故(3.4-4)式成立,因此(3.3-1)式的解一致有界。

其次证明系统(3.3-1)一致耗散。

现证:存在 $\tilde{t}_1 \geqslant t_0$使得 $\| y(\tilde{t}_1) \| < k$ (3.4-5)

若不然设 $\| y(t) \| > k \ (t \geqslant t_0)$, 故存在 $\lambda(\alpha) > 0$, 使当 $\| x \| < \infty$ 和 $k \leqslant \| y \| \leqslant \beta(\alpha)$ 时,有

$$D^{+1} V_1 |_{(3.3\text{-}1)} \leqslant -\lambda(\alpha)$$

从而有 $V_1(t, x(t), y(t)) - V_1(t_0, x_0, y_0) \leqslant -\lambda(\alpha)(t - t_0)$

若 $t > t_0 + T_1(\alpha)$ 其中

$$T_1(\alpha) = \frac{\psi_1(\alpha) - \varphi_1(k)}{\lambda(\alpha)} \qquad \text{则有}$$

$$\varphi_1(k) \leqslant V_1(t, x(t), y(t)) \leqslant V_1(t_0, x_0, y_0) - \lambda(\alpha)(t - t_0)$$
$$< \psi_1(\alpha) - \lambda(\alpha) \frac{\psi_1(\alpha) - \varphi_1(k)}{\lambda(\alpha)} = \varphi_1(k)$$

矛盾,故(3.4-5)式成立。

由 B 的取法可知

$$\psi_1(k) < \varphi_1(B) < \psi_1(B)$$

故 $k<B$ 可对所有的 $t \geqslant \tilde{t}_1$ 有

$$\| \boldsymbol{y}(t) \| < \beta$$

从而当 $t \geqslant t_0 + T_1(\alpha)$ 时有 $\quad \| \boldsymbol{y}(t) \| < \beta$

令 $k_2^* = \max(B, k_2)$，此时，若 $\| \boldsymbol{x}_0^* \| \leqslant k_2^*$，$\| \boldsymbol{y}_0^* \| \leqslant k_2^*$，则对所有 $t \geqslant t_0$ 有

$$\| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0^*, \boldsymbol{y}_0^*) \| < \beta_1(k_2^*) \tag{3.4-6}$$

如上面所证，对所有的 $t \geqslant t_0$ 有

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| < \beta_1(\alpha)$$

及对所有的 $t \geqslant t_0 + T_1(\alpha)$有

$$\| \boldsymbol{y}(t) \| < B$$

特别当 $\quad t \geqslant t_0 + T_1(\alpha) + T$ 时有 $\| \boldsymbol{y}(t) \| < B$

今证：存在 $\tilde{t}_1^* \geqslant t \geqslant t_0 + T_1(\alpha) + T$ 使得

$$\| \boldsymbol{x}(t_1^*) \| < k_2^* \tag{3.4-7}$$

若不然，设对所有的 $t \geqslant t_0 + T_1(\alpha) + T$ 有

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| \geqslant k_2^*$$

则对于 $k_2^* \leqslant \| \boldsymbol{x} \| \leqslant \beta_1(\alpha)$，$\quad \| \boldsymbol{y} \| \leqslant \beta$ 和 $t \geqslant T$，$\exists \lambda^*(\alpha) > \sigma$

使得 $$D^+ V_3 \leqslant -\lambda^*(\alpha)$$

从而 $$\begin{aligned} V_3(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) \leqslant\ & V_3(t_0, T_1(\alpha) \\ & + T, \boldsymbol{x}(t_0 + T_1(\alpha) + T), \boldsymbol{y}(t_0 + T_1(\alpha) + T) \\ & - \lambda^*(\alpha)(t - t_0 - T_1(\alpha) - T)) \end{aligned}$$

当 $t > t_0 + T_1(\alpha) + T + T_2(\alpha)$

这里 $$T_2(\alpha) = \frac{\psi_3(\beta_1(\alpha)) - \varphi_3(k_2^*)}{\lambda^*(\alpha)} > 0$$

就推出 $V_3<0$，矛盾，说明(3.4-7)式成立。

由(3.4-6)式和对所有 $t \geqslant t_1$ 有

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| < \beta_1(k_2^*)$$

因为 $\| x(t_1) \| \leqslant k_2^*$， $\| y(t_1) \| < \beta \leqslant k_2^*$，故当 $t \geqslant t_0 + T_1(\alpha) + T + T_2(\alpha)$

有
$$\| x(t) \| < \beta_1(k_2^*)$$

以及对 $t \geqslant t_0 + T_1(\alpha) + T$ 有
$$\| y(t) \| < B$$

令 $B^* = \beta_1(k_2^*)$，$T^*(\alpha) = T_1(\alpha) + T + T_2(\alpha)$，显然 $B \leqslant B^*$，$T_1(\alpha) \leqslant T^*(\alpha)$，故若 $\| x_0 \| \leqslant \alpha$，$\| y_0 \| \leqslant \alpha$ 及 $t_0 \geqslant 0$ 对一切 $t \geqslant t_0 + T^*(\alpha)$，有

$$\| x(t, t_0, x_0, y_0) \| < B^*, \quad \| y(t, t_0, x_0, y_0) \| < B^*$$

成立，从而(3.3-1)式是一耗散系统。

研究系统的有界性、耗散性，不仅本身有其理论意义，也是研究周期解的存在性，有效地应用 LaSalle 不变原理的前提，在生态数学中也有应泛的应用。

§5 系统的收敛性[22,33]

研究系统的耗散性，只要求解 $x(t, t_0, x_0)$ 最终进入 R^n 中的某一个紧集，但进入紧集之后的渐近行为却不清楚，紧集中有怎样的吸引子和不变集等信息都不详知，下面要进一步研究系统的收敛性，这是比耗散性更强的性质。

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t . x) \tag{3.5-1}$$

设 $I_t \overset{\text{def}}{=} (-\infty, +\infty)$，$f(t, x) \in C[I_t \times R^n, R^n]$，$f$ 关于 x 连续可微。

定义 3.5.1 (B.A.плщсс)称系统(3.5-1)式具有收敛性，若

1) (3.5-1)式所有解 $x(t, t_0, x_0)$ 在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上有定义；

2) 唯一存在于 I_t 上有定义的有界解 $\eta(t)$，且它是全局渐近稳定的，即 $x(t, t_0, x_0) \to \eta(t)$，当 $t \to +\infty$，$\forall x_0 \in R^n$。

显然，具有收敛性的系统必是一耗散系统。

如果(3.5-1)具有收敛性,且是一周期系统,

即 $$f(t+w,x)\equiv f(t,x)$$

则 $\boldsymbol{\eta}(t)$是唯一的全局稳定的周期解。

引理 3.5.1 设 $f(x)\in C^1[R^n,R^n]$

$$J_s(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(f'(x)+(f'(x))^T)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$$

为对称 Jacobi 矩阵,$\lambda(x)$和$\mu(x)$分别是它的最小最大特征值,则关于内积$((f(x+h)-f(x)),h)$,下面的估计式成立。

$$\lambda_m(h,h)\leqslant[(f(x+h)-f(x)),h]\leqslant\lambda_M(h,h) \tag{3.5-2}$$

式中 $\lambda_m=\inf\limits_{t\in[01]}\lambda(x+th)$, $\lambda_M=\sup\limits_{t\in[01]}\mu(x+th)$

证:设 $\xi=x+th$ $0\leqslant t\leqslant 1$ 则有

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\xi))\mathrm{d}t=\int_0^1 f'(\xi)h\mathrm{d}t$$

因此
$$((f(x+h)-f(x)),h)=\int_0^1(f'(\xi)h\mathrm{d}t,h)=\int_0^1(f'(\xi)h,h)\mathrm{d}t$$

因为 $(f'(\xi)h,h)=(J_s(\xi)h,h)$

故有 $(f'(\xi)h,h)\geqslant\lambda(\xi)(h,h)\geqslant\lambda_m(h,h)$

和 $(f'(\xi)h,h)\leqslant\mu(\xi)(h,h)\leqslant\lambda_M(h,h)$

从而估计(3.5-2)式成立。

引理 3.5.2 考虑微分方程组(3.5-1),设$\|x_0\|\leqslant R$ 和任意的 $t_0\in I_t$,当 t 增加时,所有解 $x(t,t_0,x_0)$进入柱体

$$Z\overset{\text{def}}{=}(I_t\times\Omega_k)\quad \Omega_k\overset{\text{def}}{=}\{x\,\|x\|\leqslant R\}$$

则微分方程组(3.5-1)存在一个解 $x=\eta(t)$,对所有 $t\in I_t$有定义,且完全含于此柱体内,即在整个 I_t 上有界。

证:考虑解 $y(t,t_p,y_0)$ 的管序 T_p,由初始条件

$$t_p\overset{\text{def}}{=}-p\quad(p=0,1,2\cdots)\ y_0\in S_0$$

如图 3-2 所示,因为 $y(t,t_p,y_0)\in T_p$,$t_p=-p$ 进入柱体 z 内且停留在里面,故 $y(t,t_p,y_0)$ 可向右无限延展。

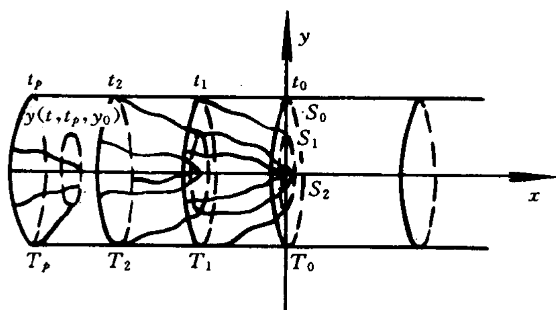


图 3-2

这里　$S_p = \{y(0,-p,y_0)\quad y_0 \in S_0\}$　$(p=0,1,2\cdots)$
是初始超平面 $t=0$ 与管 T_p 的截口。

由 $\boldsymbol{y}(t,-p,\boldsymbol{y}_0):\boldsymbol{y}_0 \to \boldsymbol{y}$ 是连续映射，它把紧集 S_0映射成 S_0。

参阅图 3-3 所示，因为解 $\boldsymbol{y}(t,-p,\boldsymbol{y}_0)$ 在 $t \geqslant -p$ 含在 z 内，则

$$\| \boldsymbol{y}(-p+1,-p,\boldsymbol{y}_0) \| < R$$

$\boldsymbol{y}(-p+1,-p,\boldsymbol{y}_0)$组成了 T_{p-1}的初始值 $t_0 = -(p-1)$，$\|\boldsymbol{y}_0\| \leqslant R$ 的一部分，故对于每个 $p \geqslant 1$，管 T_p 完全含在管T_{p-1}内，故对闭集组$\{S_p\}$有

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \cdots \supset S_{p-1} \cdots$$

由闭球套定理有唯一的一点，$\eta_0 \in \bigcap_{p=0}^{\infty} S_p$　且 $\|\eta_0\| \leqslant R$。

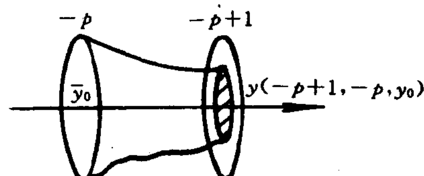


图 3-3

考虑过 $t=0$,　$\boldsymbol{x}_0 = \eta_0$的解 $\eta(t) = \boldsymbol{x}(t,0,\eta_0)$。

因为　　$\eta_0 \in S_p \quad (p = 1,2,\cdots)$

则存在

$$x(t,-p,\eta_0)\quad(t\geqslant -p,\|\eta_p\|\leqslant R)$$

使

$$x(0,-p,\eta_p)=\eta_0$$

由唯一性有

$$x(t,0,\eta_0)=x(t,-p,\eta_p)$$

故 $x(t,0,\eta_0)$在 $-p\leqslant t<+\infty$上有定义,由于 p 的任意性,解在 I_t 上有意义,且

$$\sup_t\|\eta(t)\|\leqslant R$$

定理 3.5.1 设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t)\tag{3.5-3}$$

的齐次方程组的解是一致渐近稳定的,且

$$\sup_{I_t}\|f(t)\|=M<\infty$$

这里 $A(t)\subset[I_t,R^{n^2}]$, $f(x)\in C[I_t,R^n]$

则方程(3.5-3)具有收敛性,且

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^t K(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

是方程(3.5-3)在 I_t 上唯一有界且全局渐近稳定的解。

证:设 $K(t,t_0)$ 为(3.5-3)式相应的齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x\tag{3.5-4}$$

的标准基本解矩阵,即

$$\frac{\mathrm{d}K(t,x_0)}{\mathrm{d}t}=A(t)K(t,t_0)$$

$$K(t_0,t_0)=E_{n\times n}$$

由于(3.5-4)式的解一致渐近稳定与指数稳定等价,即∃常数 $N>0,\alpha>0$ 使得

$$\|K(t,t_0)\|\leqslant Ne^{-\alpha(t-t_0)}\tag{3.5-5}$$

由常数变易法公式,知(3.5-3)式的通解为

$$x(t,t_0x_0)=K(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^t K(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令 $x_0=0$, $t_0\to-\infty$ 便得到

$$\boldsymbol{\eta}(t)=\int_{-\infty}^{t}K(t,\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因为 $\|\boldsymbol{\eta}(t)\|\leqslant N$

$$\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha(t-\tau)}\|\boldsymbol{f}(\tau)\|\mathrm{d}\tau\leqslant MN\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha},e^{\alpha t}=\frac{MN}{\alpha}<\infty$$

故 $\boldsymbol{\eta}(t)$是有意义的,又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t)}{\mathrm{d}t}&=f(t)+A(t)\int_{-\infty}^{t}K(t,\tau)\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{d}(\tau)\\&=\boldsymbol{f}(t)+A(t)\boldsymbol{\eta}(t)\end{aligned}$$

故 $\eta(t)$是(3.5-4)式的有界解。

唯一性。设 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$是(3.5-4)式的另一个在 I_t 上的有界解,则

$$\|\boldsymbol{\eta}_1(t)-\boldsymbol{\eta}(t)\|\leqslant N\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\|\boldsymbol{\eta}_1(t_0)-\boldsymbol{\eta}(t_0)\|$$

对于任何固定的 t,令 $t_0\to-\infty$, 便有

$$\|\boldsymbol{\eta}_1(t)-\boldsymbol{\eta}(t)\|\leqslant 0$$

故 $\boldsymbol{\eta}_1(t)\equiv\boldsymbol{\eta}(t)$

吸引性。设 $\boldsymbol{x}(t)$是(3.5-3)式的任意解,则 $\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)$满足

$$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)=K(t,t_0)[\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\eta}(t)]$$

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)\|\leqslant Ne^{-\alpha(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}(t_0)-\eta(t_0)\|\to 0\quad(\text{当 } t\to\infty)$$

故结论为真。

定理 3.5.2 若(3.5-1)式满足

1) $\sup\limits_{t}\|\boldsymbol{f}(t,0)\|=K<\infty$

2) $\lambda_M(t,\boldsymbol{x})\leqslant-\alpha<0$

其中 $\lambda_M(t,\boldsymbol{x})$为

$$J_s(t,\boldsymbol{x})\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{2}\{\boldsymbol{f}_x{}'(t,\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{f}_x{}'(t,\boldsymbol{x}))^T\}$$

的最大特征值,则(3.5-1)式具有收敛性。

证:作 $V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$

利用引理 3.5.1 便有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.5\text{-}1)}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{x}\right)=(\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$$

$$=((\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,0)),\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{f}(t,0),\boldsymbol{x})$$

$$+\|\boldsymbol{f}(t,0)\|\ \|\boldsymbol{x}\|\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2+k\|\boldsymbol{x}\|\leqslant 0$$

$$(当\ \|\boldsymbol{x}\|\geqslant\frac{k}{\alpha}\overset{\mathrm{def}}{=}R)$$

令 $R=\dfrac{K}{\alpha}$从 $\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant R$ 出发的所有解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$进入柱体内部,由引理 3.5.2 知在 I_t 上(3.5-1)式有定义的有界解 $\boldsymbol{\eta}(t)$。

设 $\boldsymbol{x}(t)$是(3.5-1)式由始值 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$确定的解。设

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)$$

令
$$V(\boldsymbol{y})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\eta})$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=((\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\eta})),\boldsymbol{y})\leqslant-\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=-2\alpha V$$

$$V(\boldsymbol{y}(t))\leqslant V(\boldsymbol{y}(t_0))\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)}$$

即$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\eta}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\eta}(t_0)\|\mathrm{e}^{-2\alpha(t-t_0)}\quad(t\geqslant t_0)$

故 $\boldsymbol{\eta}(t)$是全局指数稳定的,且是 I_t 上的唯一有界解,从而(3.5-1)式是收敛的。

§6 结构扰动下的 Robust 稳定性[3,27]

Ляпунов 稳定性,只考虑初始条件的扰动,由于一个数学模型描述一个实际动态系统,往往是近似的,为了使问题理想化,变得易于解决,不得不忽略一些次要因素。因此,考虑结构扰动下的 Robust 稳定性,更有实际意义,下面予以讨论。

考虑未被扰动的系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\tag{3.6-1}$$

这里　　$f \in C[G_H, R^n]$　$x \in R^n$　　$f(t,x) \equiv x$　当且仅当 $x=0$ 并考虑其扰动系统

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) + g(t,y) \qquad (3.6\text{-}2)$$

$g \in C[G_H, R^n]$，g 本质上是未知的，只知道它的界。

定义 3.6.1　称(3.6-1)式的零解是结构扰动下 Robust 稳定的，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \delta_2(\varepsilon) > 0$，当 $\| g(t,y) \| < \delta_1$，$\| y_0 \| \leqslant \delta_2$时，(3.6-2)式的解有估计式 $\| y(t,t_0,y_0) \| < \varepsilon, t \geqslant t_0$

苏联学者称此类稳定性为经常干扰下的稳定性，或持续摄动下的稳定性；日本学者则称为完全稳定性。其实，这正是当今稳定性领域中的所谓 Robust 稳定性的雏形，不防称为 Robust 稳定性。

定理 3.6.1　若存在函数 $V(t,x) \in C^1[G_H, R]$满足

1)　$\varphi_1(\| x \|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(\| x \|)$，　　$\varphi_1, \varphi_2 \in K$

2)　$D^+ V(t,x)|_{(3.6\text{-}1)} \leqslant -cV(t,x)$，　　$c > 0$ 为常数

3)　$\| V(t,x) - V(t,y) \| \leqslant k \| x - y \|$，$\forall x, y \in G_H$

则 (3.6-1)式的零解在结构扰动下 Robust 稳定。

证：$\forall \varepsilon > 0$，取 $0 < \delta_1(\varepsilon) < \delta$，使得 $\varphi_2(\delta_1) < \varphi_1(\varepsilon)$，且选取 $\delta > 0$ 充分小，使得

$$c\varphi_1(\delta_1) - k\delta > 0 \qquad (\delta < \delta_1)$$

下面证：当 $\| g(t,y) \| < \delta$，　　$\| y_0 \| < \delta_1$时有 $\| y(t,t_0,y_0) \| < \varepsilon$，否则存在 $t_1 < t_2$，$\| y(t_1,t_0,y_0) \| = \delta_1$ $\| y(t_2,t_0,y_0) \| = \varepsilon$ 且对于 $t \in (t_1,t_2)$　有

$$\delta_1 \leqslant \| y(t,t_0,y_0) \| < \varepsilon$$

另一方面，对于 $t \in [t_1,t_2]$有

$$\begin{aligned} D^+ V(t,y(t,t_0,y_0))|_{(3.6\text{-}2)} &\leqslant -cV(t,y(t,t_0,y_0)) \\ &+ K | g(t,y(t,t_0,y_0)) | \leqslant -ca(\delta_1) + K\delta \leqslant 0 \end{aligned}$$

于是有

$$\varphi_1(\varepsilon) \leqslant V(t_2,y(t_2,t_0,y_0)) \leqslant V(t_1,t_0,y_0) \leqslant \varphi_2(\delta_1) < \varphi_1(\varepsilon)$$

这是矛盾的,故对一切 $t \geqslant t_0$ 有

$$\| \boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \| < \varepsilon$$

从而(3.6-1)式的零解是结构扰动下 Robust 稳定的。

此定理的条件蕴涵(3.6-1)式的零解是指数稳定的,说明指数稳定,蕴涵着结构扰动下的 Robust 稳定性,但对于一般系统,相反的结论不成立,而对于线性系统有定理 3.6.2。

定理 3.6.2 对于线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} \qquad A(t) \in C[I, R^{n^2}] \tag{3.6-3}$$

它的零解结构扰动下的稳定性,蕴涵它的指数稳定性。

证:因为 $\boldsymbol{x}(t)=0$ 是在结构扰动下为 Robust 稳定的,今考虑在 $\| \boldsymbol{x} \| \leqslant 1$ 的邻域内,对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$则存在 $\delta > 0$, (3.6-2)式的结构扰动系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{y} \tag{3.6-4}$$

的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$ (其中 $\| \boldsymbol{y}_0 \| < \delta$) 有

$$\| \boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \| < \frac{1}{2}$$

(3.6-3)与(3.6-4)式的解有关系式

$$\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{\delta(t-t_0)}$$

即

$$\| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) \| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\delta(t-t_0)}$$

从而(3.6-3)式的零解是指数稳定的。

定义 3.6.2 称(3.6-1)式的解是在系统的结构扰动下有界的(或称为在经常干扰下 Lagrange 稳定的), 若

$\forall r > 0$, 存在两个常数 $\beta(r) > 0$, $\alpha(r) > 0$, 使当

$$r < \| \boldsymbol{y} \| \leqslant \beta(r) \text{ 时有}$$

$$\| \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}) \| < \alpha(r)$$

且若 $\boldsymbol{y}_0 \in S_r \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{y}, \| \boldsymbol{y} \| \leqslant r\}$ 对一切 $t \geqslant t_0$有

$$\| \boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \| < \beta(r)$$

式中　$y(t,x_0,y_0)$ 是(3.6-2)式的解。

定理 3.6.3　若存在函数 $V(t,x)\in C[I\times S_k^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x \| x \| \geqslant k, R\}]$ 使得

1)　$\varphi_1(\| x \|)\leqslant V(t,x)\leqslant\varphi_2(\| x \|)$, $\varphi_1,\varphi_2\in KR$;

2)　$V(t,x)$关于 x 满足 Lipschitz 条件;

3)　$D^+ V(t,x)|_{(3.6\text{-}1)}\leqslant -c(\| x \|)$($c(r)$连续正定)。

则(3.6-1)式的解在经常干扰下 Lagrange 稳定。

证: $\forall\alpha>0$, 取 $\beta(\alpha)>\alpha>0$, 使 $\varphi_1(\beta)>\varphi_2(\alpha)$, 由条件 2) 对于紧集 $\alpha\leqslant\| x \|\leqslant\beta$ 中的x,存在 $k(\alpha)>0$ 和 $\lambda(\alpha)>0$ 使得

$$| V(t,x) - V(t,x') | \leqslant k(\alpha)\| x - x' \|$$

和
$$D^+ V(t,x) |_{(3.6\text{-}1)} \leqslant - \lambda(\alpha)$$

于是在 I 和$\alpha\leqslant\| x \|\leqslant\beta$ 中有

$$\begin{aligned} D^+ V(t,y) |_{(3.6\text{-}2)} &\leqslant D^+ V(t,y) |_{(3.6\text{-}1)} + k \| g(t,y) \| \\ &\leqslant - \lambda(\alpha) + k \| g(t,y) \| \end{aligned}$$

因此,若选择 $\gamma(\alpha)>0$, 使得

$$\gamma(\alpha)\leqslant\frac{\lambda(\alpha)}{k(\alpha)}$$

则对于区域$0\leqslant t<\infty$,$a\leqslant\| x \|\leqslant\beta$ 中的$\| y(t,y) \|<\gamma(\alpha)$ 有

$$D^+ V(t,y) |_{(3.6\text{-}2)} \leqslant 0$$

因而推知,若 $y_0\in S_\alpha$, 则 $\| y(t,t_0,y_0) \|<\beta$,故结论真。

定义 3.6.3　对于给定的函数 $f(r)>0$, (3.6-1)式的解是在 $f(r)$及结构扰动下耗散的,若存在常数 $B>0,\alpha>0,\beta>0$,使得对于$\| y \|\geqslant\beta$ 有

$$\| g(t,y) \| < \alpha f(\| y \|)$$

且
$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \| y(t,t_0,y_0) \| < B$$

定理 3.6.4　若定理 3.6.3 的条件满足,令 $L(\alpha)$是 Lipschitz 常数。若 $r\to\infty$, $L(r)f(r)=0(c(r))$, 则(3.6-1)式的解在 $f(r)$级结构扰动下耗散。

证:根据假设,可选择 $\alpha>0$,使

$$\alpha \leqslant \frac{c(r)}{2L(r)f(r)}$$

当 $r \geqslant k$ （k 为某一个常数），对此若

$$\| g(t,\boldsymbol{y}) \| \leqslant \alpha f(\| \boldsymbol{y} \|)$$

则 $D^+ V(t,\boldsymbol{y})|_{(3.6\text{-}2)} \leqslant D^+ V(t,\boldsymbol{y})|_{(3.6\text{-}1)} + L(\| \boldsymbol{y} \|)\| g(t,\boldsymbol{y}) \|$

$$\leqslant -c(\| \boldsymbol{y} \|) + 2L(\| \boldsymbol{y} \|)f(\| \boldsymbol{y} \|)$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}c(\| \boldsymbol{y} \|) \qquad (\text{当 } \| \boldsymbol{y} \| \geqslant k)$$

由耗散性定理知结论成立。

§7 实用稳定性[23]

无论是 Ляпунов 稳定性还是结构扰动下的 Robust 稳定性定义中的 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的，而 $\delta(\varepsilon)$ 只要它存在，不管多小。但在实际问题中，如果 δ 太小，以致要求初始扰动或结构扰动不超过 δ 本身就做不到，要求一个系统实际运行状态与理想的运行状态相差任意小，既不可能，也不必要，可以允许在限定误差范围内运行，例如许多航空器和导弹就是以这种方式运行的，这就提出了实用稳定性的问题，下面根据美国数学家 LaSalle 和 Lefschitz[23] 的论述来简介实用稳定性。

考虑未被扰动的系统及其相应的结构扰动系统

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(t,0) \equiv 0 & \boldsymbol{f} \in C[G_H, R^n] \quad (3.7\text{-}1) \\ \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{y}) & \boldsymbol{p} \in C[G_G, R^n] \quad (3.7\text{-}2) \end{cases}$$

定义 3.7.1 预先给定正数 $\delta > 0$ 及两个集合 Q 与 Q_0，其中 Q 是含原点的有界闭集，Q_0 是 Q 的子集，$\forall \boldsymbol{y}_0 \in Q_0, t_0 \geqslant 0$ 和 $\forall p(t,\boldsymbol{y}) \in P \overset{\text{def}}{=} \{ | \boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{y}) |, \| \boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{y}) \| < \delta \}$，(3.7-2)式的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \in Q (t \geqslant t_0)$，则称(3.7-2)式的零解关于 δ, Q, Q_0 为实用稳定的。

实用稳定性概念与数 δ 及集合 Q, Q_0 有关，Q 是许可状态

集，Q_0 是初始状态集，故在研究这种实用稳定之前，必须先判明：

1）为使系统正常运行需离理想状态多近（Q 的大小）；

2）允许结构扰动的范围（δ 大小）；

3）初始条件可以控制到何种程度（Q_0 的大小）。

实用稳定性与 Ляпунов 意义下的稳定性，以及结构扰动下的 Robust 稳定性是互不包含的，但仍然可用 Ляпунов 函数来研究。

定理 3.7.1 设 Q_0 为 R^n 空间中包含原点的紧集，如果存在函数 $V(t,\boldsymbol{y})\in[I\times R^n,R]$，对一切 $\boldsymbol{y}\in Q_0^c$，有

$$D^+V(t,\boldsymbol{y})\mid_{(3.7\text{-}2)}\leqslant 0$$

且对一切 $\boldsymbol{y}_1\in Q_0,\boldsymbol{y}_2\in Q^c$ 及 $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$ 有

$$V(t_1,\boldsymbol{y}_1)<V(t_2,\boldsymbol{y}_2)$$

其中 Q_0^c,Q^c 分别为 Q_0,Q 的余集。

则(3.7-2)式的从 Q_0 内出发的解，在 $t\geqslant t_0$ 都不越出 Q，从而(3.7-1)式的零解关于 δ,Q_0,Q 为实用稳定的。

证：$\forall\,\boldsymbol{y}_0\in Q_0$，考虑(3.7-2)式的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$，若在某时刻 $T>t_0$，解 $\boldsymbol{y}(T,t_0,\boldsymbol{y}_0)\in Q^c$，则必存在 $t_0<t_1<T$，当 $t_1<t\leqslant T$ 时，$\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\in Q_0^c$，且 t_1 是具有这样的性质的最小值，$\boldsymbol{x}(t_1)\in Q_0$，故应有

$$V(t_1,\boldsymbol{y}(t_1,t_0,\boldsymbol{y}_0))<V(T,\boldsymbol{y}(T,t_0,\boldsymbol{x}_0))$$

但另一方面，对于 $t_1<t\leqslant T$，由条件有

$$D^+V(t,\boldsymbol{y})\mid_{(3.7\text{-}2)}\leqslant 0$$

故有 $$V(t,\boldsymbol{y}(t_1,t_0,\boldsymbol{y}_0))\geqslant V(T,\boldsymbol{x}(T,t_0,\boldsymbol{y}_0))$$

于是有 $$V(t_1,\boldsymbol{y}(t_1))=\lim_{T\to t_1}B(t,\boldsymbol{y}(t))\geqslant V(T,\boldsymbol{y}(T))$$

这是矛盾的，故 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\in Q$，从而(3.7-1)式的零解关于 δ，Q_0,Q 为实用稳定。

定义 3.7.2 称(3.7-1)式的零解关于 δ,Q_0,Q 在有限时间 $[t_0,T]$ 内为实用稳定的，若 $\forall\,\boldsymbol{p}\in P=\{\mid\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{x})\mid\|\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{x})\|\leqslant\delta\}$ 从 Q_0 出发的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 内不越出 Q。

定理 3.7.2 若存在函数 $V(t,\boldsymbol{y})\in C[I\times R^n,R]$,使在 Q_0 内 $V\geqslant l_0$,在 Q^c 内有 $V\geqslant l$, 且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.7\text{-}2)}\leqslant(l-l_0)/T$$

则从 Q_0 内出发的解在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 内保持在 Q 内。

证:令 $V(t)\overset{\text{def}}{=}V(t,\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0))$

设 $\boldsymbol{y}_0\in Q_0$, 因为当 $t\in[t_0,t_0+T]$时有

$$V(t,\boldsymbol{y}(t))-V(t_0,\boldsymbol{y}(t_0))=\dot{V}(\xi,\boldsymbol{y}(\xi))(t-t_0)$$

$$\leqslant\frac{l-l_0}{T}(t-t_0)\leqslant\frac{l-l_0}{T}T=l-l_0$$

故 $$V(t,\boldsymbol{y}(t))\leqslant l-l_0+l_0=l$$

从而 $\boldsymbol{y}(t)$ 在$[t_0,T]$内停留在 Q 中。

定义 3.7.3 若(3.7-1)式的零解关于 δ,Q_0,Q 为实用稳定,且(3.7-1)式的每一解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$对每一个 $\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{P}\overset{\text{def}}{=}\{|\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{y})|\leqslant\delta\}$毕竟在 Q 内,即当 $t\to\infty$, $\forall\boldsymbol{y}_0\in R^n$, $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$必然要进入 Q,则称(3.7-1)式的零解为强实用稳定的。

定理 3.7.3 若存在函数 $V(t,\boldsymbol{y})\in C[R^n,R]$,且当 $\|\boldsymbol{y}\|\to\infty$, $V(t,\boldsymbol{y})\to\infty$,可对于 $\forall\boldsymbol{y}\in Q_0^c$, $\forall\boldsymbol{p}\in P$。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant-\varepsilon<0\qquad 对\ t\geqslant t_0\ 成立$$

且对所有的 $\boldsymbol{y}_1\in Q_0$ 和 $\boldsymbol{y}_2\in Q^c$ 有

$$V(t,\boldsymbol{y}_1)<V(t,\boldsymbol{y}_2)$$

则(3.7-1)式的零解关于 δ,Q_0,Q 具有强实用稳定性。

证:首先证(3.7-1)式的零解关于 δ,Q_0,Q 是实用稳定的,设 $\forall\boldsymbol{y}_0\in Q_0$,(3.7-2)式的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$在 $t=t_0$时在 Q_0内,设在某时刻 $T\geqslant t_0$有

$$\boldsymbol{y}(T,t_0,\boldsymbol{y}_0)\subset Q^c$$

则存在 t_1, $t_0<t_1<T$,使对一切 $t_1<t\leqslant T$ 有

$$\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\subset Q^c$$

且 t_1 是具有这种性质的最小数，这意味着

$$y(t_1,t_0,x_0)\subset Q^c \quad 故有$$

$$V(t_1,y(t_1,t_0,y_0)) < V(T,x(T,t_0,x_0))$$

这是不可能的，因为由条件知，$V(t,x(t,t_0,x_0))$是 t 的单调下降函数，故(3.7-1)式的零解对 δ,Q_0,Q 为实用稳定的。

现证：$\forall\, y_0\in Q^c$，考虑(3.7-2)式的解 $y(t,t_0,y_0)$，必存在 $T(t_0,y_0)$，当 $t\geqslant t_0+T$ 时有

$$y(t,t_0,y_0)\subset Q$$

若不然，则对一切 $t\geqslant t_0$有

$$y(t,t_0,y_0)\subset Q^c$$

因为
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant -\varepsilon<0$$

故
$$V(t,y(t,t_0,y_0))\leqslant V(t,y_0)-\varepsilon(t-t_0)\to -\infty$$

因此，取 $\tilde{y}_0\in Q_0$及 $\tilde{y}=y(t,t_0,y_0)$ 当 $t\gg 1$，则有

$$C = V(t_0,\tilde{y}_0) < V(\tilde{y}(t))\to -\infty$$

矛盾，故(3.7-1)式的零解强实用稳定。

§8 条件稳定性[1]

Ляпунов 稳定性，其初始扰动是在未被扰动的初始值的一个 n 维邻域内变化，如对初始扰动的区域再加以约束限制，则有下列的条件稳定性。先看一例。

例 1
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y\end{cases}\tag{3.8-1}$$

通常为 $\quad x(t,0,x_0)=x_0\mathrm{e}^t,\quad y(t,0,y_0)=y_0\mathrm{e}^{-t}$

故(3.8-1)式的零解是不稳定的，但若对初始扰动值加以限制，则出现相反情况，如初始值只在集合 $E=\{x_0=0\}$(即 y 轴)内取，则解为 $x=0,\quad y_0=y_0\mathrm{e}^{-(t-t_0)}\to 0,\ t\to\infty$，这时，零解可称为条

件渐近稳定。

考虑一般的系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\qquad \boldsymbol{f}\in C[I\times R^n,R^n]\tag{3.8-2}$$

保证解的唯一性。

定义 3.8.1 称(3.8-2)式的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$,当 $t\to+\infty$时条件稳定,若在 R^n内存在k 维流形。

$$S_k(\boldsymbol{\xi}(t_0))\in S_k\qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

对$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$, 当初始扰动 $\boldsymbol{x}(t_0)\in S_k$ 时,且

当 $$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}(t_0)\|<\delta(\varepsilon)$$

有 $$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{\xi}(t,t_0,\boldsymbol{\xi}_0)\|<\varepsilon\qquad t\geqslant t_0$$

其中 $$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\quad \boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{\xi}_0$$

称(3.8-2)式的解 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(t)$, 当 $t\to+\infty$ 时条件渐近稳定,若它是条件稳定的,且存在 $\Delta=\mathrm{const}>0$, 当 $\boldsymbol{x}(t_0)\in S_k$, 且当

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}(t_0)\|<\Delta \text{ 时,有}$$

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\xi}(t)\|\to 0\qquad (\text{当 } t\to+\infty)$$

考虑拟线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\varphi(t,\boldsymbol{x})\qquad A=(a_{ij})_{n\times n}$$

$$\varphi\in C[I\times R^n,R^n]\tag{3.8-3}$$

其中 A 为常数矩阵,具有 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个负实部特征值,且 $\varphi(t,\boldsymbol{x})=0(\boldsymbol{x})$, 关于 t 一致成立。

定理 3.8.1 设矩阵 A 有k 个负实部特征值,其它特征值实部非负, $\varphi(t,\boldsymbol{x})$关于 t 连续,当 $t\geqslant 0$ 时,关于 $\boldsymbol{x}$ 满足 Lipschitz 条件如下

$$\|\varphi(t,\boldsymbol{x}')-\varphi(t,\boldsymbol{x})\|\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|$$

$$(\|\boldsymbol{x}'\|<\Delta,\ \|\boldsymbol{x}\|<\Delta,\ t>0)$$

其中 $\quad L=L(\Delta)\to 0\quad$ 当 $\Delta\to 0$

则(3.8-3)式的零解关于某个 k 维始值流形 S_x 是条件渐近稳定的。

证:不失一般性,取 $t_0=0$,作满秩线性变换。

$x=Cy$ (这里 C 为 $n\times n$ 满秩矩阵)

使 $$C^{-1}AC = B = \mathrm{diag}(N,P)$$

且 $$\mathrm{Re}\lambda_j(N) < 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k$$

$$\mathrm{Re}\lambda_j(P) \geqslant 0 \qquad j = k+1,\cdots n$$

则(3.8-3)式化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = By + \psi(x,y) \qquad (3.8\text{-}4)$$

这里 $$\psi(x,y) = C^{-1}\varphi(t,Cy)$$

设 $$L_1 = \| C^{-1} \| \, \| L \|$$

显然有: $\| \psi(t,y') - \psi(t,y) \| \leqslant L_1 \| y' - y \| \qquad t\geqslant 0$

只要 $\| y \| < \Delta_1, \| y' \| < \Delta_1$ 这里 $\Delta_1 = \Delta / \| C \|$

设 $\beta<0$, $|\beta|$ 充分小, $\alpha>0$, 使得

$$\alpha + |\beta| < \min_j[-\mathrm{Re}\lambda_j(N)] \text{ 且 } \alpha \geqslant -2\beta \qquad (3.8\text{-}5)$$

则显然有不等式

$$\| \mathrm{e}^{Nt} \| \leqslant K\mathrm{e}^{-(\alpha+|\beta|)t} \quad \text{当 } t\geqslant 0 \qquad (3.8\text{-}6)$$

$$\| \mathrm{e}^{Pt} \| \leqslant K\mathrm{e}^{\beta t} \quad \text{当 } t\leqslant 0 \qquad (3.8\text{-}7)$$

这里 k 是充分小的正常数。

设 $$G(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{Bt}\mathrm{diag}(E_k,0) & (t\geqslant 0) \\ -\mathrm{e}^{Bt}\mathrm{diag}(0,E_{n-k}) & (t\leqslant 0) \end{cases} \qquad (3.8\text{-}8)$$

其中 E_k, E_{n-k} 是相应阶的单位矩阵,显然

$$G(+0) - G(-0) = E_n$$

从等式(3.8-8)和 $\mathrm{e}^{Bt} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{Nt}, \mathrm{e}^{Pt})$ 可得到

$$\| G(t) \| \leqslant \begin{cases} k\mathrm{e}^{-(\alpha+|\beta|)t} & (t \geqslant 0) \\ k\mathrm{e}^{\beta t} & (t \leqslant 0) \end{cases} \qquad (3.8\text{-}9)$$

此外,显然有

$$\dot{G}(t) = BG(t) \qquad t \neq 0$$

考虑奇异积分方程

$$y(t,a) = z(t)a + \int_0^\infty G(t-s)\psi(s,y(s,a))\mathrm{d}s$$

其中 $\quad z(t)=\mathrm{e}^{Bt}\operatorname{diag}(E_k,0)=\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{Nt},0)$ 。

而 a 是常向量,它的后面$(n-k)$个坐标为零,用迭代法求解积分方程

$$
\begin{cases}
y_p(t,a)=z(t)a+\int_0^{\infty}G(t-s)\psi(s,y_{p-1}(s,a))\mathrm{d}s\\
\qquad p=1,2,\cdots\\
y_0(t,a)=0
\end{cases}
\tag{3.8-10}
$$

选取 Δ 适当小,使之满足

$$L_1<\frac{|\beta|}{4k}$$

并设 $\qquad \|\alpha\|<\frac{\Delta_1}{2k}=a_0$

则当 $\qquad t\geqslant 0$

利用不等式(3.8-6),则有

$$
\begin{aligned}
\|y_1(t,a)-y_0(t,a)\|&\leqslant\|z(t)\|\ \|\alpha\|\\
&\leqslant k\mathrm{e}^{-(\alpha+|\beta|)t}\|Q\|\leqslant k\|\alpha\|\mathrm{e}^{-\alpha t}
\end{aligned}
$$

设 $\qquad \|y_p(t,a)-y_{p-1}(t,a)\|$

$$\leqslant\frac{k}{2^{p-1}}\|Q\|\mathrm{e}^{-\alpha t}\qquad(\text{当 } t\geqslant 0,p\geqslant 1)\tag{3.8-11}$$

从(3.8-10)式,利用(3.8-9)式,可以推出

$$
\begin{aligned}
&\|y_{p+1}(t,\alpha)-y_p(t,a)\|\\
\leqslant&\int_0^{\infty}\|G(t-s)\|\cdot\|\psi(s,y_p(s,a))-\psi(s,y_{p-1}(s,\alpha))\|\mathrm{d}s\\
\leqslant&\int_0^{t}\|k\mathrm{e}^{-(\alpha+|\beta|)(k-s)}\frac{|\beta|}{4k}\cdot\frac{k}{2^{p-1}}\|a\|\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s\\
&+\int_t^{\infty}k\mathrm{e}^{\beta(t-s)}\frac{|\beta|}{4k}\cdot\frac{k}{2^{p-1}}\|a\|\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s\\
=&\frac{|\beta|k}{2^{p-1}}\|a\|\mathrm{e}^{-(\alpha+|\beta|)t}\frac{\mathrm{e}^{|\beta|t}-1}{2^{p+1}}+\frac{|\beta|k}{\alpha^{p+1}}\|a\|\ \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\mathrm{e}^{\beta t}\\
\leqslant&\frac{k}{2^{p+1}}\|a\|\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(1+\frac{|\beta|}{\alpha+\beta}\right)=\frac{k}{2^{p+1}}\|a\|\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{k}{2^p} \| a \| e^{-\alpha t} \quad (\text{当 } t \geqslant 0) \tag{3.8-12}$$

故由此推出,所有近似 $y_p(t,a)$有意义,且不等式(3.8-11)式对所有自然数 p 满足,故当 $p \to \infty$,在$[0,+\infty]$上,$y_p(t,a) \to y(t,a)$,且极限函数 $y(t,a)$在变量 t 和 a 的邻域内连续,其中 $0 \leqslant t \leqslant \infty$ 和 $\| a \| < a_0$。

在(3.8-10)式中,令 $p \to \infty$便有

$$y(t,a) = z(t)a + \int_0^{\infty} G(t-s)\psi(s,y(s,a))\mathrm{d}s \tag{3.8-13}$$

即极限函数 $y(t,a)$是积分方程(3.8-13)式的解,后一等式对 t 求微分便有

$$\begin{aligned} y_t'(t,a) = & Bz(t)a + \int_0^t BG(t-s)\psi(s,y(s,a))\mathrm{d}s \\ & + \int_t^{\infty} BG(t-s)\psi(s,y(s,a))\mathrm{d}s \\ & + (G(t+0) - G(-0))\psi(t,y(t,a)) \end{aligned}$$

即

$$y_t'(t,a) = By(t,a) + \psi(t,y(t,a))$$

故 $y(t,a)$是(3.8-4)式的解,利用(3.8-11)式,便有

$$\begin{aligned} \| y(t,a) \| & \leqslant \| y_0(t,a) \| + \sum_{P=1}^{\infty} \| y_p(t,a) - y_{p-1}(t,a) \| \\ & \leqslant \sum_{P=1}^{\infty} \frac{k}{2^{p-1}} \| a \| e^{-\alpha t} = 2k \| a \| e^{-\alpha t} \end{aligned} \tag{3.8-14}$$

因此 $$\lim_{t \to \infty} y(t,a) = 0$$

这样 $y(t,a)$在 $\| a \| < a_0$ 是方程组(3.8-4)式的解簇连续依赖于 k 个参数 $a_1, \cdots, a_k$,向量 a 的前 k 个坐标超于零,当 $t \to +\infty$,从方程(3.8-13)及矩阵 $G(t)$的结构,对于解 $y(t,a)$的坐标 $y_j(t,a) \quad (j=1,2,\cdots,n)$,在 $t=0$ 取

$y_j(0,a) = y_j^{(0)} \quad j=1,2,\cdots k$

$$\boldsymbol{y}_j(0,a) = [\int_0^{\infty} G(-s)\boldsymbol{\psi}(s,\boldsymbol{y}(s,a))\mathrm{d}s]_j \qquad j = k+1,\cdots n \tag{3.8-15}$$

其中 $\left[\int_0^{\infty} G(-s)\boldsymbol{\psi}(s,\boldsymbol{y}(s,a))\mathrm{d}s\right]_j$ 表示矩阵

$$\int_0^{\infty} G(-s)\boldsymbol{\psi}(s,\boldsymbol{y}(s,a))\mathrm{d}s$$

的第 j 个分点。

故在坐标原点的邻域内，始值 $\boldsymbol{y}_j^{(0)}=[\boldsymbol{y}(0,a)]_j$ 满足方程

$$\boldsymbol{y}_{(k+1)}^{(0)} = Q_j(\boldsymbol{y}_j^{(0)},\cdots,\boldsymbol{y}_k^{(0)}) \qquad j = 1,2,\cdots,n-k$$

它在空间 R_y^n 中定义了某个 k 维流形 S_k，当 $\boldsymbol{y}_0 \in S_k$ 时

$$\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \to 0 \qquad (t\to\infty)$$

考虑作变换

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$$

得知对原来的方程组(3.8-3)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 成立类似的结论。

推论 3.8.1 设矩阵 A 有 k 个具有负实部的特征值，和 $(n-k)$ 个具有正实部的特征值，且对 $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ 在 $t\in(-\infty,+\infty)$ 内满足 Lipschitz 条件。当 Lipschitz 常数充分小时，在 R_x^n 中的 0 点的某邻域内存在流形 S_k^+ 和 S_{n-k}^-（图 3-4），它们分别是 k 维和 $n-k$ 维的，使方程组(3.8-3)的解成立下列渐近行为：

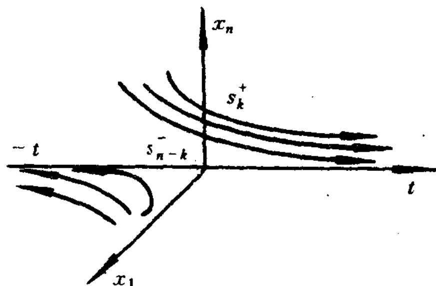


图 3-4

$x(t)\to 0$ 当 $t\to+\infty$，若 $x(0)\in S_k^+$。

$x(t)\to 0$ 当 $t\to-\infty$，若 $x(0)\in S_{n-k}^-$。

§9 Lipschitz 稳定性[209~212]

Lipschitz 稳定性是近来提出的一种新型稳定性，可以看成是线性系统稳定性的推广，人们希望在非线性系统中利用变分系统的线性性质来研究非线性稳定性而产生的，它在解的有界性，周期解的存在性方面也有一定作用，这种稳定性也推广到了泛函微分方程。

对于非线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{f}(t,0)\equiv 0,\quad \boldsymbol{f}\in C[I\times R^n,R^n] \tag{3.9-1}$$

定义其变分系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{z}) \tag{3.9-2}$$

其中 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$ 表示 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.9-3}$$

给定(3.9-1)式的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$后，对(3.9-2)式，标准基本解矩阵(即 Cauchy 矩阵)为

$$K(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \tag{3.9-4}$$

定义 3.9.1 称(3.9-1)式的零解为：

1) 一致 Lipschitz 稳定，若存在 $M>0,\delta>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta,t\geqslant t_0\geqslant 0$ 时，有 $\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}_0\|$，$M$ 称为 Lipschitz 常数。

2) 若 1)中允许 $\delta=+\infty$，则称为全局一致 Lipschitz 稳定。

3) 若存在 $M>0,\delta>0$，使当 $\|x_0\|<\delta, t\geqslant t_0\geqslant 0$ 时，$\|K(t,t_0,x_0)\|\leqslant M$，则称一致变分 Lipschitz 稳定。

4) 若 3)中 $\delta=+\infty$，则称一致变分全局 Lipschitz 稳定。

由定义立即可知，(3.9-1)式的零解一致 Lipschitz 稳定，则(3.9-1)式的零解一致 Ляпунов 稳定，但反之则不一定成立。为说明这点，需要以下定理。

定理 3.9.1 设(3.9-1)式关于零解的变分方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=f_x(t,0)z \tag{3.9-5}$$

则系统(3.9-1)的零解一致 Lipschitz 稳定，蕴涵(3.9-5)式的零解一致 Lipschitz 稳定。

证：设(3.9-1)式的零解一致 Lipschitz 稳定，故存在 $\alpha>0,\delta>0$，当 $\|x_0\|\leqslant\delta$，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|\leqslant\alpha\|x_0\|$，$t\geqslant t_0$，今取

$$x_0=e_ih,\quad h\leqslant\alpha,\quad e_i=(\overbrace{0,0\cdots1,}^{i}\quad\overbrace{0\cdots0}^{n-i})^T,$$

故有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}x(t,t_0,0)\right\|=\left\|\lim_{h\to0}\frac{x(t,t_0,x_0)-x(t,t_0,x_0)}{h}\right\|$$

$$\leqslant\lim_{h\to0}\frac{\alpha\|x_0\|}{h}=\alpha$$

此外，$\|K(t,t_0)\|=\|K(t,t_0,0)\|=\left\|\dfrac{\partial x(t,t_0,0)}{\partial x_0}\right\|\leqslant\alpha$，其中 $K(t,t_0)$为(3.9-5)式的标准基本解矩阵，故(3.4-5)式一致 Lipschitz 稳定。

例 1 对于非线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1^3\end{cases} \tag{3.9-6}$$

取 $\quad V(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^4+x_2^2,\qquad$ 则有

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(3.9\text{-}6)} = 2x_1^3x_2 - 2x_1^3x_2 = 0$$

故(3.9-6)式的零解是 Ляпунов 稳定的,而(3.9-6)式的零解对应的变分系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{y}_2\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_2}{\mathrm{d}t} = 0\end{cases} \tag{3.9-7}$$

(3.9-7)式的解为　$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_{2,0}(t - t_0)$, $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_{2,0}$, 故零解不稳定,更非 Lipschitz 稳定,但(3.9-6)式的零解是 Ляпунов 稳定的。

可见,对于非线性系统而言,Lipschitz 稳定性强于 Ляпунов 稳定性。

对于线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t) \tag{3.9-8}$$

因为通解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = K(t, t_0)\boldsymbol{x}_0$$

式中 $K(t, t_0)$为(3.9-8)式的标准基本解矩阵,可知 Lipschitz 稳定性与 Ляпунов 稳定性都等价于 $K(t, t_0)$的有界性。

下面介绍 Lipschitz 稳定性的几个定理。

定理 3.9.2　设 $f(t, x)$对 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件,关于 t 一致,则有以下结论。

(3.9-1)式的零解一致 Lipschitz 稳定的充要条件是存在连续函数 $V(t, \boldsymbol{x})$定义于 $t \geqslant 0$, $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$ 且满足

1) $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant L\|\boldsymbol{x}\|$　　$L = \mathrm{const} > 0$

2) $|V(t, \boldsymbol{x}) - V(t, \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, $\forall t \geqslant 0$ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{y}\| < \delta$

3) $D^+ V|_{(3.9\text{-}1)} \leqslant 0$

证:充分性,由条件 1)、2)、3)可知

$$\|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)\| \leqslant V(t, \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0))$$

$$\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\leqslant L\|\boldsymbol{x}_0\| \quad 当\ \|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$$

必要性，设

$$V(t,\boldsymbol{x}):=\sup_{\tau\geqslant 0}|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})|(1+\mathrm{e}^{-\tau-t})$$

则有 $\|\boldsymbol{x}\|\overset{\text{def}}{=}\|\boldsymbol{x}(t,t,\boldsymbol{x})\|\leqslant\|\boldsymbol{x}(t,t,\boldsymbol{x})\|(1+\mathrm{e}^{-t})\leqslant V(t,\boldsymbol{x})$

$$\leqslant M\sup_{\tau\geqslant 0}\|\boldsymbol{x}\|(1+\mathrm{e}^{-\tau-t})\leqslant 2M\|\boldsymbol{x}\|L\|\boldsymbol{x}\|$$

得到条件 1)。

存在 $K=K(M,\delta)$ 使得

$$\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{y})\|\leqslant e^{K\tau}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

$$对\ \|\boldsymbol{x}\|<\delta,\|\boldsymbol{y}\|<\delta$$

$\tau\geqslant 0$（由 $L(t,t)$的 Lipschitz 条件可知），注意到这种稳定性定义，则有

$$\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M\delta$$

$$\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{y})\|\leqslant M\|\boldsymbol{y}\|<M\delta$$

于是$\sup_{\tau\geqslant 0}\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})\|(1+\mathrm{e}^{-\tau-t})\leqslant\sup_{\tau\geqslant 0}\|\boldsymbol{x}\|(\mathrm{e}^{T}+\mathrm{e}^{T-(t+\tau)})$

其中 $T=\ln M$

当 $t<T$ 时，取 τ 使 $0\leqslant t+\tau\leqslant T$，当 $t\geqslant T$ 时，取 $\tau=0$ 则上述正确界是可以达到的，于是对 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$，$\|\boldsymbol{y}\|<\delta$ 有

$$|V(t,\boldsymbol{x})-V(t,\boldsymbol{y})|\leqslant\sup_{\tau}\{\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})$$

$$-\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{y})\|(1+\mathrm{e}^{-t-\tau})\}$$

$$\leqslant\sup_{\tau}e^{K}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|(1+\mathrm{e}^{-t-\tau})\leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

此即条件 2)。

$$\mathrm{D}^{+}V|_{(3.9\text{-}1)}\leqslant\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\{V(t+h,\boldsymbol{x}(t+h,t,\boldsymbol{x}))-V(t,\boldsymbol{x})\}$$

$$=\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\{\sup_{\tau\geqslant 0}\|\boldsymbol{x}(t+h+\tau,t,\boldsymbol{x})\|(1+\mathrm{e}^{-t-\tau-h})$$

$$-\sup_{\tau\geqslant 0}\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})\|(1+\mathrm{e}^{-t-\tau})\}$$

$$=\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\{\sup_{\tau\geqslant h}\|\boldsymbol{x}(t+\tau,t,\boldsymbol{x})\|(1+\mathrm{e}^{-t-\tau})$$

$$- \sup_{\tau \geqslant 0} \| x(t+\tau, t, x) \| (1 + e^{-t-\tau}) \}$$

$$\leqslant 0$$

此即条件 3)。

再证 $V(t,x)$的连续性。

$$\begin{aligned} | V(t+h, x+y) - V(t,x) | \leqslant & | V(t+h, x+y) \\ & - V(t+h, x(t+h, t, x+y)) | \\ & + | V(t+h, x(t+h, t, x+y)) - V(t, x+y) | \\ & + | V(t, x+y) - V(t,x) | \end{aligned}$$

由 $V(t,x)$的 Lipchitz 性质及系统解的连续性和上述不等式右端第一、三项可很小,用证明 D^+V 存在的方法可证第二项也很小,故 $V(t,x)$连续,证毕。

定理 3.9.3 设对于常数 $L>0$ 和非减的正函数 $\alpha(t)$有

1) $\alpha(t) \| x \|^2 \leqslant x^T G(t) x \leqslant L\alpha(t) \| x \|^2$

2) $\beta \| G(t) F(t,x) \| \leqslant \| x \| \qquad \beta > 1$

其中 $\qquad F(t,x) = f(t,x) = f_x(t,0)x$

$$G(t) = \int_t^\infty \psi^T(s,t) \psi(s,t) \mathrm{d}s$$

$\psi(t,t_0)$是变分方程(3.9-5)式的标准基本解矩阵。

则(3.9-1)式的零解是一致 Lipschitz 稳定的。

证:取 $V(t,x) = x^T G(t) x$, 显然 $G(t)$为对称矩阵。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \Big|_{(3.9\text{-}1)} = x^T \dot{G}(t) x + 2x^T G(t) f_x(t,0) x + 2x^T G(t) F(t,x) \tag{3.9-9}$$

这里 $\qquad f(t,x) = f_x(t,0)x + F(t,x) \qquad$ 于是由

$$\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} = -\psi(s,t) f_x(t,0)$$

$$G'(t) = -I + \int_t^\infty [\frac{\partial \psi^T(s,t)}{\partial t} \psi(s,t) + \psi^T(s,t) \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t}] \mathrm{d}s$$

可得 $\qquad G'(t) = -I - f_x(t,0) G(t) - G(t) f_x(t,0)$

于是由(3.9-9)式得

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(3.9\text{-}1)} = -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{x}^T G(t) F(t,\boldsymbol{x})$$

$$\leqslant -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \leqslant 0$$

$$V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)$$

再由定理条件知,取

$$M = \frac{L\alpha^{-1}(t)\alpha(t_0)}{\|\boldsymbol{x}_0\|} > 0$$

便得到解的一致 Lipschitz 稳定性。

定理 3.9.4 若存在 $V(t,\boldsymbol{x}) \in C[G_H, R]$ 和 $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ 使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad t \geqslant t_0$$

$$\overline{\lim_{s\to 0^+}} \frac{\varphi_1^{-1}\varphi_2(s)}{s} \leqslant M = \text{const} \qquad M \geqslant 1$$

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(3.9\text{-}1)} \leqslant 0 \qquad t \geqslant t_0$$

则(3.9-1)式的零解一致 Lipschitz 稳定。

证:因为

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|)$$

且

$$V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)$$

故

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|) \leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0) \leqslant \varphi_2(\|x_0\|)$$

从而

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant \varphi_1^{-1}\varphi_2(\|\boldsymbol{x}_0\|) \leqslant M\|\boldsymbol{x}_0\|$$

§10 非常稳定与相对稳定[33,37]

在考虑一个解 $\varphi(t)$ 的 Ляпунов 意义下稳定时,是假设这个解 $\varphi(t)$ 是已知的,然后通过变换,化为另一个系统的零解的稳定性来研究,然而,绝大多数微分方程的解无法求出,仅仅知道始值条件,无法精确地判定通过该始值的解,严格地说来,$\varphi(t)$ 表达式是未知的,故化为另一个系统的零解时,方程中仍含有未知的

$\varphi(t)$，因此讨论以下一类更强的稳定性是很有实际意义的，特别地，这类稳定性的研究对于周期解、概周期解的存在性的研究很有帮助。

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R^n] \tag{3.10-1}$$

保证解的唯一性。

定义 3.10.1 称(3.10-1)式的解是关于$(H^*,H)(H^*\leqslant H)$一致非常稳定的，若 $\forall\varepsilon>0$，$\forall t_0\in I$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall \boldsymbol{x}_0\in S_H$，$\forall \boldsymbol{y}_0\in S_H S_H\overset{\text{def}}{=}\{\boldsymbol{x},\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H^*\}$，其中 H^*,H 为正常数。

当 $\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\|<\delta(\varepsilon)$时有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\|<\varepsilon \qquad (t\geqslant t_0)$$

称(3.10-1)式的解关于(H^*,H)一致非常吸引，若$\forall\tilde{\varepsilon}>0$，$\exists\delta_0>0$和$T(\varepsilon)>0$，使得$\forall \boldsymbol{x}_0\in S_{H^*}$，$\forall \boldsymbol{y}_0\in S*$，当$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\|<\delta_0$时，对所有 $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\|<\tilde{\varepsilon}$$

若(3.10-1)式关于(H^*,H)一致非常稳定，且一致非常吸引，则称(3.10-1)式关于(H^*,H)一致非常渐近稳定。

定义 3.10.2 设 $H=+\infty$，称(3.10-1)式的解一致距离有界，若$\forall\alpha>0$，$\exists\beta(\alpha)>0$，当$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\|<\alpha$ 时有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\|<\beta(\alpha) \qquad (t\geqslant t_0)$$

称(3.10-1)式的解对给定的界 B 毕竟距离有界，若先给定 $B>0$，对$\forall\alpha>0$，$\exists T(\alpha)>0$，当$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0\|\leqslant\alpha$ 时，对所有的 $t\geqslant t_0+T(\alpha)$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\|<B \tag{3.10-2}$$

定理 3.10.1 若存在 $V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in C^1[I\times R^n\times R^n,R^n]$使之满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)$ $\qquad \varphi_1,\varphi_2\in K$

2) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(3.10\text{-}1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} f(t,\boldsymbol{x}) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{y}} f(t,\boldsymbol{y}) \leqslant 0 [\leqslant -\psi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)]$, $\psi \in K$

则(3.10-1)式的解关于任意(H^*,H)为一致非常稳定[一致非常渐近稳定]。

证:$\forall \varepsilon>0$ 取 $\delta(\varepsilon)=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\frac{1}{2}\varepsilon))$,于是有

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\|) &\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)) \\
&\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0),\boldsymbol{y}(t_0)) \leqslant \varphi_2(\|x_0-y_0\|) \\
&\leqslant \varphi_2(\delta(\varepsilon)) = \varphi_1(\frac{1}{2}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

故 $\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_0)$

从而(3.10-1)式关于任意的(H^*,H)为一致非常稳定。

仿照一致渐近稳定的证明,可以证明在条件

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(3.10\text{-}1)} \leqslant -\psi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)$ 下,必有

$$
\lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\| = 0
$$

定理 3.10.2 若存在 $V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in C[I \times R^n \times R^n, R]$,使在 $t \in I$ 和 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geqslant R$ 上满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)$, $\varphi_1,\varphi_2 \in KR$

2) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(3.10\text{-}1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} f(t,\boldsymbol{x}) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{y}} f(t,\boldsymbol{y}) \leqslant 0$

$[\leqslant -\psi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|)] \qquad \psi \in K$

则(3.10-1)式的解一致距离有界[毕竟一致距离有界]。

证:可以仿照本章关于一致有界、一致耗散的定理证之,详细证明,留给读者。

例 1 考虑方程

$$
\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = e(t,\dot{x}) \tag{3.10-3}
$$

其中 $f(y)$连续不减,且 $e(t,\dot{x})$连续,如果 $\forall y,z \in R$

$$
(y-z)\{e(t,y)-e(t,z)+f(z)-f(y)\} \leqslant 0
$$

则(3.10-3)式的解一致距离有界。

事实上,令 $\dot{x}=y$, 则(3.10-3)式化为方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-f(y)+e(t,y)\end{cases} \tag{3.10-4}$$

并考虑同一形式的方程组

$$\begin{cases}\dot{u}=v\\ \dot{v}=-u-f(v)+e(t,v)\end{cases} \tag{3.10-5}$$

令 $$V(x,y,u,v)=(x-u)^2+(y-v)^2$$

则 $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2(y-v)\{f(y)-f(v)\}$$

$$+\alpha(y-v)\{e(t,y)-e(t,v)\}\leqslant 0$$

故由定理 3.10.2 知(3.10-3)式的解是一致距离有界的。

下面介绍相对稳定性的概念。

介绍这类稳定性之前,先说一个实例。

例如,在两电机同步的调节系统中,可以简化出下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-px+f_1(t)+u_1\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-py+f_2(t)+u_2 \qquad p>0\end{cases}$$

$f_1(t),f_2(t)$为两台电机的输入,u_1,u_2 为两个控制变量,实际问题中,要求对于预先给定的误差 $\varepsilon>0$,应如何选取控制,使得 $|x(t,t_0,x_0)-y(t,t_0,y_0)|<\varepsilon$,当$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|<\delta(\varepsilon)$。这样,电机系统才能稳定地工作。

现在把这个问题上升到一般的概念。

考虑两个不同的系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,x) \qquad \boldsymbol{f}\in C[I\times R^n,R^n] \tag{3.10-6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}) \qquad \boldsymbol{g}\in C[I\times R^n,R^n] \tag{3.10-7}$$

两个方程都可保证解的唯一性。

定义 3.10.3 称(3.10-6)与(3.10-7)式的解是相对稳定的

(相对一致稳定的)，若 $\forall \varepsilon>0$，$\forall t_0 \in I$，$\exists \delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$)，当 $\| x_0-y_0 \|<\delta$ 时有

$$\| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \| < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_0)$$

称(3.10-6)、(3.10-7)两式的解是相对吸引的(相对一致吸引)，若 $\forall \tilde{\varepsilon}>0$，$t_0 \in I$，$\exists \sigma_0=\sigma(t_0)$ ($\sigma_0=\sigma$) 和 $T=T(t_0,\varepsilon)$ ($T=T(\varepsilon)$)，当 $\| x_0-y_0 \|<\sigma_0$时有

$$\| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0) \| < \varepsilon \qquad (t \geqslant t_0+T)$$

若(3.10-6)、(3.10-7)两式的解相对稳定，且相对吸引，称为相对渐近稳定；

若(3.10-6)、(3.10-7)两式的解一致相对稳定，且一致相对吸引，称为相对一致渐近稳定。

定理 3.10.3 若存在 $V(t,x,y) \in C'[I \times R^n \times R^n, R^+]$使得

1) $\varphi_1(\| x-y \|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant \varphi_2(\| x-y \|) \qquad (\varphi_1, \varphi_2 \in K)$

2) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3.10\text{-}6)\cup(3.10\text{-}7)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,x)+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{g}(t,y) \leqslant 0$$
$$[\leqslant -\psi(\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \|)] \qquad \psi \in K$$

则(3.10-6)与(3.10-7)式的解相对一致稳定[相对一致渐近稳定]。

证明的方法与定理 3.10.1 类似，故略。

例 2 考虑两个系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1-f(x_2)+e(t,x_2) \end{cases} \tag{3.10-8}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-y_1-g(y_2)+h(t,y_2) \end{cases} \tag{3.10-9}$$

若 $$(x_2-y_2)(f(x_2)-g(y_2))\geqslant 0,\text{且}$$
$$(x_2-y_2)(e(t,x_2)-h(t,y_2))\leqslant 0$$
则(3.10-8)与(3.10-9)两式的解是相对稳定的。

可以仿照例1证明,请读者完成。

§11　集合稳定性与吸引性[33、37]

Ляпунов研究动力系统孤立平衡位置的稳定性与吸引性的方法,可以进一步推广来研究更广泛的一般流形或集合的稳定性与吸引性,这种更广泛的稳定性、吸引性理论上包含了前面已讨论过的许多种稳定性、有界性、吸引性、耗散性作为特例,许多学者对此都有过研究。

考虑一个系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\qquad \text{这里}\quad \boldsymbol{f}\in C[I\times R^n,R^n] \tag{3.11-1}$$

设 $M(t)$ 为 $I\times R^n$ 空间的一个集合。例如由 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega=\{\boldsymbol{x},\ \|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$ 出发的全体解集,就可以构成解簇 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 集合,用 Π_M 表示 $M(t)$ 在 R^n 上的投影。

$M(t)$ 可以是一个流形或者是任意的集合(有界或无界)。

令 $M(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\{\boldsymbol{x}\,|\,(\sigma,\boldsymbol{x})\in M\}$ 表示超平面 $t=\sigma$ 与 M 的交集。

如果在 R^n 中存在紧集 Q,使 $Q\supset\Pi_M$,则称 M 是有界的,用 $\rho(\boldsymbol{x},M)$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 到 π_M 的最小距离,即

$$\rho(\boldsymbol{x},M)\overset{\text{def}}{=}\inf_{\boldsymbol{y}\in\Pi_M}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \tag{3.11-2}$$

设 $M(\sigma,\varepsilon)$ 是 $M(\sigma)$ 在 R^n 中的 ε 邻域,即表示 $M(\sigma,\varepsilon)$ 中的点到 $M(\sigma)$ 的距离不超过 ε,如图3-5所示。

以下定义中所述集合 M 的稳定性、有界性、吸引性等都是指 M 对微分方程(3.11-1)的解形成的流而言,为了行文简洁,将“关于微分方程(3.11-1)的解”一语通通略去。

定义 3.11.1　称集合 M 稳定(一致稳定),若 $\forall\varepsilon>0$, $\forall\alpha>$

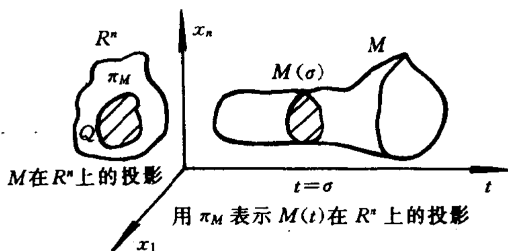


图 3-5

$0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon, \alpha) > 0 \ [\exists \delta(\varepsilon) > 0]$,使得当 $\forall x_0 \in S_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \| x \| \leqslant \alpha\}$时,有

$$\rho(x_0, M(t_0)) < \delta(t_0, \varepsilon, \alpha)[\delta(\varepsilon, \alpha)]$$

$$\rho(x(t, t_0, x_0), M(t)) < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

定义 3.11.2 称集合 M 吸引,若解 $x(t, t_0, x_0) \to M, t \to \infty$。在 R^n 中 $\exists \varphi \supset M$,使得 $\forall x_0 \in \varphi$ 若 $\varphi = R^n$,则称 M 全局吸引。

称 M 为全局一致吸引的,若 $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \forall \alpha > 0, \forall t_0 \in I, \exists T(\varepsilon, \eta) > 0$, 当

$$x_0 \in S_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \| x \| \leqslant \alpha\} \quad \rho(x_0, M(t_0)) \leqslant \eta(t) \geqslant t_0 + T \text{ 时},$$

有
$$\rho(x(t, t_0, x_0)\ M(t)) < \varepsilon$$

定义 3.11.3 若集合 M 稳定且吸引,则称它是渐近稳定的;若集合 M 一致稳定且全局一致吸引,则称它是全局一致渐近稳定的。

定义 3.11.4 称(3.11-1)式的解与集合 M 的距离为一致有界的,若 $\forall \eta > 0, \forall \alpha > 0, \forall t_0 \in I, \exists \beta(\eta) > 0$,使当 $\Delta x_0 \in S_\alpha$ 且 $\rho(x, M(t_0)) < \eta$ 时,有

$$\rho(x(t, t_0, x_0) M(t)) < \beta(\eta) \qquad (t \geqslant t_0)$$

集合稳定性吸引性的概念是十分广泛的。

例如:若 $M(t) = \{I \times 0\}$,则上述集合稳定性、吸引性正是 Ляпунов 意义下平衡位置 $x = 0$ 稳定性与吸引性。

若 $M(t)=\{I\times \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\}$,且系统(3.11-1)为自治系统,则上述集合的稳定性、吸引性便是 Poincare 意义下的稳定性,等等。

定理 3.11.1 如果存在函数

$$V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times G_H.R] \qquad G_H \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid d(\boldsymbol{x},M(t))\leqslant H\}$$

满足

1) $\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x},M(t)))\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\rho(\boldsymbol{x},M(t))) \qquad \varphi_1,\varphi_2\in K$

2) $D^+V(t,\boldsymbol{x})|_{(3.11\text{-}1)}\leqslant 0$

则集合 M 是一致稳定的。

证:$\forall\varepsilon>0(\varepsilon>H),\forall(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in G_H\times I$,取

$$\delta=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)) \qquad (\text{即 } \varepsilon=\varphi_1^{-1}(\varphi_2(\delta)))$$

当 $\rho(\boldsymbol{x}_0,M(t_0))<\delta$ 时有

$$\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t)))\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)$$
$$\leqslant\varphi_2(\rho(\boldsymbol{x}_0,M(t_0)))<\varphi_2(\delta)$$

从而 $\quad \rho(\boldsymbol{x}(t),M(t))<\varphi_1^{-1}(\varphi_2(\delta))=\varepsilon \qquad (t\geqslant t_0)$

故 $M(t)$ 一致稳定。

注 为了只得到 M 稳定的较弱结论,定理 3.11.1 的条件 1)中 φ_2 可以取消。

定理 3.11.2 如果存在 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[I\times R^n,R^n]$ 满足

1) $\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x},M))\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\rho(\boldsymbol{x},M)) \qquad \varphi_1,\varphi_2\in KR$

2) $\dfrac{dV(t,\boldsymbol{x})}{dt}\leqslant-\psi(\rho(\boldsymbol{x},M)) \qquad \psi\in K$

则 M 全局一致渐近稳定。

证:因为定理 3.11.2 的条件显然蕴涵定理 3.11.1 的条件,故 M 是一致稳定的。

下面证明 M 是全局一致吸引的。

$\forall\varepsilon>0,\forall\eta>0,\ \forall\alpha>0,\forall t_0\in I$,因为

$$\frac{dV(t,\boldsymbol{x})}{dt}\leqslant-\psi(\rho(\boldsymbol{x},M(t))) \qquad \text{故有}$$

$$\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}),M(t))\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\varphi_2(\rho(\boldsymbol{x},M(t)))$$

故有
$$\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t))\geqslant\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t)))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant-\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))\leqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\psi(\varphi_2^{-1}(t,\boldsymbol{x}(t)))}\leqslant-\mathrm{d}t$$

$$\int_{V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))}^{V(t,\boldsymbol{x}(t))}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\leqslant-(t-t_0)$$

$$\int_{V(t,\boldsymbol{x}(t))}^{V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\geqslant(t-t_0)$$

令
$$V(t_0)\leqslant\varphi_2(\rho(\boldsymbol{x}_0,M(t_0)))\leqslant\varphi_2(\eta)$$

于是有

$$\begin{aligned}t-t_0&\leqslant\int_{V(t,\boldsymbol{x}(t))}^{V(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\\&\leqslant\int_{\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t))}^{\varphi_2(\eta)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\\&=\int_{\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t)))}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\\&\quad+\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(\eta)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\end{aligned}$$

取
$$T=T(\varepsilon,\eta)>\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(\eta)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}$$

显然当 $t\geqslant t_0+T$ 时有

$$\int_{\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t)))}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\geqslant t-t_0$$

$$-\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(\eta)}\frac{\mathrm{d}V}{\psi(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{x}(t))))}\geqslant t-t_0-T\geqslant 0$$

从而
$$\varphi_1(\varepsilon)\geqslant\varphi_1(\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t)))$$

即
$$\rho(\boldsymbol{x}(t),M(t))\leqslant\varepsilon\qquad(\text{当 } t\geqslant t_0+T(\varepsilon,\eta))$$

于是 M 是全局一致渐近稳定的。

第四章　非线性控制系统

自动控制理论的发展是以 Maxwell 对 watt 离心调速器的稳定性分析开始的[57]，本世纪 40 年代，苏联学者 Лурье、Постников 等提出了处理一类非线性控制的方法[51]，Лурье 等从许多实际控制系统出发，特别是飞机自动驾驶仪的 Ъулгаков 问题[50,52]，先将系统的非线性部分孤立出来，视为反馈控制，使系统具有闭环控制系统形式，并提出了著名的 Лурье 问题，到目前为止，围绕这个问题进行研究的专著多本，论文数百篇，Лурье 问题的提出，实际上开创了不确定性系统或多值微分方程 Robust 控制的先河，它的重要性不言而喻。

本章，除了简略地介绍前人的主要结果，Ляпунов－Лурье 型 V 函数法、S 程序及 Popov 频率判据等充分性判据，主要是介绍我们所得到的关于绝对稳定的充要条件，及由此充要条件所派生出来的一系列充分条件，其中有不少是构造性的代数判据。

§1　离心调速器工作原理与一般 Лурье 控制系统

首先简略地陈述一下离心调速器的工作原理[17]，如图 4-1 所示，发动机的角速度 ω 由离心测速器 1 测定，测速器通过杠杆 2 和滑阀 3 以及伺服机 4 连接，4 拔动调节机构 5，使发动机始终维持正常的转速，当发动机由于负荷减轻而使转速增加时，测速器的套管便上升，通过杠杆带动滑阀上升，高压油通过孔道进入伺服机汽缸的正室；同时原来留在下室的油由下孔道排出，于是伺服机的活塞下降，拔动调节机构减少燃料的供给量，使发动机的角速度减小，而当发动机的运转速度低于正常速度时，伺服机向上拔动调节

机构，增加燃料的供给量，使发动机转速增加，调整调速器的负反馈作用，始终维持发动机的转速稳定在一个额定的常数。众所周知，一个发电机经常在用电户的用电量不断变化下工作，如果发电机不能稳定地维持在一个额定的转速，其危害轻则使用电户得不到稳压电流，重则可能带来毁灭发电机的灾难性恶果。

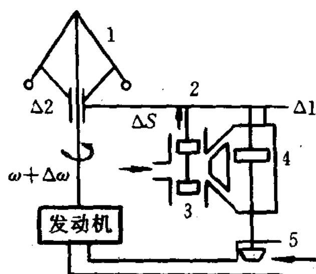


图 4-1

详细分析发动机运动方程、离心调速器工作原理、伺服机的方程以及反馈杠杆方程，并加以规范化，最后可得（详细推导可见文献[17]）

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{14}x_4 \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_3 \\[2mm] \dfrac{dx_4}{dt} = f(\sigma)\end{cases} \tag{4.1-1}$$

$$\sigma = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{4.1-2}$$

其中 $f(\sigma)$满足 $f(0)=0,\sigma f(\sigma)>0$，当 $\sigma\neq0$，但 $f(\sigma)$一般是未知的函数。

人们要求，对于满足上述条件的任意函数 $f(\sigma)$，平衡位置 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$ 是全局渐近稳定的，即要求发动机系统稳定地维持额定的转速。

推导特殊的模型上升到一般非线性控制系统，1944 年左右，苏联数学控制论专家 Лурье 从飞机自动驾驶仪的研究中提出了如下形式的不确定性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma) \\ \sigma = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum_{x=1}^{n} c_i x_i \end{cases} \tag{4.1-3}$$

式中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为常数矩阵，$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状量列向量，$\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\in R^n$ 是已知的列向量，σ 是反馈控制变量，$f(\sigma)$是非线性函数，它的具体形式未知，仅知道它属于某类函数集，现在定义这些函数集：

$$F_{[0,k]} \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f(0) = 0, 0 < \sigma f(\sigma) \leqslant k\sigma^2,\ \sigma \neq 0, f \text{ 连续}\}$$

$$F_{[0,k)} \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f(0) = 0, 0 < \sigma f(\sigma) < k\sigma^2, \sigma \neq 0, f \text{ 连续}\}$$

$$F_{\infty} \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f(0) = 0, \sigma f(\sigma) > 0, \text{当 } \sigma \neq 0 \text{ 时}, f \text{ 连续}\}$$

实际问题中许多非线性反馈控制都可能化为(4.1-3)型，但 $f(\sigma)$ 究竟是 σ 的怎样的非线性函数，不得详知，它只能借助于实验记录而得，而这样的实验又只能在一个特定的不变负荷下进行，故 $f(\sigma)$与该负荷有关，仅知 $f\in F_{[0,k]}$或 $f\in F_{[0,k)}$或 $f\in F_\infty$，其它知道很少，因此系统(4.1-3)是一个典型的不确定性系统。

例如，上述离心调速机的控制信号 σ 和滑阀位置的改变与 ΔS 成正比，$f(\sigma)$表示伺服机的进油量，它是滑阀口张开程度的非线性函数，除了知道 $\sigma>0$，$f(\sigma)>0$(伺服机汽缸的上室油量增加)，$\sigma<0$，$f(\sigma)<0$(上室油量减少)，$f(0)=0$，其它知道很少。

故 Лурье 控制系统(4.1-3)实则为一多值微分方程组，或称为微分包含，或称为不确定性系统。

人们把这类控制系统(4.1-3)式分为三类[57]：

1)直接控制系统，如果(4.1-3)式中的矩阵 A 为 Hurwitz 矩阵；

2) 间接控制系统，如果(4.1-3)式中的矩阵 A 仅有一个零特征值，其它特征值具有负实部；

3) 临界控制系统，如果(4.1-3)式中的矩阵 A 无正实部特征值。

定义 4.1.1 称系统(4.1-3)式的零解是绝对稳定的，若 $\forall$

$f(\sigma)\in F_\infty$,(4.1-3)式的零解为全局稳定;称(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定,若$\forall f(\sigma)\in F_{[0,k]}$,(4.1-3)式的零解全局稳定;称(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k)$内绝对稳定,若$\forall f(\sigma)\in F_{[0,k)}$,(4.1-3)式的零解全局稳定。

从上述定义看,绝对稳定性本质上是一种 Rubost 稳定性。究竟什么是 Лурье 问题,这里把一些权威的提法介绍于下,供读者参考。

美国著名数学家 Lefschitz 的专著[54]提到:

所谓 Лурье 问题,就是寻找(4.1-3)式关于 F 绝对稳定的充要条件。

谢惠民教授的专著[57]也提到 Лурье 问题即寻找(4.1-3)式关于$[0,k]$绝对稳定性的充要条件。

他们都没有限定充要条件的具体形式。

Айзерман 在 $A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的参数空间中定义集合 M,他认为寻找(4.1-3)式零解绝对稳定的充要条件等价于把 $M\subset R^{n\times n}\times R^n\times R^n$ 找出来,使 $A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in M$,系统(4.1-3)的零解是绝对稳定,他认为这个问题至今仍未解决。

如果按后者的提法这个问题能够解决,当然是很理想的,但现在已有的绝对稳定的较一般充分条件对应的 M 是一个怎样的集合尚不清楚,何况充要条件,因此,我们认为任何有助于推动 Лурье 问题的研究的方法都是有意义的。

先讨论 Лурье 系统(4.1-3)式绝对稳定的必要条件。

定理 4.1.1 下列条件都是(4.1-3)式绝对稳定的必要条件:

1) $\forall \varepsilon>0,[0<\varepsilon<k]$

$A+\varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 为 Hurwitz 矩阵;

2) $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$,即 A 的所有特征值全部在复平面的闭左半平面内;

3) $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0$;

4) 若 A 为 Hurwitz 矩阵,则 $\boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。

证:1)令 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma=\varepsilon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$,则(4.1-3)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = (A + \varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x} \tag{4.1-4}$$

(4.1-4)式的零解是渐近稳定的,故 $A + \varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 稳定;

2)若 A 至少有一个特征值具有 $Re\lambda_0(A)>0$,根据特征值对矩阵元素的连续依赖性,总可以选取 ε。$0<\varepsilon\ll 1$,使 $A+\varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 也至少有一个特征值 $\tilde{\lambda}_0$ 具有 $\mathrm{Re}\tilde{\lambda}_0(A+\varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)>0$,与绝对稳定矛盾,故 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$。

3)若 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}>0$,令 $f(\sigma)=h\sigma$,则(4.1-3)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = (A + h\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x} \tag{4.1-5}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 的迹为 $\mathrm{tr}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$,当 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}>0,h\gg 1$,则有

$$\mathrm{tr}(A + h\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T) = \mathrm{tr}A + h\,\mathrm{tr}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T = \mathrm{tr}A + h\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} > 0$$

故(4.1-3)式零解不稳定,与绝对稳定性矛盾,所以 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0$。

其实,此类必要条件还可以得到许多,因为任意一个 $f(\sigma)\in F_\infty$,或 $f(\sigma)\in F_{[0,k]}$,$f(\sigma)\in F_{[0,k)}$都可以找出相应的必要条件。

4)因为 A 和 $A+\varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 稳定,$0<\varepsilon\ll 1$,故对于 $\lambda=0$,有

$$\begin{aligned}\det(I\lambda-(A+\varepsilon \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)) &= \det(I\lambda - A)\cdot\det(I-\varepsilon(I\lambda-A)^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T)\\ &= \det(I\lambda - A)\cdot\det(1-\varepsilon \boldsymbol{c}^T(I\lambda-A)^{-1}\boldsymbol{b})\neq 0\end{aligned} \tag{4.1-6}$$

若 $\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}<0$,则存在 $\varepsilon_0>0$,使得

$$1 - \varepsilon_0\boldsymbol{c}^T(-A)^{-1}\boldsymbol{b} = 1 + \varepsilon_0\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b} = 0 \tag{4.1-7}$$

(4.1-7)与(4.1-6)矛盾,故 $\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。

§2 直接控制系统绝对稳定的 Лурье 判据

设(4.1-3)式为直接控制系统,即 A 为 Hurwitz 矩阵,Лурье 最先采用了如下的二次型加积分项的 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x} + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{4.2-1}$$

其中对于任意给定的正定矩阵 B,Ляпунов 矩阵方程

$$A^TP + PA = -B \tag{4.2-2}$$

有唯一对称正定矩阵解 P。

定理 4.2.1[57] 若存在常数 $\beta \geqslant 0$,及对称正定矩阵 P,使(4.2-1)式的解沿(4.1--3)式的导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} = -\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} + (\beta\boldsymbol{c}^T A + 2\boldsymbol{b}^T P)\boldsymbol{x}f(\sigma) + \beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma) \tag{4.2-3}$$

负定,则(4.1-3)式零解绝对稳定。

这个结论,是不证自明的,因为它是 Ляпунов 全局稳定性定理的特例,困难的问题是如何判定(4.2-3)式的负定。前人在如何判定(4.2-3)式负定的问题上,产生过一些疏忽,遇到过一些挫折,后来不断被后人指正,这些仍然值得我们借鉴,现予以介绍,Лурье、Летов、Малики 曾将(4.1-3)式增加一个方程写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{c}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f(\sigma) \end{cases} \tag{4.2-4}$$

把(4.2-3)式视为关于$(\boldsymbol{x}, f(\sigma))$的二次型,用 Sylvester 条件来判定(4.2-3)式的负定性。

为了使(4.2-3)式成为$(\boldsymbol{x}, f(\sigma))$的二次型,应有 $\beta > 0$,不失一般性,设 $\beta = 1$,即

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

得到

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}^T A + 2\boldsymbol{b}^T P)\boldsymbol{x}f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma) \tag{4.2-5}$$

的右边的系数满足 Sylvester 正定条件,因而断言(4.1-3)式的零解绝对稳定,然而,诚如好些文献所指那样,这些充分条件是空的,事实上,$-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$永不可能关于$(\boldsymbol{x}, f(\sigma))$正定,关于$(\boldsymbol{x}, f(\sigma))$正定的 Sylvester 条件的最后一个行列式恰恰小于或等于零。

只需取极特殊的 $f(\sigma) = \sigma$ 就可以看出此法失效的原因,此

时,(4.1-3)式就变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\sigma \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{c}^T A\boldsymbol{x} + c^T\boldsymbol{b}\sigma \end{cases} \tag{4.2-6}$$

(4.2-6)式的后一个方程其实是前面几个方程的线性组合,不是独立的方程,如今把它形式上看成一个新的独立的方程,而作 Ляпунов 函数。

$$V = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\sigma^2$$

如果$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.2-6)}$关于 $\boldsymbol{x},\sigma$ 负定的话,则意味着(4.2-6)式把 σ 看成一个独立变量,其零解也应是渐近稳定的,从而矩阵

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T A & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

应是稳定的,然而显然 $\det\begin{vmatrix} A & B \\ \boldsymbol{c}^T A & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$,故$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T A & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$不是稳定的,这就说明了此法失效的原因。然而,形如 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 的 Ляпунов 函数仍然是用来判定绝对稳定的一个有效的 V 函数,为了得到绝对稳定的结论,只需设法判定$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1-3)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定,没有必要判定关于$(\boldsymbol{x}, f(\sigma))$负定,而判定(4.2-3)式关于 $\boldsymbol{x}$ 负定,又往往是极困难的,这恰恰是前人为绕过这些困难而疏忽地犯错误的原因,也是后人为克服判定$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$关于$\boldsymbol{x}$负定的困难而发现新方法、新技巧的动力,然而,在相当长的时间内,相当多的人在围绕着如何判定(4.2-3)式关于 $\boldsymbol{x}$ 负定作文章。

§3 判定 Ляпунов－Лурье 型 V 函数导数负定的 S 方法

首先,证明一个重要的等式[57,18]。

引理 4.3.1 设有实对称矩阵

$$\Omega = \begin{bmatrix} K & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}^T & r \end{bmatrix}$$

其中 $K \in R^{n\times n}, K^T = K, \boldsymbol{d} \in R^n, r \in R^1$,则 Ω 正定的充要条件为

1)K 正定,且 $r - \boldsymbol{d}^T K^{-1} \boldsymbol{d} > 0$,或者为一个等价的条件;

2)$r > 0, K - \frac{1}{r}\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T$ 正定。

证:利用线性代数知识,从下面两个等式就可以得到引理的结论。

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{r}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}^T & r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{r}\boldsymbol{d}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K - \frac{1}{r}\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \tag{4.3-1}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\boldsymbol{d}^T K^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}^T & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -K^{-1}\boldsymbol{d} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & r - \boldsymbol{d}^T K^{-1}\boldsymbol{d} \end{bmatrix} \tag{4.3-2}$$

所以引理结论成立。

然后指出,用 Ляпунов－Лурье 型函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} + \beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \quad (\beta > 0 \quad P \text{ 对称正定}) \tag{4.3-3}$$

与

$$W(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \qquad (Q \text{ 对称正定}) \tag{4.3-4}$$

的效果是等价的。

后者显然是前者的特例,而后者只要令 $Q = \frac{P}{\beta}$,则 $W(\boldsymbol{x}) = \frac{V(\boldsymbol{x})}{\beta}$ 便可化前者为后者。

这样,只须用后者从而可减少一个参数。

下面介绍 Лурье 本人所提出的判定(4.2-3)式关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的 S 程序,如果 $f(\sigma) \in F$,则(4.2-3)式加、减同一项 $2\tau \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$,其中 $\tau > 0$,为待定常数,使(4.2-3)式变为

$$-\frac{dV}{dt}\Big|_{(4.1\text{-}3)} = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} - 2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c}^T A + \boldsymbol{b}^T P + \tau\boldsymbol{c}^T\right)$$

$$\boldsymbol{x}f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma) + 2\tau\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}f(\sigma)$$

$$\overset{\text{def}}{=} - S(\boldsymbol{x},f) + 2\tau\sigma f(\sigma) \tag{4.3-5}$$

显然,如果

$$S(\boldsymbol{x},f) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} - 2\left(\frac{1}{2}C^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}^T P + \tau\boldsymbol{c}^T\right)\boldsymbol{x}f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma) \tag{4.3-6}$$

关于$(\boldsymbol{x},f)$正定,则$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定。

而 $S(\boldsymbol{x},f)$关于$(\boldsymbol{x},f)$正定的 Sylvester 条件往往可以实现,并且这个条件的成立,最后归结到关于 τ 的一元二次不等式是否有正数解的问题,十分易于验证。

因为 B 正定,故$\forall\, \boldsymbol{x}\neq 0$,令 $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}$,则有
$\boldsymbol{y}^T B^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T B^T B^{-1} B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T B B^{-1} B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} > 0$,当 $\boldsymbol{x}\neq 0$,故 B^{-1} 也正定。

因为 B 正定,故 $S(\boldsymbol{x},f)$关于$(\boldsymbol{x},f(\sigma))$正定的条件为

$$\det\begin{vmatrix} B & -\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right)^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{vmatrix} > 0$$

而此条件等价于

$$\det\begin{vmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \det\begin{vmatrix} B & -\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right)^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

$$= \det\begin{vmatrix} E & -B^{-1}\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right)^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

$$= -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} - \left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right)^T B^{-1}\left(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c} + P\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}\right) > 0 \tag{4.3-7}$$

故有定理 4.3.1。

定理 4.3.1 如果存在一个对称正定矩阵 B 和一正数 τ，使得

$$-c^Tb > (\frac{1}{2}A^Tc + Pb + \tau c)^T B^{-1}(\frac{1}{2}A^Tc + Pb + \tau c)$$

则(4.1-3)式的零解绝对稳定，其中 P 为 Ляпунов 矩阵方程(4.2-2)式的对称正定矩阵解[15]。

推论 4.3.1 若存在对称正定矩阵 B，使得

$$-c^Tb > (\frac{1}{2}A^Tc + Pb + c)^T B^{-1}(\frac{1}{2}A^Tc + Pb + c)$$

则(4.1-3)的零解绝对稳定。这是定理 4.3.1 中 $\tau = 1$ 的情况。

如果 $f(\sigma) \in F_{[0,k)}$，则(4.2-3)式中加减同一项

$$2\tau f(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k}f(\sigma)) \ (\text{其中 } \tau > 0 \text{ 待定})$$

则(4.2-3)式变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} &= -x^TBx + 2(\frac{1}{\alpha}A^Tc + Pb + \tau c)^T x f(\sigma) \\ &\quad + (c^Tb - \frac{2\tau}{k})f^2(\sigma) - 2\tau f(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k}f(\sigma)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -S_1(x, f(\sigma)) - 2\tau f(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k}f(\sigma)) \qquad (4.3\text{-}8)\end{aligned}$$

因为 $f(\sigma)(\sigma - \frac{1}{k}f(\sigma)) > 0 \qquad \forall \sigma \neq 0$

故若 $S_1(x, f(\sigma)) = x^TBx - 2(\frac{1}{2}A^Tc + Pb + \tau c)^T x f(\sigma) - (c^Tb - \frac{2\tau}{k})f^2(\sigma)$ 关于 $(x, f(\sigma))$ 正定，则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.2\text{-}3)}$ 关于 x 负定，从而有下列类似的定理 4.3.2。

定理 4.3.2 若存在一个对称正定矩阵 B 和一个正数 $\tau > 0$，使得

$$-(c^Tb - \frac{\alpha\tau}{k}) > (\frac{1}{2}A^Tc + Pb + \tau c)^T B^{-1}(\frac{1}{2}A^Tc + Pb + \tau c)$$

则(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k)$内绝对稳定。

如果 $f(\sigma) \in F_{[0,k]}$，则(4.2-3)式中加减同一项 $2\tau[f(\sigma)(\sigma$

$-\frac{1}{k+\varepsilon}f(\sigma))]$,其中 $0<\varepsilon\ll 1$ 为任意数, $\tau>0$ 待定,则(4.2-3)式变为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(4.1\text{-}3)}=-\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}+2(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c}+P\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}f(\sigma)$$

$$+(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\frac{2\tau}{k+\varepsilon})f^2(\sigma)-2\tau f(\sigma)(\sigma-\frac{1}{k+\varepsilon}f(\sigma))$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}-S_2(\boldsymbol{x},f(\sigma))-2\tau f(\sigma)(\sigma-\frac{1}{k+\varepsilon}f(\sigma)) \qquad (4.3\text{-}9)$$

故若

$$S_2(\boldsymbol{x},f)=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}-2(\frac{1}{2}A^T\boldsymbol{c}+P\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}f(\sigma)-(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\frac{2\tau}{k})f^2(\sigma)$$

关于 $(\boldsymbol{x},f(\sigma))$ 正定,则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 负定,从而有定理 4.3.3。

定理 4.3.3 若存在一个对称正定矩阵 B 和一个正数 $\tau>0$,使得

$$(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\frac{2\tau}{k+\varepsilon})>(\frac{1}{\alpha}A^T\boldsymbol{c}+P\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{c})^TB^{-1}(\frac{1}{\alpha}A^T\boldsymbol{c}+P\boldsymbol{b}+\tau\boldsymbol{c})$$

则(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域 $[0,k]$ 内绝对稳定。

上面的方法叫做 S 方法,在苏联是十分重视的一个方法,简便实用,但 $S(\boldsymbol{x},f)$ 关于 $(\boldsymbol{x},f)$ 正定只是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$ 负定的充分而不必要的条件,是否存在这样的系统,使得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是负定的,但不存在 $\tau>0$,使 $S(\boldsymbol{x},f)$ 正定,如回答是肯定的,则称 S 程序是有亏损的,否则,称 S 程序是无亏损的。文献[65]举了如下例子,说明 S 方法确有亏损,例子为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-2x_1+f(x_2)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_2-\dfrac{1}{2}f(x_2)\end{cases}$$

详细的验证可以参见文献[65]。

§4 Ляпунов－Лурье 型 V 函数导数负定的充要条件

本节介绍我国学者[55,56]判定形如 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$（$P$ 正定）的二次型加积分项的 V 函数沿(4.1-3)式的解的导数 $\dot{V}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的几个等价的充要条件，这些条件都是定理 4.2.1 的补充和具体化，我们在(4.2-3)式中取 $\beta=1$。

定理 4.4.1[55] 设(4.1-3)式为直接控制系统，则(4.2-3)式定义的 V 沿(4.1-3)式的导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} = -\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{c}^T A + 2\boldsymbol{b}^T P)\boldsymbol{x} f(\sigma) + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} f^2(\sigma) \tag{4.4-1}$$

关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的充要条件是

1) $W(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}^T A + 2\boldsymbol{b}^T P)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \geqslant 0$，

$$\text{当 } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sigma = 0, \tag{4.4-2}$$

即 $W(\boldsymbol{x})$在超平面 $\sigma=0$ 上半正定；

2) $\boldsymbol{c}^T HH^T(A^T\boldsymbol{c} + 2P^T\boldsymbol{b}) \leqslant 0$（其中 $H^T BH = E$）。　(4.4-3)

定理 4.4.1 的证明过程较长，请见文献[55]，但条件 1)仍不好验证，如果能断定 $W(\boldsymbol{x})$在超平面 $\sigma = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = 0$ 上的下确界非负，则可以用 $\inf\limits_{x\in\sigma=0} W(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 来等价地代替条件 1)，文献[56]正是基于这种思想，但采用了定理 4.4.1 的思想方法，证明了以下定理。

定理 4.4.2[56] 设 A 稳定，给定一个对称正定矩阵 B，$\forall f(\sigma) \in F_{[0,k]}$，选取 Ляпунов 函数(4.2-3)式。

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} = -\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^T\left(P\boldsymbol{b} + \frac{1}{\alpha}A\boldsymbol{c}^T\right) f(\sigma) + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} f^2(\sigma) \tag{4.4-4}$$

关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} > 0 & (4.4\text{-}5) \\ \dfrac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}} \left(\dfrac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d}\right)^2 - \boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} > 0 & (4.4\text{-}6) \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{d} = P\boldsymbol{b} + \dfrac{1}{\alpha} A^T \boldsymbol{c}$,从而当条件满足时,(4.1-3)式的零解绝对稳定。

证:因为 B 对称正定,故 B^{-1}亦然,且存在矩阵 H,使 $B = H^T H B^{-1} = H^{-1}(H^{-1})^T$,将(4.4-4)式变形为

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} &= \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T \left(P\boldsymbol{b} + \frac{1}{2} A \boldsymbol{c}^T\right) f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} f^2(\sigma) \\ &= \boldsymbol{x}^T H^T H \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{d} f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} f^2(\sigma) \\ &= (H\boldsymbol{x})^T (H\boldsymbol{x}) - 2(H\boldsymbol{x})^T (H^{-1})^T \boldsymbol{d} f(\sigma) - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} f^2(\sigma) \\ &= [H\boldsymbol{x} - (H^{-1})^T \boldsymbol{d} f(\sigma)]^T [H\boldsymbol{x} - (H^{-1})^T \boldsymbol{d} f(\sigma)] \\ &\quad - (\boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b}) f^2(\sigma) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{当 } \boldsymbol{x} = 0 \\ (H\boldsymbol{x})^T (H\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} > 0 & \text{当 } f(\sigma) = 0\ \boldsymbol{x} \neq 0 \\ U f^2(\sigma), \text{当 } f(\sigma) \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4\text{-}7)$$

其中

$$\begin{aligned} U &\overset{\text{def}}{=} \left[H \frac{\boldsymbol{x}}{f(\sigma)} - (H^{-1}) \boldsymbol{d}\right]^T \left[H \frac{\boldsymbol{x}}{f(\sigma)} - (H^{-1})^T \boldsymbol{d}\right] \\ &\quad - (\boldsymbol{d}^T B^{-1}) \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} \end{aligned} \quad (4.4\text{-}8)$$

因为

$$\frac{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}}{f(\sigma)} = \frac{\sigma}{f(\sigma)} \geqslant \frac{1}{k}$$

故必须且只须证明,对任意的 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \dfrac{1}{k}$ 有

$$U > 0$$

作满秩线性变换

$$\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{x} - (H^{-1})^T \boldsymbol{d}$$

则 U 化为 $U = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} - \rho$,其中 $\rho = \boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b}$,条件 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geqslant \dfrac{1}{k}$ 等价

于

$$\boldsymbol{c}^T H^{-1}[\boldsymbol{y} + (H^{-1})^T \boldsymbol{d}] \geqslant \frac{1}{k} \tag{4.4-9}$$

故必须且只须证明在 R_y^n 的闭半空间(4.4-9)式上有

$$U > 0$$

易证 $\rho \geqslant 0$,故当 $\boldsymbol{y}=0, U \leqslant 0$,从而 $\boldsymbol{y}=0$ 不在半空间(4.4-9)式上,故当且仅当

$$\boldsymbol{c}^T H^{-1}[0+(H^{-1})^T \boldsymbol{d}] = \boldsymbol{c}^T H^{-1}(H^{-1})^T \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} < \frac{1}{k} \tag{4.4-10}$$

(4.4-10)式即条件(4.4-5)式,如图 4-2 所示。

显然,U 在半空间(4.4-9)式上的最小值在超平面

$$\boldsymbol{c}^T H^{-1}[\boldsymbol{y} + (H^{-1})^T \boldsymbol{d}] = \frac{1}{k}$$

过 $\boldsymbol{y}=0$ 的法线与该平面的交点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 处达到。

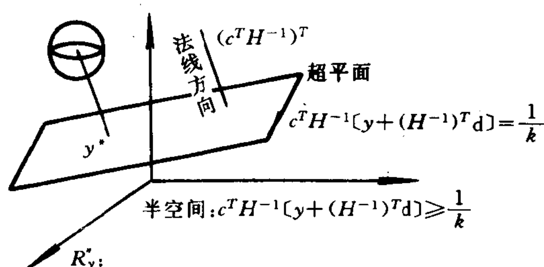


图 4-2

令 $\boldsymbol{y}^* = \lambda(\boldsymbol{c}^T H^{-1})^T$,$\lambda$ 待定。

由
$$\boldsymbol{c}^T H^{-1}[\lambda(\boldsymbol{c}^T H^{-1})^T + (H^{-1})^T \boldsymbol{d}] = \frac{1}{k}$$

解得
$$\lambda = \frac{\frac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}}$$

故
$$U(\boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{y}^{*T} \boldsymbol{y}^* - \rho > 0$$

等价于在半空间(4.4-9)式上,$U>0$,即

$$U(\boldsymbol{y}^*) = [\lambda(\boldsymbol{c}^T H^{-1})^T]^T [\lambda(\boldsymbol{c}^T H^{-1})^T] - \rho$$

$$= \lambda^2 \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b})$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}} \left(\frac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d}\right)^2 - \boldsymbol{d}^T (B^{-1}) \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} > 0 \tag{4.4-11}$$

(4.4-11)即(4.4-6)式,定理 4.4.2 证毕。

仿定理 4.4.2 可证下列推论。

推论 4.4.1 设 A 稳定,$\forall f(\sigma) \in F_{[0,k)}$,取形如(4.2-3)式的 V 函数,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的充要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} \geqslant 0 & (4.4\text{-}12) \\[2ex] \dfrac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}} \left(\dfrac{1}{k} - \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d}\right)^2 - \boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} \geqslant 0 & (4.4\text{-}13) \end{cases}$$

如果取 $k = \infty$,即$\frac{1}{k} = 0$,则有推论 4.4.2。

推论 4.4.2 取形如(4.2-3)式的 V 函数,对于 $\forall f(\sigma) \in F_\infty$,则$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的充要条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} \leqslant 0 & (4.4\text{-}14) \\[2ex] \dfrac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}} (\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d})^2 - \boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} \geqslant 0 & (4.4\text{-}15) \end{cases}$$

文献[75]给出了下列有趣结果。

定理 4.4.3 如仍取(4.2-3)式,则下列条件彼此等价,任何一个都是$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定的充要条件。

$$\text{I} \begin{cases} 1) \quad U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} \geqslant 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = 0 \\ 2) \quad \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} \leqslant 0 \end{cases}$$

此即定理 4.4.1 的条件,

$$\text{II} \quad \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} + \sqrt{\boldsymbol{c}^T B^{-1} C (\boldsymbol{d}^T B^{-1} \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b})} \leqslant 0$$

$$\text{III} \begin{cases} 1) \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} + \eta^T B^{-1} \boldsymbol{d} - \dfrac{(\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{c}} \leqslant 0 \\[2ex] 2) \quad \boldsymbol{c}^T B^{-1} \boldsymbol{d} \leqslant 0 \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}(A^T\boldsymbol{c}+2P\boldsymbol{b})$

为证定理 4.4.3,先证引理 4.4.1。

引理 4.4.1 任意给定对称正定矩阵 B,有

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}\geqslant 0$$

成立,其中 $\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}(A^T\boldsymbol{c}+2P\boldsymbol{b}) \qquad PA+A^TP=-B$

证: 作 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}+\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$

从而有

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}=(\boldsymbol{x}^T,f(\sigma))\begin{bmatrix}B & -\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{d}^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\sigma)\end{pmatrix} \qquad (4.4\text{-}16)$$

因为 B 正定,故 $\det B>0$。

$$\det\begin{vmatrix}B^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\det B^{-1}=(\det B)^{-1}>0$$

且

$$\det\left|\begin{bmatrix}B^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & -\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{d}^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right|$$

$$=\det\begin{vmatrix}E & -B^{-1}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{d}^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\end{vmatrix}=-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}$$

故 $\det\begin{vmatrix}B & -\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{d}^T & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\end{vmatrix}=(-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d})\cdot\det B$

如果 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}<0$,则 $(-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d})>0$,即(4.4-16)式关于 $(\boldsymbol{x},f(\sigma))$ 正定,前面已经证明,这是不可能的,故有

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}\geqslant 0$$

现按 Ⅰ⇒Ⅱ⇒Ⅲ⇒Ⅰ 的顺序完成定理 4.4.3 的证明。

若条件(Ⅰ)成立,是表达式(4.4-8),易证,$\forall\, \boldsymbol{x}_0\neq 0$,当 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0>0$,$U(\boldsymbol{x}_0)>0$。

今选取 $\overline{\boldsymbol{x}}=B^{-1}\boldsymbol{d}-\frac{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-m}{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}}B^{-1}\boldsymbol{c}$ 其中 m 为常数,于是

$$\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-\frac{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-m}{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}}\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}=m \qquad (4.4\text{-}17)$$

故对一切 $m\in(0,+\infty)$，$U(\bar{\boldsymbol{x}})>0$，而

$$U(\bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{x}}^T B\bar{\boldsymbol{x}} - 2\boldsymbol{d}^T\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

$$= [\boldsymbol{d}^T(B^{-1})^T - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}}\boldsymbol{c}^T(B^{-1})^T]$$

$$\cdot B[B^{-1}\boldsymbol{d} - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} B^{-1}\boldsymbol{c}]$$

$$- 2\boldsymbol{d}^T[B^{-1}\boldsymbol{d} - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} B^{-1}\boldsymbol{c}] - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \tag{4.4-18}$$

因为 B 对称正定，故 B^{-1}也对称正定，从而$(B^{-1})^T=B^{-1}$　故

$$U(\bar{\boldsymbol{x}}) = \left[\boldsymbol{d}^T - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}}\boldsymbol{c}^T\right]\left[B^{-1}\boldsymbol{d} - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} B^{-1}\boldsymbol{c}\right]$$

$$- 2\boldsymbol{d}^T\left[B^{-1}\boldsymbol{d} - \frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} B^{-1}\boldsymbol{c}\right] - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - m)^2}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} m^2 - 2\frac{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} m + \frac{(\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

这是关于 m 的二次三项式，它的二次项系数为$\frac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}}>0$，方程 $U(\bar{\boldsymbol{x}})=0$ 的判别式为

$$\Delta = 4\frac{(\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d})^2}{(\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c})^2} - 4\frac{1}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}}\left[\frac{(\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\right]$$

$$= \frac{4}{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})$$

由引理4.4.1可知 $\Delta\geqslant 0$，故 $U(\bar{\boldsymbol{x}})=0$ 有二实根。

$m_1 = \boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} - \sqrt{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})}$ 和 $m_2 = \boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{d} + \sqrt{\boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})}$

由定理条件(Ⅰ)可知 $m_1\leqslant 0$，若 $m_2>0$，则 $\forall\, m\in(0,m_2)$ 有

$$U(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$$

与 $m\in(0+\infty)$ 时，$U(\bar{x})>0$ 矛盾。

故 $m_2=\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\sqrt{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})}\leqslant 0$ 即条件(Ⅱ)成立，这就完成了从(Ⅰ)到(Ⅱ)的证明。

现证 (Ⅱ)⇒(Ⅲ)，若(Ⅱ)式成立，即

$$\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\sqrt{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})}\leqslant 0$$

故有 $\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}\leqslant 0$，此即条件(Ⅲ)中的 2)，从而有

$$-\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}\geqslant\sqrt{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})}\geqslant 0$$

即 $(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2\geqslant\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})$

亦即 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-\dfrac{(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{c}}\leqslant 0$

此即条件Ⅲ中的 1)，这就完成了(Ⅱ)至(Ⅲ)的证明。

最后证：(Ⅲ)⇒(Ⅰ)，为此，只须证(Ⅰ)中的 1)成立即可。

因为 B 正定，故存在非奇异矩阵 H，使 $H^TBJ=E$，从而 $B^{-1}=HH^T$，作满秩线性变换。

$$\boldsymbol{x}=H\left[\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}H^T(A^T\boldsymbol{c}+2p\boldsymbol{b})\right]=h[\boldsymbol{y}+H^T\boldsymbol{d}]$$

以 $\boldsymbol{y}_0$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$对应的向量，由 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0=0$ 得

$$\boldsymbol{c}^TH\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{c}^THH^T\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}^TH\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d}=0$$

从而有

$$(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2=(\boldsymbol{c}^TH\boldsymbol{y}_0)^2$$

由 Cauchy 不等式

$$(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2\leqslant\|\boldsymbol{c}^TH\|^2\cdot\|\boldsymbol{y}_0\|^2$$

即
$$\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{y}_0\geqslant\frac{(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2}{(\boldsymbol{c}_TH)(H^T\boldsymbol{c})}=\frac{(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{c}}$$

于是由(Ⅲ)中的 1)知，当 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0=0$，有

$$U(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0^T\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{c}\geqslant\frac{(\boldsymbol{c}^TB^{-1}\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{c}^TB_0^{-1}\boldsymbol{c}}-\boldsymbol{d}^TB^{-1}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\geqslant 0$$

即(Ⅰ)中的条件 1)成立。

§5 Popov 频率判据[32]及改进[83]

在经典的线性定常控制系统中，根据 Cauchy 幅角原理而发展起来的 Nyquist 频率判据以及随之而出现的一系列类似的判据既有明确的物理意义，又有直观的几何解释，罗马尼亚数学家 Popov 将 Nyquist 频率判据推广到非线性控制系统，得到了著名的 Popov 频率判据。

这里只叙述其 Popov 准则的结论，详细的证明过程请读者参考文献[32]。

定理 4.5.1 [Popov 准则[32]]设 A 稳定，且如果存在一个实数 q，使得

$$\mathrm{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0\ (\text{当 } \omega\geqslant 0) \tag{4.5-1}$$

则(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定，这里

$$W(i\omega)\overset{\text{def}}{=}\frac{K(i\omega)}{D(i\omega)}=\frac{\mathrm{Det}\begin{vmatrix} i\omega E-A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}^T & 0\end{vmatrix}}{\mathrm{Det}(i\omega E-A)} \tag{4.5-2}$$

设 A 有零实部特征值，但无正实部特征值，且设(4.1-3)式是极限稳定的，即 $\forall\varepsilon>0$，当 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma$ 时，(4.1-3)式的零解全局稳定。

定理 4.5.2 设系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}f(\sigma)\\ \sigma=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{4.5-3}$$

在奇异情况下极限稳定，如果存在实数 q 使得

$\mathrm{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\dfrac{1}{k}>0,\omega\geqslant 0$，则对每个满足

$$0<\varepsilon\leqslant\frac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant k,(\sigma\neq 0)$$

的连续函数 $f(\sigma)$，(4.5-3)式的零解全局渐近稳定。

这时,也可以视(4.5-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[\varepsilon,k]$内绝对稳定,其中 $\varepsilon>0$ 为任意小的数。

定理4.5.1、定理4.5.2 中的 k 为任意正数,当 $k\to\infty$,读者不难得到在 F_∞内绝对稳定的 Popov 准则的条件。

由于频率特征曲线 $\mathrm{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\dfrac{1}{k}$ 的取值范围为 $\omega\in[0,+\infty]$,这是一个无穷区间,无论从理论或应用的角度上讲都是不方便的。

文献[83]吸收了文献[81、82]的思想,将频率特征曲线的取值范围$[0,+\infty]$改为有限区间$[0,\rho]$,改进了 Popov 准则,这里予以介绍。

仍考虑直接控制系统(4.1-3)式,记

$$W(i\omega)\overset{\text{def}}{=}-c^T(i\omega E-A)^{-1}b\overset{\text{def}}{=}\frac{K(i\omega)}{D(i\omega)}$$

其中 $D(i\omega)\overset{\text{def}}{=}\det(i\omega E-A)$ 并记

$$X(\omega)\overset{\text{def}}{=}ReW(i\omega)=\frac{Re\{K(i\omega)\bar{D}(i\omega)\}}{|D(i\omega)|^2}$$

$$Y(\omega)\overset{\text{def}}{=}ImW(i\omega)=\frac{Im\{K(i\omega)\bar{D}(i\omega)\}}{|D(i\omega)|^2}\overset{\text{def}}{=}\frac{H(\omega)}{|D(i\omega)|^2}$$

假设实系数多项式

$$H(\omega)=h_{2n}+h_{2n-1}\omega+\cdots+h_1\omega^{2n-1}\tag{4.5-4}$$

令 $\rho=1+\max\limits_{2\leqslant i\leqslant 2n}\left|\dfrac{h_i}{h_1}\right|$

引理 4.5.1[83] $H(\omega)=0$ 的零点全部囿于 $|z|<\rho=1+\max\limits_{2\leqslant i\leqslant 2n}\left|\dfrac{h_i}{h_1}\right|$ 内。

这是根的有限定理,证明可参见有关高等代数。

引理 4.5.2 令 $f(\sigma)=\varepsilon\sigma$ $(0\leqslant\varepsilon\leqslant k)$,代入(4.1-3)式,则对应的线性系统渐近稳定的充要条件是频率特性曲线 $W(i\omega)$,$0\leqslant\omega\leqslant\rho$ 与实轴上的射线$(-\infty,-\dfrac{1}{k})$不相交。

证:由文献[57]中的定理1.3.6知,此线性化系统渐近稳定的充要条件为 $W(i\omega)$ $(-\infty\leqslant\omega\leqslant\infty)$与$(-\infty\ -\frac{1}{k})$不相交,故引理4.5.2的必要性显然成立。

因为 $W(i\omega)=X(\omega)+iY(\omega)$,由上述根的界值引理4.5.1,$H(W)$的所有根满足$|\omega_j|<\rho$, $1\leqslant j\leqslant 2n-1$,从而当$|\omega|>\rho$时,$H(\omega)\neq 0$,即 $Y(\omega)\neq 0$,也当 $|\omega|>\rho$ 时,曲线 $W(i\omega)$ 与实轴不相交,又由

$$X(\omega)=\frac{K(i\omega)D(-i\omega)+K(-i\omega)D(i\omega)}{2D(i\omega)D(-i\omega)}$$

得到 $X(-\omega)=X(\omega)$,故若 $W(i\omega)$ $(0\leqslant\omega\leqslant\rho)$与$(-\infty,-\frac{1}{k})$不相交,则 $W(i\omega)$ $(-\rho\leqslant\omega\leqslant 0)$ 也与 $(-\infty,-\frac{1}{k})$ 不相交,故 $W(i\omega)$ $(-\infty\leqslant W\leqslant+\infty)$ 与$(-\infty,\frac{1}{k})$也不相交,充分性证毕。

引理4.5.2实际给出了(4.1-3)式在Hurwitz角域$[0,\ k]$内绝对稳定的必要条件。

在讨论(4.1-3)式的绝对稳定性之前,先引进一些记号,设

$$\boldsymbol{X}^*(\omega)=\mathrm{Re}W(i\omega)=\frac{\mathrm{Re}\{K(i\omega)\bar{D}(i\omega)\}}{|D(i\omega)|^2}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{A(\omega)}{E(\omega)}$$

$$\boldsymbol{Y}^*(\omega)=\omega\mathrm{Im}W(i\omega)=\frac{\omega\mathrm{Im}\{K(i\omega)\bar{D}(i\omega)\}}{|D(i\omega)|^2}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{B(\omega)}{E(\omega)}$$

定理4.5.3 若存在一个实数 q,使得

$$\mathrm{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0\quad,\omega\in[0,\rho]\qquad(4.5\text{-}5)$$

则系统(4.1-3)式的零解在Hurwitz角域$[0,\ k]$内绝对稳定,这里$\rho=1+\max\limits_{2\leqslant i\leqslant 2n+1}\left|\frac{p_i}{p_1}\right|$, $p_i(i=1,2,\cdots 2\ n+1)$ 为多项式 $P(\omega)=A(\omega)-qB(\omega)+\frac{1}{k}E(\omega)$ 的 $2\ n+1$个系数。

证:条件(4.5-5)式等价于

$$\boldsymbol{X}^*(\omega)-q\boldsymbol{Y}^*(\omega)+\frac{1}{k}>0,\ \omega\in[0,\rho] \tag{4.5-6}$$

即
$$\frac{A(\omega)}{E(\omega)}-q\frac{B(\omega)}{E(\omega)}+\frac{1}{k}>0,\ \omega\in[0,\rho]$$

$$\frac{A(\omega)-qB(\omega)+\frac{1}{k}E(\omega)}{E(\omega)}=\frac{P(\omega)}{E(\omega)}>0,\omega\in[0\ ,\rho]$$

由 ρ 的定义及根的界值定理,有 $P(\omega)\neq 0$,当 $\omega\geqslant\rho$ 时,又 $P(\rho)>0$, 从而 $P(\omega)>0$,当 $\omega>\rho$, 此即

$$\boldsymbol{X}^*(\omega)-q\boldsymbol{Y}^*(\omega)+\frac{1}{k}=\frac{P(\omega)}{E(\omega)}>0,\ \text{当}\ \omega>\rho\ \text{时},$$

结合(4.5-6)式便有

$$Re(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0,\ \text{对}\ \omega\geqslant 0$$

故系统(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定。

定理 4.5.3 较 Popov 定理 4.5.1 较大地减少了计算量,从几何上看,只要频率特性曲线

$$W^*(i\omega)=X^*(\omega)+iY^*(\omega)$$

对 $\omega\in[0,\rho]$,其图像在过$[-\frac{1}{k},0]$的斜率为 $1/q$ 的直线右边,则系统(4.1-3)式的零解绝对稳定。

但定理 4.5.3 中的 ρ 依赖于 q 和 k , q 是一个存在性的参数,故确定 ρ 仍然有困难,为此要进一步克服上述不足。

给定 $k>0$,设

$$G(\omega)=A(\omega)+\frac{1}{k}E(\omega)=\boldsymbol{c}_{2n}+\boldsymbol{c}_{2n-1}\omega+\cdots+\boldsymbol{c}_0\omega^{2n}$$

$$B(\omega)=\boldsymbol{b}_{2n}+\boldsymbol{b}_{2n-1}\omega+\cdots+\boldsymbol{b}_1\omega^{2n-1}+\boldsymbol{b}_0\omega^{2n}$$

$$\rho_1=1+\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}\left|\frac{\boldsymbol{c}_i}{\boldsymbol{c}_0}\right|,\qquad \rho_2=1+\max_{1\leqslant i\leqslant 2n}\left|\frac{\boldsymbol{b}_i}{\boldsymbol{b}_0}\right|$$

定理 4.5.4 若条件

1) $\boldsymbol{b}_0<0$ (或 $\boldsymbol{b}_0=0$, $\boldsymbol{b}_1<0$) ,且存在 $q\geqslant 0$, 使得

$$\operatorname{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0,\ \omega\in[0,\ \rho]\quad(4.5\text{-}7)$$

2) $\boldsymbol{b}_0>0$ （或 $\boldsymbol{b}_0=0$,$\boldsymbol{b}_1>0$),且存在 $q\leqslant 0$ 使得

$$\operatorname{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0,\ \omega\in[0,\ \rho]\quad(4.5\text{-}8)$$

中有一个成立,这里 $\rho=\max(\rho_1,\rho_2)$ 则系统(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,\ k]$内绝对稳定。

证:(4.5-7)式等价于

$$\frac{A(\omega)-qB(\omega)+\frac{1}{k}E(\omega)}{E(\omega)}>0,\omega\in[0,\ \rho]$$

故只须证明

$$A(\omega)-qB(\omega)+\frac{1}{k}E(\omega)=G(\omega)-qB(\omega)>0,\ \text{当}\ \omega>\rho \quad (4.5\text{-}9)$$

定理结论成立。

若条件 1)成立,则由 ρ 的定义,有:$G(\omega)\neq 0,B(\omega)\neq 0$,当 $\omega>\rho$ 时;又由 $\boldsymbol{b}_0<0$(或 $\boldsymbol{b}_0=0,\boldsymbol{b}_1<0$),故当 ω 充分大时,$B(\omega)<0$, 而 $A(\omega)$比 $E(\omega)$至少低一次,故 $G(W)$的最高次项系数为 $\frac{1}{k}$,因此当 $\omega\gg 1$,有 $G(\omega)>0$,从而 $G(\omega)>0$, $B(\omega)<0$, 当 $\omega>\rho$ 时, 故(4.5-8)式成立。类似地,若 2)成立,当 $\omega>\rho$,(4.5-9)式成立,定理 4.5.4 证毕。

下面进一步建立 ρ 不依赖于 q、k 的判据。

设

$$A(\omega)=a_{2n-1}+a_{2n-2}\omega+\cdots+a_1\omega^{2n-2}+a_0\omega^{2n-1}$$

其中 a_0,a_1 至少有一个不等于零,$\rho_3=1+\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 2_{n-1}}\left|\frac{a_i}{a_0}\right|$

定理 4.5.5 若条件

1) $a_0>0$ （或 $a_0=0$, $a_1>0$), $\boldsymbol{b}_0<0$,(或 $\boldsymbol{b}_0=0,\boldsymbol{b}_1<0$), 且存在 $q\geqslant 0$,使

$$\operatorname{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0,\ 对\ \omega\in[0\ ,\rho] \tag{4.5-10}$$

2) $a_0<0$ （或 $a_0=0,a_1<0$），$\boldsymbol{b}_0>0$ （或 $\boldsymbol{b}_0=0,\boldsymbol{b}_1>0$），且存在 $q\leqslant 0$,使

$$\operatorname{Re}\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0,\forall\,\omega\in[0,\rho] \tag{4.5-11}$$

中有一个成立,这里 $\rho=\max\{\rho_2,\rho_3\}$，则(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域 $[0,k]$内绝对稳定。

证:若条件 1)成立,(4.5-10)式等价于

$$X^*(\omega)-qY^*(\omega)+\frac{1}{k}$$
$$=\frac{A(\omega)}{E(\omega)}-q\frac{B(\omega)}{E(\omega)}+\frac{1}{k}>0 \qquad \forall\,\omega\in[0\ ,\rho] \tag{4.5-12}$$

当 $\omega>\rho$ 时,有 $\frac{A(\omega)}{E(\omega)}-q\frac{B(\omega)}{E(\omega)}+\frac{1}{k}>\frac{1}{k}>0$。结合(4.5-12)式,有

$$Re\{(1+iq\omega)W(i\omega)\}+\frac{1}{k}>0\quad ,当\ \omega\geqslant 0。$$

故系统(4.1-3)式的零解绝对稳定。若条件 2)成立,类似地可证明定理结论成立。

改进的 Popov 准则只须作出自变量在$[0,\ \rho]$内变化的频率特性曲线,故完全可由计算机实现,定理 4.5.4、定理 4.5.5 较标准的 Popov 频率判据条件稍强,但应用起来方便多了。

到此,已介绍完了研究 Лурье 问题的主要方法和结论,即积分项加二次型的 Лурье 型 Ляпунов 函数法,及在此函数基础上的 S方法,还有独特的 Popov 方法,前人得到这些方法和结果的同时,也发展了很多的数学知识,例如为了弄清楚这些方法和结果之间的彼此等价与否的问题,勾通了复变函数、数学分析、矩阵论之间很多知识的内在联系,特别发展了正实函数理论,从专著[57]中可得到如下的等效关系。

Лурье 型 V 函数法[定理 4.2.1]⇔定理 4.4.1⇔定理 4.4.2 ⇔定理 4.4.3⊃Лурье 型 V 函数⊕S 方法[定理 4.3.1,定理

4.3.2]⇔Popov 准则(定理 4.5.1)。

§6 实用的构造性代数判据

无论是采用 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}+\beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 还是这种函数加 S 方法,也无论是 Popov 方法,都是存在性的描述性的理论结果,都是充分条件,当 n 较大时,计算量都相当大,而这种计算又是试探性的,如解 Ляпунов 方程,求出的 P 不合适时,又得重来,从应用的角度讲,验证方便的简捷的代数判据,更受实际工作者欢迎,特别设计一个这样的控制系统,使之满足稳定性代数条件,是很方便的,本节介绍一些构造性代数简捷判据,它们都不再依赖于未知的存在性的矩阵或参数。

1. 基于 Ляпунов 函数的代数判据

仍考虑(4.1-3)式,令

$$g(\sigma)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{f(\sigma)}{\sigma} & \text{当 } \sigma\neq 0\\ 0 & \sigma=0\end{cases}$$

$$F_{ij}(\sigma)\overset{\text{def}}{=}(a_{ij}+b_ic_jg(\sigma))$$

则(4.1-3)式可化为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^n F_{ij}(\sigma)x_j \tag{4.6-1}$$

设 $0\leqslant g(\sigma)\leqslant k<\infty$ 令

$$\tilde{b}_{ii}=\begin{cases}a_{ii} & \text{当 } b_ic_i\leqslant 0\\ a_{ii}+b_ic_ik & \text{当 } b_ic_i>0\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots n)$$

$$\tilde{b}_{ij}=\tilde{b}_{ji}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\max[\,|a_{ij}+a_{ji}|,k\,|b_ic_j+b_jc_i|\,]\\ \text{当}(a_{ij}+a_{ji})(b_ic_j+c_jb_i)\leqslant 0 \quad i\neq j\\ \dfrac{1}{2}\,|a_{ij}+a_{ji}+k(b_ic_j+b_jc_i)|\\ \text{当}(a_{ij}+a_{ji})(b_ic_j+b_jc_i)>0 \quad (i,j=1,2,\cdots n)\end{cases}$$

判据 4.6.1　若矩阵 $\hat{B}(b_{ij})_{n\times n}$ 为 Hurwitz 矩阵，则(4.6-1)式零解在 Hurwitz 角域$[0, k]$内绝对稳定。

作 Ляпунов 函数 $V(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$便可证明结论，略。

判据 4.6.2　若矩阵 $-\widetilde{A}(\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$为$M$ 矩阵，则(4.6-1)式零解在 Hurwitz 角域$[0, k]$内绝对稳定。

这里
$$\tilde{a}_{ii}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}a_{ii} & \text{当 } b_ic_i\leqslant 0\\ a_{ii}+kb_ic_i & \text{当 } b_ic_i>0\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots n$$

$$\tilde{a}_{ij}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\max\{|a_{ij}|,k|b_ic_j|\} & \text{当 } a_{ij}b_ic_j\leqslant 0\\ |a_{ij}+kb_ic_j| & \text{当 } a_{ij}b_ic_j>0\ (i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots n)\end{cases}$$

作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\eta_i|x_i|,\qquad \text{可证明结论成立。}$$

其中 η_i满足
$$\eta_j\tilde{a}_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\tilde{a}_{ij}\eta_i<0,\quad j=1,\cdots n$$

下面更进一步考虑更弱的充分条件，不失一般性，不妨设

$b_ic_i<0\quad(i=1,2,\cdots i_1)\quad b_ic_i>0\quad(i=i_1+1,\cdots i_2)$

$b_i=c_i=0\quad(i=i_2+1,\cdots i_3)\quad b_i=0,\ c_i\neq 0,(i=i_3+1,\cdots i_4)$

$b_i\neq 0\quad c_i=0\quad(i=i_4+1,\cdots n)\quad(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant i_3\leqslant i_4\leqslant n)$

判据 4.6.3　若矩阵$[R(r_{ij})_{n\times n}+S(s_{ij})_{n\times n}]$负定，则(4.6-1)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定。

$$\text{这里 } r_{ij}=r_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{c_i}{b_i}a_{ii}, & i=j=1,2,\cdots i_1\\[2mm] \dfrac{c_i}{b_i}a_{ii}, & i=j=i_1+1,\cdots i_2\\[2mm] a_{ii}, & i=j=i_2+1,\cdots n\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{r_{ii}a_{ij}}{a_{ii}}+\dfrac{r_{jj}a_{ji}}{a_{jj}}\right], & i\neq j,i,j=1,2,\cdots n\\ \text{(当 } a_{ii}=0 \text{ 分子分母中都有 } a_{ii}\text{，假定相约后为 1)}\end{cases}$$

$$s_{ij}=\begin{cases}0, i=j=1,2,\cdots i_1, i_1+1,\cdots, i_2\\ 0, i\neq j \quad i,j=1,2,\cdots n\\ 3(i_2-i_1)kc_i^2, i=j=i_2+1,\cdots i_3\\ \dfrac{3}{4}(i_4-i_3)kc_i^2, i=j=i_3+1,\cdots i_4\\ \dfrac{3}{4}(n-i_4)kb_i^2, i=j=i_4+1,\cdots n\end{cases}$$

可作 Ляпунов 函数

$$V(x)=-\sum_{i=1}^{i_1}\frac{c_i}{b_i}x_i^2+\sum_{i=i_1+1}^{i_2}\frac{c_i}{b_i}x_i^2+\sum_{i=i_1+1}^{n}x_i^2$$

完成证明。详细推导,留给读者。

判据 4.6.4 若 $a_{ii}<0$ $(i=1,2,\cdots n)$,矩阵 $G(g_{ij})_{n\times n}$ 负定,则(4.6-1)式的零解在 Hurwitz 角域$[0, k]$内绝对稳定。

这里
$$g_{ij}=g_{ji}=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}-a_{ii}^2 \quad 当\ b_ic_i\leqslant 0\\ -a_{ii}^2-a_{ii}b_ic_ik \quad 当\ b_ic_i>0\end{array}\right\} i=j=1,2,\cdots n\\ \max\left[\dfrac{1}{2}|a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji}|, \dfrac{1}{2}k|b_ic_ja_{ii}+b_jc_ia_{jj}|\right]\\ \quad 当(a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji})(b_ic_ja_{ii}+b_jc_ia_{jj})\leqslant 0\\ \quad i\neq j, i,j=1,2,\cdots n,\\ \dfrac{1}{2}|[a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji}+k(b_ic_ja_{ii}+b_ja_ia_{ji})]|\\ \quad 当(a_{ii}a_{ij}+a_{jj}a_{ji})(b_ic_ja_{ii}+b_jc_ia_{jj})>0\\ \quad i\neq j, i,j=1,2,\cdots n\end{cases}$$

作 $V(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{-a_{ii}}{2}x_i^2$,可证$\frac{dV}{dt}|_{(4.6\text{-}1)}$负定,完成证明。

判据 4.6.5 若存在 n 个常数 $r_i>0$ $(i=1,2,\cdots n)$ 及 $\alpha>0$,使得 $r_ib_i=-\alpha c_i(i=1,2,\cdots n)$,且矩阵 $U(u_{ij})_{n\times n}$负定,则(4.6-1)式的零解绝对稳定。

这里 $$u_{ij}=u_{ji}=\frac{1}{2}(r_ia_{ij}+r_ja_{ji}) \quad i,j=1,2,\cdots n$$

作 $V(x)=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i^2$,可证 $\frac{dV}{dt}|_{(4.6\text{-}1)}$负定而完成证明。

下面考虑一类简化系统， 称为第一标准型。

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i x_i + f(\sigma), \rho_i > 0,\ i = 1, \cdots n \qquad (4.6\text{-}2)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, i = 1, 2, \cdots n, \quad f(0) = 0$$

$$0 < \sigma f(\sigma) \leqslant k\sigma^2, \sigma \neq 0, 0 < k \leqslant \infty$$

可以适当重新编号,不防设

$$c_i \begin{cases} > 0 & \text{当 } i = 1, \cdots i_1 \\ = 0 & \text{当 } i = i_1 + 1, \cdots, i_2 \\ < 0 & \text{当 } i = i_2 + 1, \cdots n \end{cases}$$

$$1 < i_1 \leqslant i_2 \leqslant n$$

判据 4.6.6 若 $\rho_i > 2k(n - i_2)c_i (i = i_2 + 1, \cdots n)$,则(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域[0, k]内绝对稳定。

可以作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{i_1} c_i x_i^2 + \sum_{i=i_1+1}^{i_2} \varepsilon_i x_i^2 + \sum_{i=i_2+1}^{n} c_i x_i^2$$

其中

$$0 < \varepsilon_i < \frac{2\rho_i}{k(i_2 - i_1)}$$

容易证明,条件可保证$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.6\text{-}2)}$负定,从而结论成立。

推论 4.6.1 若 $c_i \leqslant 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域[0, k]内绝对稳定;

推论 4.6.2 若 $c_i < 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则(4.6-2)式的零解绝对稳定。

下面考虑一类临界情况,在 (4.6-2)式中,设有一个 $\rho_n = 0$,其它的 $\rho_i > 0 (i = 1 \cdots n - 1)$。

判据 4.6.7 若 $\rho_i > 0\ (i = 1, \cdots n - 1)$, $\rho_n = 0$, $c_n < 0$

$$c_i < \frac{\rho_i}{2k(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n - 1)$$

则(4.6-2)式的零解在[0, k]内绝对稳定。

证:关于未知数 y_i 的二次代数不等式

$$k(n-1)y_i^2+2[k(n-1)c_i-\rho_i]y_i+k(n-1)c_i^2<0\quad(i=1,2,\cdots n-1)\tag{4.6-3}$$

有正数解,当且仅当 $c_i<\dfrac{\rho_i}{2k(n-1)}\quad(i=1,2,\cdots n-1)$

设 $y_i=r_i(i=1,2,\cdots n-1)$ 是(4.6-3)式的任意一组正数解。

构造 Ляпунов 函数

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n-1}r_ix_i^2-c_nx_n^2$$

$$\begin{aligned}
G(x):=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.6\text{-}2)}&=-2\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_ix_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}r_ix_if(\sigma)-2c_nx_nf(\sigma)\\
&=-2\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_ix_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}(r_ic_i)x_if(\sigma)-\sum_{i=1}^{n}2c_ix_if(\sigma)\\
&\leqslant-2\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_ix_i^2+\alpha\,|\sqrt{k}\sum_{i=1}^{n-1}(r_i+c_i)x_i\,|\,x\,|\,\frac{f(\sigma)}{\sqrt{k}}\,|-2\sigma f(\sigma)\\
&\leqslant-2\sum_{i=1}^{n-1}r_i\rho_ix_i^2+k(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}(r_i+c_i)^2x_i^2+\sigma f(\sigma)-2\sigma(\sigma)\\
&\leqslant-\sum_{i=1}^{n-1}[k(n-1)(r_i+c_i)^2-2r_i\rho_i]x_i^2-\sigma f(\sigma)\\
&=-\sum_{i=1}^{n-1}\{k(n-1)r_i^2+2[k(n-1)c_i-\rho_i]r_i\\
&\quad+k(n-2)c_i^2\}x_i^2-\sigma f(\sigma)\\
&\overset{\mathrm{def}}{=}W(x)\leqslant0
\end{aligned}$$

因为 $G(0)=W(0)=0$, $G(x)\leqslant W(x)\leqslant0$, 若有 $\hat{x}$ 使得 $W(\hat{x})=0$, 故有 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\hat{x}_i^2=0$,因为当 $\sigma\neq0$, $\sigma f(\sigma)>0$,从而有 $\sigma f(\sigma)=0$,即 $c_n\hat{x}_nf(c_n\hat{x}_n)=0$。于是 $c_n\hat{x}_n=0$, 而 $c_n<0$, 故应有 $\hat{x}_n=0$, 从而 $\hat{x}=0$,故 $W(x)$负定,由此推知 $G(X)$负定,从而(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,\ k]$内绝对稳定。

推论 4.6.3 若 $\rho_i>0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$, $\rho_n=0, c_n<0, c_i\leqslant 0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$, 则(4.6-3)式的零解在 Hurwitz 角域$[0, k]$内绝对稳定。

推论 4.6.4 若 $\rho_i>0$ $(i=1,2,\cdots n-1)$, $\rho_n=0, c_i<0$, $i=1,2,\cdots n$, 则(4.6-3)式的零解绝对稳定。

2. 基于 Popov 准则的代数判据[78,83]

判据 4.6.8 考虑特殊的(4.1-3)式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}f(\sigma)\\ \sigma=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{4.6-4}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & \\ \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\lambda\end{pmatrix} \quad \lambda>0$$

(4.6-4)式的零解绝对稳定的充要条件是

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0, \qquad \boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$$

证:必要性已在本章§1 定理 4.1.1 中证明了。

现证充分性,由 Popov 准则,若存在常数 $q\geqslant 0$,使得

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)W(i\omega)\}\geqslant 0 \qquad 当\ \omega\geqslant 0 \tag{4.6-5}$$

这里 $W(z)=-\boldsymbol{c}^T(Iz-A)^{-1}\boldsymbol{b}$, 则(4.6-4)式的零解是绝对稳定的。

(4.6-5)式可以等价地改写为

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^TA_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\}\leqslant 0, \quad 当\ \omega\geqslant 0$$

这里 $A_{i\omega}=i\omega I-A$, 此时有

$$A_{i\omega}=\begin{pmatrix}i\omega+\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & i\omega+\lambda & & & 0\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & i\omega+\lambda\end{pmatrix}$$

$$A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{i\omega+\lambda} & \frac{1}{(i\omega+\lambda)^2} & 0\cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{i\omega+\lambda} & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \frac{1}{i\omega+\lambda}\end{pmatrix}$$

这样 $c^TA_{i\omega}^{-1}b=(c_1,c_2,\cdots c_n)A_{i\omega}^{-1}(b_1,\cdots b_n)^T$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jc_j}{i\omega+\lambda}+\frac{c_1b_2}{(i\omega+\lambda)^2}$$

$$=\frac{c^Tb(\lambda-i\omega)}{\lambda^2+\omega^2}+\frac{c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)-2c_1b_2\omega\lambda i}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2}$$

这样可推出

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^TA_{i\omega}^{-1}b\}$$

$$=\frac{c^Tb\lambda}{\lambda^2+\omega^2}+\frac{c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)}{(\lambda^2-\omega^2)^2+4\omega^2\lambda^2}+\frac{q\omega^2(c^Tb)}{\lambda^2+\omega^2}$$

$$+\frac{2q\omega^2c_1b_2\lambda}{(\lambda^2-\omega^2)+4\omega^2\lambda^2}:=\frac{F(\omega^2)}{(\lambda^2+\omega^2)[(\lambda^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2]}\quad(4.6\text{-}6)$$

这里

$$\begin{aligned}F(\omega^2)=&[(\lambda^2-\omega^2)+4\omega^2\lambda^2][(c^Tb)\lambda+q\omega^2(c^Tb)]\\&+[\lambda^2+\omega^2][c_1b_2(\lambda^2-\omega^2)+2q\omega^2c_1b_2\lambda]\\=&(c^Tb)[\lambda^4+2\omega^2\lambda^2+\omega^4][\lambda+q\omega^2]\\&+c_1b_2(\lambda^4-\omega^4)+2q\lambda^3\omega^2c_1b_2+2q\omega^4c_1b_2\lambda\\=&q(c^Tb)\omega^6+[(c^Tb)\lambda+2(c^Tb)\lambda^2q-c_1b_2+2qc_1b_2\lambda]\omega^4\\&+[(c^Tb)\lambda^4q+2(c^Tb)\lambda^3+2q\lambda^3c_1b_2]\omega^2\\&+[(c^Tb)\lambda^5+c_1b_2\lambda^4]\end{aligned}\quad(4.6\text{-}7)$$

条件 $c^Tb\leqslant0$ 和 $-c^TA^{-1}b=\frac{1}{\lambda^2}[(c^Tb)\lambda+c_1b_2]\leqslant0$ 蕴涵 $F(\omega^2)$ 的第一项及常数项是非正的，现在讨论 ω^4 和 ω^2 项。

1)若 $c_1b_2\leqslant0$，则显然对任何 $q\geqslant0$

$$(c^Tb)x^4q+2(c^Tb)\lambda^3+2q\lambda^3c_1b_2\leqslant0$$

选择 $q>\frac{1}{2\lambda}$ 就推出

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda+2(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda^2q-\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2+2q\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2\lambda\\&=(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda+2(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda^2q+\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2(2q\lambda-1)\leqslant 0\end{aligned}$$

因此 ω^4 和 ω^2 项的系数是非正的。

2)若 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2>0$,则选择 $q=0,\omega^4$ 项的系数为

$(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda-\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{b}_2\leqslant 0$, ω^2项的系数为 $2(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b})\lambda^3\leqslant 0$

总之,在任何情况下可选取 $q\geqslant 0$,使得 $F(\omega^2)\leqslant 0$,因此(4.6-4)式的零解是绝对稳定的。

推论 4.6.5 若存在一个相似变换,将直接控制系统(4.1-3)变成(4.6-4)形式,则(4.1-3)式的零解绝对稳定的充要条件是 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0$, $\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。

证:只须证明 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$ 和$\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}$ 在相似变换下是不变的。

在满秩线性变换 $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$ 下, $B\in R^{n\times n}$,则(4.1-3)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=B^{-1}AB\boldsymbol{y}+B^{-1}\boldsymbol{b}f(\boldsymbol{c}^TB\boldsymbol{y})=\widetilde{A}\boldsymbol{y}+\widetilde{\boldsymbol{b}}f(\hat{c}^T\boldsymbol{y})$$

这里

$$\widetilde{A}=B^{-1}AB,\ \widetilde{\boldsymbol{b}}=B^{-1}\boldsymbol{b},\ \widetilde{\boldsymbol{c}}=B^T\boldsymbol{c},$$

这样

$$\widetilde{\boldsymbol{c}}^T\widetilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{c}^TBB^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{c}}^T\widetilde{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{c}^TBB^{-1}A^{-1}BB^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}$$

故推论的结论成立。

定理 4.6.1 在 (4.6-4)式中,设

$$A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda I_1&0\\0&-\rho I_2\end{bmatrix}$$

这里 $\lambda>0,\rho>0,I_1\in R^{n_1\times n_1}$, $I_2\in R^{n_2\times n_2}$,是单位矩阵,$n_1+n_1=n$,则(4.6-4)式零解绝对稳定的充要条件是 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0,\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$。

证:必要性已证,只证充分性。从

$$A_{i\omega}=\begin{bmatrix}(i\omega+\lambda)I_1&0\\0&(i\omega+\rho)I_2\end{bmatrix}\qquad A_{i\omega}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{i\omega+\lambda}I_1&0\\0&\frac{1}{i\omega+\rho}I_2\end{bmatrix}$$

取 $\hat{c}_1=\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \boldsymbol{c} \qquad \hat{c}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}_{n\times n} \boldsymbol{c}$

$$\hat{b}_1=\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{b} \qquad \hat{b}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{b}$$

则
$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b} &= \frac{\hat{c}_1^T\hat{b}_1}{i\omega+\lambda}+\frac{\hat{c}_2^T\hat{b}_2}{i\omega+\rho} \\ &= \frac{\hat{c}_1^T\hat{b}_1\lambda - i\hat{c}_1^T\hat{b}_1\omega}{\omega^2+\lambda^2}+\frac{\hat{c}_2^T\hat{b}_2\rho - i\hat{c}_2^T\hat{b}_2\omega}{\omega^2+\rho^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\} &= \frac{\hat{c}_1^T\hat{b}_1\lambda + q\omega^2\hat{c}_1^T\hat{b}_1}{\omega^2+\lambda^2}+\frac{\hat{c}_2^T\hat{b}_2\rho + q\omega^2\hat{c}_2^T\hat{b}_2}{\omega^2+\rho^2} \\ &= \frac{F(\omega^2)}{(\omega^2+\lambda^2)(\omega^2+\rho^2)}\end{aligned}$$

这里 $F(\omega^2)=q(\hat{c}_1^T\hat{b}_1+\hat{c}_2^T\hat{b}_2)\omega^4+[(\hat{c}_1^T\hat{b}_1\lambda+\hat{c}_1^T\hat{b}_2\rho)$

$$+q(\hat{c}_1^T\hat{b}_1\rho^2+\hat{c}_2^T\hat{b}_2\lambda^2)]\omega^2+\left(\frac{\hat{c}_1^T\hat{b}_1}{\lambda}+\frac{\hat{c}_2^T\hat{b}_2}{\rho}\right)\lambda^2\rho^2$$

由条件有

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} = \hat{c}_1^T\hat{b}_1+\hat{c}_2^T\hat{b}_2 \leqslant 0$$

$$-\boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\hat{c}_1^T\hat{b}_1}{\lambda}+\frac{\hat{c}_2^T\hat{b}_2}{\rho} \leqslant 0$$

易证存在 $q \geqslant 0$ 使得

$$(\hat{c}_1^T\hat{c}_1\lambda+\hat{c}_2^T\hat{b}_2\rho)+q(\hat{c}_1^T\hat{b}_1\rho^2+\hat{c}_2^T\hat{b}_2\lambda^2)\leqslant 0$$

即存在 $q\geqslant 0$ 满足 $F(\omega^2)\leqslant 0$，从而(4.6-4)式的零解是绝对稳定的。

推论 4.6.6 设 $A=A^T$，且 A 最多有二个不同的特征值，且对应着简单的初等因子，则(4.6-4)式的零解绝对稳定的充要条件是

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0 \qquad \boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$$

定理 4.6.2 设 $\boldsymbol{b}$ 是 A 的特征向量，或 $\boldsymbol{c}$ 是 A 的特征向量，则(4.6-4)式的零解绝对稳定的充要条件是 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}\leqslant 0$。

证：必要性显然，只须证充分性。首先，设 $A\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda>0)$则

$$(i\omega I - A)\boldsymbol{b} = [\lambda + i\omega]\boldsymbol{b} \qquad \omega \geqslant 0$$

$$(i\omega I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda + i\omega}\boldsymbol{b}$$

这样 $\boldsymbol{c}^T(i\omega I - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}}{i\omega + \lambda}$，由条件 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \leqslant 0$

有 $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{c}^T(i\omega I - A^{-1})\boldsymbol{b}\} = \dfrac{\lambda \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}}{\lambda^2 + \omega^2} \leqslant 0$

从而(4.6-4)式的零解绝对稳定。

其次，设 $A^T\boldsymbol{c} = -\lambda\boldsymbol{c} \quad (\lambda > 0)$，则有

$$(i\omega I - A^T)^{-1}\boldsymbol{c} = \frac{1}{i\omega + \lambda}\boldsymbol{c}$$

于是有

$$[(i\omega I - A^T)^{-1}\boldsymbol{c}]^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{i\omega + \lambda}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{c}^T(i\omega I - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}}{i\omega + \lambda}$$

故(4.6-4)式的零解绝对稳定。

例 1 考虑三维的直接控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 - x_3 + f(x_1 - x_2 - x_3) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2 - x_3 + f(x_1 - x_2 - x_3) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1 + x_2 - 3x_3 + f(x_1 - x_2 - x_3) \end{cases} \tag{4.6-8}$$

这里 $A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f \in F$。

易验证 A 是稳定的，$\boldsymbol{b}$ 是 A 的一个特征值 $\lambda = -1$ 对应的特征向量，且 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} = -1 < 0$，故(4.6-8)式的零解是绝对稳定的。

定理 4.6.3 设(4.6-4)式中 A 为拟对角矩阵，即

$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots A_m)$，$\quad \boldsymbol{b} = \mathrm{col}(\tilde{\boldsymbol{b}}_1^T, \tilde{\boldsymbol{b}}_2^T, \cdots \tilde{\boldsymbol{b}}_m^T)$，

$$c = \mathrm{col}(\tilde{c}_1^T, \tilde{c}_2^T, \cdots \tilde{c}_m^T)$$

这里 $A_r(r=1,2,\cdots,m)$是子方阵,若 $\tilde{b}_r$ 是A_r 的特征向量($r=1,2,\cdots,m$)或 $\tilde{c}_r$ 是 A_r^T 的特征向量,则 $\tilde{c}_r^T\tilde{b}_r\leqslant 0\quad(r=1,2,\cdots m)$蕴涵(4.6-4)式零解绝对稳定。

证:若 $A_r\tilde{b}_r=-\lambda\tilde{b}_r$, 因为

$$\tilde{c}_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r=\frac{\lambda\tilde{c}_r^T\tilde{b}_r}{\lambda+i\omega}$$

则 $$\mathrm{Re}\{\tilde{c}_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r\}=\frac{\lambda\tilde{c}_r^T\tilde{b}_r}{\lambda^2+\omega^2}\leqslant 0,\ r=1,2,\cdots m$$

若 $A_r^T\tilde{c}_r=-\lambda\tilde{c}_r$, 便有 $\tilde{c}_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r=\dfrac{\lambda\tilde{c}_r^T\tilde{b}_r}{i\omega+\lambda}$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{c}_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r\}\leqslant 0,\ r=1,2,\cdots,m$$

因为 $$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_m)$$

$$A_{i\omega}=\mathrm{diag}(i\omega I_1-A_1, i\omega I_2-A_2,\cdots,i\omega I_m-A_m)$$

$$\begin{aligned}c^TA_{i\omega}^{-1}b &= (\tilde{c}_1^T,\cdots,\tilde{c}_m^T)\cdot\mathrm{diag}((i\omega I_1-\lambda_1)^{-1},\cdots,\\ &\quad (i\omega I_m-A_m)^{-1})\cdot(\tilde{b}_1^T,\cdots,\tilde{b}_m^T)^T\\ &= \sum_{r=1}^{m}\tilde{c}_i^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r\end{aligned}$$

它就推出 $$\mathrm{Re}(c^TA_{i\omega}^{-1}b)=\sum_{r=1}^{m}\mathrm{Re}\tilde{c}_r^T(i\omega I_r-A_r)^{-1}\tilde{b}_r\leqslant 0$$

因此(4.6-4)式的零解是绝对稳定的。

现在再考虑第一标准型(4.6-2)式。

对于实数 $q\geqslant 0$,设

$$a_j=\begin{cases}c_jq,\ 若\ c_j(qp_j-1)>0\\ c_j/\rho_j,\ 若\ c_j(q\rho_j-1)<0\\ c_j/\rho_j,\ 若\ c_j(q\rho_j-1)=0\quad c_j\neq 0\\ 0,\ 若\ c_j(q\rho_j-1)=0\quad c_j=0\end{cases}\tag{4.6-9}$$

定理 4.6.4 若存在 $q\geqslant 0$, 使得 $\sum_{j=1}^{n}a_j<\dfrac{1}{k}$,则(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定。

证:因为

$$A=\begin{pmatrix}-\rho_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\rho_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & & -\rho_n\end{pmatrix},\ A_{i\omega}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{i\omega+\rho_1} & 0,\cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{i\omega+\rho_2} & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \frac{1}{i\omega+\rho_n}\end{pmatrix}$$

于是
$$\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{c}_j}{i\omega+\rho_j}$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{c}_j(\rho_j+q\omega^2)}{\omega^2+\rho_j^2}$$

令 $f_j(\omega) = \dfrac{\boldsymbol{c}_j(\rho_j+q\omega^2)}{\omega^2+\rho_j^2}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}f_j(\omega)=\frac{2\boldsymbol{c}_j q\omega(\omega^2+\rho_j^2)-(\boldsymbol{c}_j\rho_j+\boldsymbol{c}_j q\omega^2)2\omega}{(\omega^2+\rho_j^2)^2}$$
$$=\frac{2\boldsymbol{c}_j\rho_j(q\rho_j-1)\omega}{(\omega^2+\rho_j^2)^2}$$

易于看出,仅当 $\omega=0,\dfrac{\mathrm{d}f_j(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=0$,当 $\boldsymbol{c}_j(q\rho_j-1)>0$,$f_j(\omega)$在$[0,\infty)$上是单调增加的,于是 $f_j(\omega)\leqslant f_j(\infty)=\boldsymbol{c}_i q$。当 $\boldsymbol{c}_j(q\rho_j-1)<0$,$f_j(\omega)$ 是单调减少的,于是在$[0,+\infty)$上,$f_j(\omega)\leqslant f_j(0)=\boldsymbol{c}_i/\rho_j$。

当 $\boldsymbol{c}_j(q\rho_j-1)=0,\boldsymbol{c}_j\neq0$,因为$\dfrac{\mathrm{d}f_j(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=0,q=1/\rho_j$,有

$$f_j(\omega) = \frac{\boldsymbol{c}_j(\rho_j+\omega^2/\rho_j)}{\omega^2+\rho_j^2} = \frac{\boldsymbol{c}_j}{\rho_j}$$

当 $\boldsymbol{c}_j(q\rho_j-1)=0,\boldsymbol{c}_j=0$ 就蕴涵 $f_j(\omega)=0$ 。

选择适当的 a_j总有 $f_j(\omega)\leqslant a_j$,从定理的假设推出

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\boldsymbol{c}_j(\rho_j+q\omega^2)}{\omega^2+\rho_j^2}=\sum_{j=1}^{n}f_j(\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j<\frac{1}{k}$$

即

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\}-\frac{1}{k}<0$$

从而(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域内绝对稳定。

推论 4.6.7 设 $c_j\begin{cases}<0 & j=1,2,\cdots,i_1\\ =0 & j=i_1+1,\cdots,i_2\\ >0 & j=i_2+1,\cdots,n\end{cases}$

若

$$\sum_{j=i_2+1}^{n}\frac{c_j}{\rho_j}<\frac{1}{k}$$

则(4.6-2)式的零解在 Hurwitz 角域$[0, k]$内绝对稳定,此结论易从定理 4.6.4 中选取 $q=0$ 而得证。

推论 4.6.8 若存在 $q\geqslant 0$ 使得 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\leqslant 0$, 则(4.6-2)式的零解绝对稳定。其中 a_j 如(4.6-9)式中所定义。

证:由定理 4.6.4 的证明,有 $f_j(\omega)\leqslant a_j$,于是进而可证

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\boldsymbol{c}^T A_{i\omega}^{-1}\boldsymbol{b}\}=\sum_{j=1}^{n}f_j(\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_j\leqslant 0$$

故结论成立。

3. 二阶 Лурье 直接控制系统

考虑二阶 Лурье 直接控制系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1f(c_1x_1+c_2x_2)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=A_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2f(c_1x_1+c_2x_2)\end{cases}\tag{4.6-10}$$

这里 $f\in F_\infty,\ \sigma=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=c_1x_1+c_2x_2$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$

讨论(4.6-10)式的绝对稳定之前,先要用到 Красовский 一条

定理作为引理。

引理 4.6.1 对于二维非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x) + by \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x) + dy \end{cases} \qquad f_1(0) = f_2(0) = 0 \quad (4.6\text{-}11)$$

若满足

1) $[bf_2(x) - df_1(x)]x < 0$, 当 $x \neq 0$

2) $\dfrac{f_1(x)}{x} + d < 0$,当 $x \neq 0$

3) $\lim\limits_{|x| \to \infty} \{(f_1(x) + dx)\mathrm{sgn}x -$

$$\int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]dx\} = -\infty$$

则(4.6-11)式的零解全局稳定。

定理 4.6.5 若 A 稳定,即(4.6-10)式为直接控制系统,则(4.6-10)式零解绝对稳定的充要条件是

$$c^T b \leqslant 0 \qquad c^T A^{-1} b \geqslant 0$$

证:必要性前面已证,只须证充分性。

不失一般性,设 $c_1 \neq 0$,作变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c_1 & -c_2/c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (4.6\text{-}12)$$

则(4.6-10)式化为

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1) + by_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1) + by_2 \qquad (4.6\text{-}13)$$

这里 $f_1(y_1) = \left(a_{11} + \dfrac{c_2}{c_1}a_{21}\right)y_1 + (c_1 b_1 + c_2 b_2) f(y_2)$

$$f_2(y_2) = \frac{a_{21}}{c_1} y_1 + b_2 f(y_1)$$

$$b = -c_2 a_{21} - \frac{c_2^2}{c_1} a_{21} + c_1 a_{12} + c_2 a_{22}, \quad d = -\frac{c_2}{c_1} a_{21} + a_{22}$$

$y_1 f(y_1)>0$,当 $y_1 \neq 0$, $f(0)=0$, 现验证引理 4.6.1 的条件满足,因为

$$[\boldsymbol{b}f_2(y_1)-\boldsymbol{d}f_1(y_1)]y_1=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y_1^2$$

$$-(c_1,c_2)\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 f(\boldsymbol{y}_1)<0, \text{当 } \boldsymbol{y}_1 \neq 0 \tag{4.6-14}$$

(4.6-14)式蕴涵 $-\int_0^{y_1}[df_1(y_1)-bf_2(y_1)]\mathrm{d}y_1 \to -\infty$,当 $y_1 \to \infty$

(4.6-14)式还蕴涵 $\lim\limits_{|y_1|\to+\infty}(f_1(y_1)+dy_1)\mathrm{sgn}y_1=-\infty$

故引理 4.6.1 的条件满足,故(4.6-10)式的零解绝对稳定。

在 $\boldsymbol{c}_2 \neq 0$ 的情况可类似地证明。

可以类似于定理 4.6.5 的方法证明以下结果。

定理 4.6.6 若 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$的特征值是纯虚数,则(4.6-10)式的零解是绝对稳定的充要条件是

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}<0, \boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$$

定理 4.6.7 若 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$有一个零特征值,一个负特征值,则(4.6-10)式的零解绝对稳定的充要条件是

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} \leqslant 0 \qquad \boldsymbol{c}^T(ab_jA)\boldsymbol{b}>0$$

这里 ab_jA 是 A 的伴随矩阵,即 $ab_jA=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

详细证明留给读者。

例 2 考虑二维直接控制系统

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -2x_1+x_2-2f(x_1-x_2) \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -x_1-x_1+f(x_1-x_2) \end{aligned} \tag{4.6-15}$$

这里 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

因为 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} <= (1,-1)\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} = -3 < 0$

$$\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b} = (1,-1)\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix} = 5 > 0$$

A 是稳定的,由定理 4.6.5 知系统(4.6-15)的零解是绝对稳定的。

§7 n 维 Лурье 直接与临界控制系统绝对稳定的充要条件[60,62]

对于 Лурье 问题的研究进展,美国数学家 Burton 曾于 1972 年说过:"问题的主要进展,是在寻找某一类正定函数使之具有负定导数的充要条件,这只是充分而不是必要的,至今没有触及 Лурье 问题本身"。本节我们通过特定的满秩线性变换,化(4.1-3)式为分离变量的非线性系统,引进部分变 量是绝对稳定新概念,得到一般直接控制系统绝对稳定的充要条件,并由此派生出一系列实用的充分条件。

不失一般性,不妨设 $c_n \neq 0$,作满秩线性变换

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & 1 & \ddots & 0\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \text{简记为 } \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \qquad (4.7\text{-}1)$$

可将(4.1-3)式化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}y_j + \hat{b}_i f(y_n) \qquad (i=1,2,\cdots n-1)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{a}_{nj}y_j + \hat{b}_n f(y_n)\end{cases} \qquad (4.7\text{-}2)$$

这里 $y_n=\sigma$ 是独立变量,(4.7-2)式已是分离变量系统,显然

(4.1-3)式与(4.7-2)式的零解绝对稳定性等价。

$$\tilde{a}_{ij} = \left(a_{ij} - \frac{a_{in}}{c_n}c_j\right) \qquad i,j = 1,2,\cdots n-1$$

$$\tilde{a}_{in} = \frac{a_{in}}{c_n} \qquad i = 1,2,\cdots n-1$$

$$\tilde{a}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{a_{in}}{c_n} c_j \qquad j = 1,2,\cdots n-1$$

$$\tilde{a}_{nn} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i a_{in}}{c_n}$$

$$\hat{b}_i = b_i \quad i = 1,2,\cdots n-1 \qquad \hat{b}_n = \sum c_i b_i$$

定义 4.7.1 称(4.7-2)式的零解关于部分变元 y_n 绝对稳定,若 $\forall f(y_n) \in F_\infty$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $\| y^{(0)} \| < \delta(\varepsilon)$, (4.7-2)式的解 $y(t, t_0, \mathbf{y}^{(0)})$的分量 $y_n(t, t_0, \mathbf{y}^{(0)})$满足

$$| y_n(t, t_0, \mathbf{y}^{(0)}) | < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

且 $\forall \bar{\mathbf{y}}^{(0)} \in R^n$, 有

$$\lim_{t \to \infty} | y_n(t, t_0, \bar{\mathbf{y}}^{(0)}) | = 0$$

这里 $\mathbf{y}^{(0)}, \bar{\mathbf{y}}^{(0)}$表示始值。

定义 4.7.2 称(4.7-2)式的零解关于部分变元 $y_j, y_{j+1}, \cdots, y_n (1 < j \leqslant n)$绝对稳定,若 $\forall f(\sigma) \in F_\infty$,(4.7-2)式的零解关于部分变元 $y_j, y_{j+1}, \cdots, y_n$ 全局渐近稳定。

定理 4.7.1 当(4.1-3)式为直接控制系统,即矩阵 A 稳定,则(4.1-3)式零解绝对稳定的充要条件是(4.7-2)式的零解关于部分变元 y_n 绝对稳定。

证:必要性,设 $\| \mathbf{c} \| = l$, 这里 $c = \mathrm{col}(c_1, \cdots, c_n)$,既然(4.1-3)式的零解绝对稳定,故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,有

$$\| x(t, t_0, x_0) \| < \frac{\varepsilon}{l} \qquad (\text{当 } \| x_0 \| < \delta)$$

设 y_0 与 x_0 分别为(4.7-3)式与(4.1-3)式的初始值,y_0 与

x_0 满足变换(4.7-1)式。

以 R_x^n, R_y^n 分别表示以 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 为元的 n 维空间而变换(4.7-1)式是满秩线性变换，故(4.1-3)式与(4.7-3)式元的可建立解映射的一一对应关系，因此有

$$\| \boldsymbol{x}_0 \| \leqslant \| C^{-1} \| \| \boldsymbol{y}_0 \| < \delta \qquad (\text{当 } \| \boldsymbol{y}_0 \| < \frac{\delta}{\| C^{-1} \|})$$

这蕴涵着

$$\| \boldsymbol{y}_n(t, t_0, \boldsymbol{y}_0) \| = \| \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \|$$

$$\leqslant \| \boldsymbol{c}^T \| \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon$$

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in R_x^n \quad \text{因为} \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = 0$$

故有 $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{y}_n(t, t_0, \boldsymbol{y}_0) = \lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = 0$，必要性获证。

充分性，根据常数变易法公式，(4.1-3)式的任意解 $\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t-\tau)} \boldsymbol{b} f(\sigma(\tau)) \mathrm{d}\tau \qquad (4.7\text{-}3)$$

因为 A 稳定，故存在常数 $\alpha > 0$ 和 $M \geqslant 1$ 使得

$$\mathrm{Re}\lambda(A) < -\alpha < 0 \qquad \text{且 } \| \mathrm{e}^{At} \| \leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$\forall \varepsilon > 0$，因为(4.7-2)式的零解关于部分变元 $\boldsymbol{y}_n$ 绝对稳定，故 $y_n(t, t_0, y_0) \to 0$。当 $t \to \infty$，从而存在 $t_1^* > t_0$ 使得

$$\int_{t_1^*}^{t} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \| \boldsymbol{b} f(\sigma(\tau)) \| \mathrm{d}\tau = \int_{t_1^*}^{t} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \| \boldsymbol{b} f(\boldsymbol{y}_n(\tau)) \| \mathrm{d}\tau$$

$< \frac{\varepsilon}{3}$，又因非零解连续依赖于 $\boldsymbol{y}_0$ 且 $f(\sigma)$ 是连续的，故存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$，当

$\| \boldsymbol{x}_0 \| < \delta_1(\varepsilon)$ 有 $\| \boldsymbol{y}_0 \|$ 充分小，使得

$$\int_{t_0}^{t^*} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \| \boldsymbol{b} f(\boldsymbol{y}_n(\tau)) \| \mathrm{d}\tau < \frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\qquad \delta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3M} \qquad \delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$

从以上诸式,有

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leqslant \|e^{A(t-t_0)}x_0\| + \left\|\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bf(\sigma(\tau))d\tau\right\| \\ &\leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t^*} Me^{-\alpha(t-\tau)}\|bf(\sigma(\tau))\|d\tau \\ &\quad + \int_{t^*}^{t} Me^{-\alpha(t-\tau)}\|bf(\sigma(\tau))\|d\tau \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{当 } \|x_0\| < \delta(\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.7-4}$$

故(4.1-3)式的零解是稳定的。

$\forall x_0 \in R_x^n, y_0 = C^{-1}x_0 \in R_y^n$ 因为 $\lim\limits_{t\to+\infty} y_n(t, t_0, y_0) = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bf(\sigma(\tau))d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}bf(y_n(\tau))d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} Me^{-\alpha(t-t_0)}\|b\|\,\|f(y_n(\tau))\|d\tau \\ &= Me^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| + \frac{M\|b\|\int_{t_0}^{t}\|f(y_n(\tau))\|d\tau}{e^{\alpha t}} \end{aligned} \tag{4.7-5}$$

利用 L'Hospital 法则,对(4.7-5)式两边取极限有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \lim_{t\to\infty}\|x(t)\| &\leqslant \lim_{t\to\infty} Me^{-\alpha(t-t_0)}\|x_0\| \\ &\quad + \lim_{t\to\infty}\frac{M\|b\|\int_{t_0}^{t}\|f(y_n(\tau))\|d\tau}{e^{\alpha t}} \\ &= 0 + \lim_{t\to\infty}\frac{M\|b\|\,\|f(y_n(t))\|}{\alpha e^{\alpha t}} \end{aligned}$$

故(4.1-3)式是绝对稳定的,定理证毕。

定理 4.7.2 当 A 稳定时,(4.1-3)式的零解绝对稳定的充要条件是(4.7-2)式的零解关于部分变元 $y_j, y_{j+1}, \cdots y_n$ 绝对稳

定。

证:若(4.7-2)式的零解关于部分变元 $y_j,\cdots,y_n(1<j\leqslant n)$绝对稳定,特别地关于 y_n 绝对稳定。从而定理 4.7.4 的充要条件满足;反之若(4.1-3)式零解绝对稳定,则特别地关于部分变元 $x_j,\cdots x_{n-1}$和全体变元的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ 绝对稳定,然而 $y_j=y_j$,$y_{j+1}=x_{j+1},\cdots\ y_{n-1}=x_{n-1}$,$y_n=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$,故(4.7-2)式关于 $y_j,\cdots y_n$ 绝对稳定。

下面考虑(4.7-2)式为临界控制(包括间接控制),即 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$。

定理 4.7.3 (4.7-2)式在临界情况下,零解绝对稳定的充要条件是:

1) 矩阵 $A+bc^T$ 稳定;

2) (4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定。

证:必要性,取 $f(\sigma)=\sigma=c^T x$,则(4.7-2)式变为

$$\frac{dx}{dt}=(A+bc^T)x \tag{4.7-6}$$

从而 $A+bc^T$ 应稳定,故 1)成立;(4.7-2)式的零解绝对稳定,特别地关于部分变元 y_n 绝对稳定。

充分性,将(4.1-3)式等价地改写为

$$\frac{dx}{dt}=(A+bc^T)x+bf(\sigma)-b\sigma \tag{4.7-7}$$

因为(4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定,故

$$bf(\sigma(t))-b\sigma(t)\to 0 \quad 当\ t\to\infty$$

又因 $A+bc^T$ 稳定,仿定理 4.7.1 可证明(4.1-3)式的零解绝对稳定,证毕。

定理 4.7.4 若(4.1-3)式 为临界情况,则它的零解绝对稳定的充要条件是:

1) (4.1-3)式的零解关于部分变元 $y_j,y_{j+1},\cdots y_n$ 绝对稳定;

2) 矩阵 $A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$ 稳定。

证明可仿定理 4.7.2 和 4.7.3 证之,略。

定理 4.7.5 (4.1-3)式在临界情况下,零解绝对稳定的充要条件是:

1) (4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定;

2) 存在常向量 $\boldsymbol{\eta}=\text{col}(\eta_1,\cdots\eta_n)$使矩阵 $\widetilde{B}(\tilde{b}_{ij})$稳定,这里

$$\tilde{b}_{ij}=\begin{cases}\tilde{a}_{ij} & 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant n-1\\ \tilde{a}_{in}+\eta_i & 1\leqslant i\leqslant n,\quad j=n\end{cases}\tag{4.7-8}$$

证:必要性:$\boldsymbol{\eta}$ 的存在性显然,例如取 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{b}$,即(4.1-3)式零解绝对稳定的必要条件成立。

充分性:将(4.7-2)式恒等变形为

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_{ij}y_j+\tilde{b}_if(y_n)-\eta_iy_n\qquad i=1,2,\cdots n$$

利用常数变易法公式

$$\boldsymbol{y}(t,t_0,y_0)=\mathrm{e}^{\hat{B}(t-t_0)}y_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\hat{B}(t-\tau)}\hat{\boldsymbol{b}}f(y_n(\tau))\mathrm{d}\tau$$
$$-\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\hat{B}(t-\tau)}\boldsymbol{\eta}y_n(\tau)\mathrm{d}\tau$$

仿定理 4.7.2 可完成证明。

要从上述充要条件派生出一系列实用的充分条件,说明这些充要条件不仅有理论上的意义,也有实用上的价值。

例 1 在(4.1-3)式中若矩阵 A 稳定,且(4.7-2)式中的系数满足

$$\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{a}_{nj}^2=0\quad 且\quad \begin{cases}\tilde{a}_{nn}\leqslant 0\\ \hat{b}_n=\sum_{i=1}^{n}c_ib_i<0\end{cases}$$

或

$$\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{a}_{nj}^2=0\quad 且\quad \begin{cases}\tilde{a}_{nn}<0\\ \hat{b}_n=\sum_{j=1}^{n}c_ib_i\leqslant 0\end{cases}$$

则(4.1-3)式的零解是绝对稳定的,

证:作 $V(y)=y_n^2$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.7\text{-}2)}=2\hat{a}_{nn}y_n^2+2\sum_{i=1}^{n}c_ib_iy_nf(y_n)$$

关于 $\boldsymbol{y}_n$ 负定,从而(4.7-3)式的零解关于 y_n 绝对稳定。

例 2　若(4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定。$\hat{A}(\hat{a}_{ij})$ 划去第 n 行,第 n 列后的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵记为 $\hat{A}_{n-1}(a_{ij})$,且 $\hat{A}_{n-1}(a_{ij})$ 是稳定的,则(4.7-2)式的零解绝对稳定。

证:作为定理 4.7.5 的应用,取 $\eta_i=-\hat{a}_{in}(1\leqslant i\leqslant n-1)$,$\eta_n=-\hat{a}_{nn}-1$,于是

$$\hat{B}(\hat{b}_{ij})=\begin{pmatrix} A_{n-1}(\hat{a}_{ij}) & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ \hat{a}_{n1},\cdots,\hat{a}_{nn-1} & -1 \end{pmatrix}$$

从而 $\hat{A}_{n-1}(\hat{a}_{ij})$ 稳定蕴涵 $\hat{B}(\hat{b}_{ij})_{n\times n}$ 稳定,定理 4.7.5 的条件全满足,故结论成立。

定理 4.7.6　若(4.7-2)式的零解关于 $y_{i+1},\cdots,y_n$ 绝对稳定 $(1\leqslant j\leqslant n)$,又矩阵

$$\hat{A}^{(j)}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{j1} & \cdots & \hat{a}_{jj} \end{pmatrix}\quad 稳定$$

则(4.7-2)式的零解绝对稳定。

证:令 $\boldsymbol{y}^{(j)}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}^{(j)}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0):=\mathrm{col}(y_1(t_1,t_0,\boldsymbol{y}_0),\cdots,y_j(t,t_0,\boldsymbol{y}_0))$

$\boldsymbol{y}^{(n-j)}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}^{(n-j)}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{col}(y_{j+1}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0),\cdots,y_n(t,t_0,\boldsymbol{y}_0))$

$\hat{\boldsymbol{b}}^j:=\mathrm{col}(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_j)$　　　$\hat{\boldsymbol{b}}^{(n-j)}:=\mathrm{col}(\hat{b}_{j+1},\cdots,\hat{b}_n)$

$$\hat{A}^{(n-j)}=\begin{pmatrix} \hat{a}_{1j+1}, & \cdots, & \hat{a}_{1n} \\ \vdots & & \\ \hat{a}_{jj+1}, & \cdots, & \hat{a}_{jn} \end{pmatrix}$$

(4.7-2)式的解的前 j 个分量满足积分方程

$$y^{(j)}(t) = e^{\hat{A}^{(j)}(t-t_0)}y^j(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\hat{A}^{(j)}(t-\tau)}\hat{A}_r^{(n-j)}y^{(n-j)}(\tau)d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{A}^{(j)}(t-\tau)}\hat{\mathbf{A}}^{(n-j)}f(y_n(\tau))d\tau \qquad (4.7\text{-}9)$$

仿定理4.7.1充分性的证明可证(4.7-2)式的零解关于 $y^{(j)}(t)$ 绝对稳定。

由定理4.7.6可看出,把关于部分变元的条件加强,即加多部分变元绝对稳定的个数,则另一个代数条件 $\hat{A}^{(j)}$ 稳定的条件可以减弱(维数可降低)。

从上面的充要条件可以看出,把全体变元的绝对稳定性问题等价地化为关于部分变元的绝对稳定性及一个易于验证的代数条件,理论上化高维为低维,因此,问题的焦点就转 到关于部分变元的绝对稳定性如何判定,显然比关于全体变元的绝对稳定条件要弱,可以用不同的方法,解决不同变元的稳定性。

下面给出一些关于部分变元绝对稳定的充分条件。

定理 4.7.7 令 $\hat{A}_n = (\tilde{a}_{n1}, \tilde{a}_{n2}, \cdots, \tilde{a}_{nn})^T$, $e_n = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{n})^T$ 若存在关于 y_n 为无穷大正定的函数

$$V = \mathbf{y}^T B\mathbf{y} + \int_0^{y_n} f(y_n)dy_n$$

和常数 $\varepsilon > 0$,使得

$$\begin{pmatrix} A^T B + B\hat{A} & B\hat{b} + \frac{1}{2}\hat{A}_n + \varepsilon e_n \\ (B\hat{b} + \frac{1}{2}\hat{A}_n + \varepsilon e_n)^T & b_n \end{pmatrix} \quad \text{半负定}$$

则(4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定。

证:作函数

$$V = \mathbf{y}^T B\mathbf{y} + \int_0^{y_n} f(y_n)dy_n \qquad (4.7\text{-}10)$$

显然,V 关于 y_n 是无穷大正定的,于是有

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4.7\text{-}2)} = \dot{\boldsymbol{y}}^T B\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T B\dot{\boldsymbol{y}} + [\widetilde{A}_n\boldsymbol{y} + \bar{\boldsymbol{b}}_n f(y_n)]f(y_n)$$

$$= [\hat{A}\boldsymbol{y} + \hat{b}f(y_n)]^T B\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T B[\hat{A}\boldsymbol{y} + \hat{b}f(y_n)] + [\hat{A}_n\boldsymbol{y} + \hat{b}_n f(y_n)]f(y_n)$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \\ f(y_n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T B + B\widetilde{A} & B\tilde{\boldsymbol{b}} + \frac{1}{2}A_n + \varepsilon e_n \\ (B\tilde{\boldsymbol{b}} + \frac{1}{2}\widetilde{A}_n + \varepsilon e_n)^T & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_n) \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \\ f(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon e_n \\ (\varepsilon e_n)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_n) \end{pmatrix}$$

$$\leqslant -2\varepsilon y_n f(y_n) < 0 \quad 当\ y_n \neq 0 \tag{4.7-11}$$

故(4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定。

因为 $\hat{b}_n \leqslant 0$ 是(4.7-2)式的零解绝对稳定的必要条件，下面设 $\hat{b}_n < 0$ 作满秩线性变换

$$z = H\boldsymbol{y}$$

其中

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{-b_1}{b_n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \ddots & \frac{-b_{n-1}}{b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.7-12}$$

则(4.7-2)式变为

$$\begin{cases} \dfrac{dz_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}z_j & i = 1,2,\cdots n-1 \\ \dfrac{dz_n}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{nj}z_j + \tilde{b}_n f(z_n) \end{cases} \tag{4.7-13}$$

这里 $D(d_{ij}) = H\tilde{A}H^{-1}$ 令 $\tilde{\boldsymbol{b}}^* = \mathrm{col}(0,\cdots0,\tilde{b}_n)$

则(4.7-13)式可以写为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = Dz + \hat{d}^* f(z_n) \tag{4.7-14}$$

显然(4.1-3)式与(4.7-2)式的零解稳定性等价。

定理 4.7.8 若存在形如

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n-1,1} & \cdots & s_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad (s_{nn} > 0)$$

的对称半正定矩阵,使得 $SD + D^TS$ 半负定,则(4.7-14)式的零解关于 z_n 绝对稳定。

证:作 $V(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^TS\boldsymbol{z}$,则 $V(\boldsymbol{z})$是关于 z_n 为无穷大正定的。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.7\text{-}14)} &= \dot{\boldsymbol{z}}^TS\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^TS\dot{\boldsymbol{z}} \\ &= \dot{\boldsymbol{z}}^TD^TS\boldsymbol{z} + \dot{\boldsymbol{z}}^TSD\boldsymbol{z} + (\dot{\boldsymbol{z}}^TS\hat{b}^* + \hat{b}^{*T}s\boldsymbol{z})f(z_n) \\ &= \dot{\boldsymbol{z}}^T(SD + D^TS)\boldsymbol{z} + 2\hat{b}_ns_{nn}f(z_n)z_n \\ &\leqslant 2\hat{b}_ns_{nn}f(z_n)z_n < 0 \qquad \text{当 } z_n \neq 0\end{aligned}$$

故(4.7-14)的零解是关于 z_n 绝对稳定的。

推论 4.7.1 若存在一组常数 $p_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n-1, p_n > 0$,使得 $PD + D^TP$ 半负定,$P = \mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)$

则(4.7-14)式的零解关于 z_n 绝对稳定。

证:作 $V(z) = \sum_{i=1}^{n} p_iz_i^2$,$V(\boldsymbol{z})$关于 z_n 为无穷大正定函数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.7\text{-}14)} &= \boldsymbol{z}^T(PD + D^TP)\boldsymbol{z} + 2p_n\hat{b}_nf(z_n)z_n \\ &\leqslant 2p_n\hat{b}_nz_nf(z_n) < 0 \qquad \text{当 } z_n \neq 0\end{aligned}$$

故(4.7-14)式零解绝对稳定。

定理 4.7.9 若存在正数 $\xi_i (i = 1,2,\cdots,n)$,使得

$$-\xi_j\hat{a}_{jj} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\hat{a}_{ij}| \quad j = 1,2,\cdots,n-1 \tag{4.7-15}$$

$$-\xi_n\hat{a}_{nn} \geqslant \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i|\hat{a}_{in}| \tag{4.7-16}$$

$$-\xi_n\hat{b}_{nn} \geqslant \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i|\hat{b}_i| \tag{4.7-17}$$

则

1)(4.7-16)、(4.7-17)式中至少有一个严格的不等式成立,蕴涵着(4.7-2)式的零解关于 y_n 绝对稳定;

2) (4.7-15)式中有$(n-j_0+1)$个严格的不等式成立,不妨设第 $j_0, j_0+1, \cdots, n-1$ 个是严格不等式,蕴涵(4.7-2)式的零解关于 $y_{j_0}, \cdots, y_{n-1}$绝对稳定。

证:作 $V(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i|y_i|$,显然地 $V(\boldsymbol{y})$是无穷大正定的函数,

$$D^+V(\boldsymbol{y})|_{(4.7\text{-}2)} \leqslant \sum_{j=1}^{n}[\xi_j\hat{a}_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\xi_i|\hat{a}_{ij}|]|y_i| + (\xi_n\hat{b}_n + \sum_{j=1}^{n-1}\xi_i|\hat{b}_i|)|y_n|$$

当 1)成立,不妨设(4.7-17)式是严格不等式。则有

$$D^+V(\boldsymbol{y})|_{(4.7\text{-}2)} \leqslant (\xi_n\hat{b}_n + \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i|\hat{b}_i|)|y_n| < 0 \quad \text{当 } y_n \neq 0$$

当 2)成立,则有

$$D^+V(\boldsymbol{y})|_{(4.7\text{-}2)} \leqslant \sum_{j=j_0}^{n-1}[\xi_j|\hat{a}_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}\xi_i|\hat{a}_{ij}|]|y_j| < 0 \qquad \text{当} \sum_{j=j_0}^{n-1}y_j^2 \neq 0$$

故结论成立。

§8 n 维 Лурье 间接控制系统绝对稳定的充要条件[61]

考虑 Лурье 间接控制系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + h_i\xi & i = 1,2,\cdots,n \\
\dfrac{d\xi}{\mathrm{d}t} = f(\sigma) \\
\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} c_i x_i - \rho\xi
\end{cases}
\tag{4.8-1}
$$

这里 $a_{ij}, h_i, \rho(i, j = 1, \cdots, n)$均为实常数 $\rho \neq 0$。

令 $\boldsymbol{y} = \mathrm{col}(y_1, \cdots, y_n, \sigma), \boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n, \xi)$

作满秩线性变换

$$
\begin{cases}
y_i = x_i & i = 1,2,\cdots,n \\
y_{n+1} = \sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i - \rho\xi,
\end{cases}
\tag{4.8-2}
$$

则(4.8-1)式可化为变量分离的系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \hat{a}_{ij} y_j & i = 1,2,\cdots,n \\
\dfrac{\mathrm{d}y_{n+1}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \hat{a}_{n+1} y_j - \rho f(y_{n-1})
\end{cases}
\tag{4.8-3}
$$

这里

$$
\hat{a}_{ij} = a_{ij} + \frac{h_i}{\rho} c_j \qquad i = 1,2,\cdots,n
$$

$$
\hat{a}_{in+1} = -\frac{h_j}{\rho} \qquad i = 1,2,\cdots,n
$$

$$
\hat{a}_{n+1j} = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_i \left(\hat{a}_{ij} + \frac{h_i c_j}{\rho} \right) \qquad j = 1,2,\cdots,n
$$

$$
\hat{a}_{n+1,n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{a}_{in+1} = \sum_{j=1}^{n} c_i \left(-\frac{h_j}{\rho} \right)
$$

(4.8-1)与(4.8-3)两式的零解的绝对稳定性等价。

本节,大部分内容只列出结果,其证明方法完全可仿照本章§7的思路和步骤进行,故略去证明。

定理 4.8.1 (4.8-3)式的零解绝对稳定,当且仅当

1) (4.8-3)式的零解关于 y_{n+1}绝对稳定,且

2) 矩阵 $B=(b_{ij})_{n-1\times(n+1)}$稳定,这里

$$b_{ij}=\begin{cases}\hat{a}_{n-1,n+1}-\rho & i=j=n+1\\ \hat{a}_{ij} & \text{其它}\end{cases}$$

定理 4.8.2 (4.8-3)式的零解绝对稳定,当且仅当

1) (4.8-3)式的零解关于部分变元 $y_j, y_{j+1}, \cdots, y_{n+1}$绝对稳定,且

2) 定理 4.8.1 的条件 2)成立。

因为(4.8-1)式的零解绝对稳定的必要条件是 $\Omega \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A & h \\ c^T & -\rho \end{bmatrix}$稳定,从而 Ω 非奇异,作下列满秩线性变换

$$\begin{cases} z = Ax + h\xi \\ z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i - \rho\xi \end{cases} \tag{4.8-4}$$

其中 $z=\mathrm{col}(z_1,\cdots,z_n)$, $x=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)$,则(4.8-1)式可拓扑等价地化为

$$\begin{cases} \dfrac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* + h_i^* f(z_{n+1}) \\ \dfrac{dz_{n+1}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j - \rho f(z_{n+1}) \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{4.8-5}$$

定理 4.8.3 (4.8-5)式的零解绝对稳定的充要条件为:

1) (4.8-5)式的零解关于 z_{n+1}绝对稳定。

2) 矩阵 $\Omega^* = \begin{bmatrix} A^* & h^* \\ c^T & -\rho \end{bmatrix}$稳定。

$$h^* = \mathrm{col}(h_1^*, \cdots h_n^*)$$

因为 $\rho \geqslant 0$ 是系统(4.8-3)式的零解绝对稳定的充要条件,设 $\rho > 0$。

定理 4.8.4 若存在一组常数 $r_i > 0 (i=1,2,\cdots,n+1)$,使得

$$-r_j \hat{a}_{jj} \geqslant \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} r_i |\hat{a}_{ij}| \tag{4.8-6}$$

则(4.8-3)式的零解关于 y_{n+1} 绝对稳定。

证:作 $V(y)=\sum_{j=1}^{n+1} r_i \mid y_i \mid$,可证 $D^+ V(y)\mid_{(4.8-3)}$ 关于 y_{n+1} 负定,从而结论真。

定理 4.8.5 若存在一组常数 $r_i>0(i=1,2,\cdots,n+1)$,使得

$$-r_i\hat{a}_{ij}^* \geqslant \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} r_i \mid \hat{a}_{ij}^* \mid + r_{n+1} \mid c_j \mid \tag{4.8-7}$$

$$r_{n+1}\rho \geqslant \sum_{i=1}^{n} r_i \mid h_i^* \mid \tag{4.8-8}$$

则当(4.8-8)式为严格不等式时,(4.8-5)式的零解绝对稳定,(4.8-7)式关于 $j=j_0,j_0+1,\cdots,n$ 为严格不等式时,(4.8-5)式的零解绝对稳定。

证:作 $V(z)=\sum_{i=1}^{n+1} r_i \mid z_i \mid$,可仿定理 4.7.9 证明,略。

定理 4.8.6 若存在一个形如

$$B_i=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

的对称半正定矩阵,使得 $\hat{A}^T B+B\hat{A}$ 半负定,则(4.8-3)式的零解关于 $\boldsymbol{y}_{n+1}$ 绝对稳定。

证:作 $V(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y}$,即可证明,略。

定理 4.8.7 若存在 $\varepsilon>0$ 及$(n+1)$阶对称半正定矩阵 B,使得矩阵

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^B+B\hat{A} & B\hat{h}+\dfrac{1}{2}\hat{A}_{n+1}+\varepsilon e_n \\ \left(B\hat{h}+\dfrac{1}{2}\hat{A}_{n+1}+\varepsilon e_n\right)^T & -\rho \end{pmatrix} \quad \text{半负定。}$$

其中 $\quad \hat{A}_{n+1}=\mathrm{col}(\hat{a}_{n+1},\cdots,\hat{a}_{n+1,n+1})$,且

$$\int_0^{\pm\infty} f(\boldsymbol{y}_{n+1})\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{n+1} = +\infty$$

$\hat{h} = \mathrm{col}(\overbrace{0,\cdots,0}^{n}, -\rho) \qquad e_n = \mathrm{col}(\overbrace{0,\cdots,0}^{n}, 1)$，则(4.8-3)式的零解关于 y_n 绝对稳定。

证：作 $V(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T B \boldsymbol{y} + \int_0^{y_{n+1}} f(y_{n+1})\mathrm{d}y_{n+1}$

显然 $\quad V(\boldsymbol{y}) \geqslant \int_0^{y_{n+1}} f(y_{n+1})\mathrm{d}y_{n+1} > 0 \qquad$ 当 $y_{n+1} \neq 0$

$V(\boldsymbol{y}) \to +\infty \qquad$ 当 $y_{n+1} \to \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.8\text{-}3)} &= \dot{\boldsymbol{y}}^T B \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T B \dot{\boldsymbol{y}} + [\hat{A}_{n+1}\boldsymbol{y} - \rho f(y_{n+1})] f(y_{n+1}) \\
&= [\widetilde{A}\boldsymbol{y} + h f(y_{n+1})]^T B \boldsymbol{y} \\
&\quad + \boldsymbol{y}^T B [\widetilde{A}_{n+1}\boldsymbol{y} - \rho f(y_{n+1})] f(y_{n+1}) \\
&= \boldsymbol{y}^T \widetilde{A}^T B \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T B \widetilde{A} \boldsymbol{y} + [h^T B \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T B h + A_{n+1}] \\
&\quad \cdot f(y_{n+1}) - \rho f^2(y_{n+1}) \\
&= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_{n+1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \widetilde{A}^T B + B\widetilde{A} & (Bh + \frac{1}{2}\hat{A}_{n+1}^T + \varepsilon e_n \\ Bh + \frac{1}{2}\hat{A}_{n+1}^T + \varepsilon e_n)^T & -\rho \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_{n+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_{n+1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon e_n \\ (\varepsilon e_n)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ f(y_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&\leqslant -2\varepsilon y_{n+1} f(y_{n+1}) < 0 \qquad \text{当 } y_{n+1} \neq 0
\end{aligned}$$

故结论成立。

注意：若 B 是正定的，则条件 $\int_0^{\pm\infty} f(\boldsymbol{y}_{n+1})\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{n+1} = +\infty$ 可删去。

定理 4.8.8 若存在一个 $n \times n$ 对称正定矩阵 B，使得 $B\widetilde{A} + \widetilde{A}B = -P$ 半负定，且存在常数 $\varepsilon > 0$，使得

$$\det\begin{vmatrix} P & -(B\tilde{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}) \\ -(B\tilde{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c})^T & \rho-\varepsilon \end{vmatrix} \geqslant 0$$

且
$$\int_0^{\pm\infty} f(z_{n+1})\mathrm{d}z_{n+1} = \infty$$

则(4.8-5)式的零解关于 z_n 绝对稳定。

这里　$\tilde{h}=\mathrm{col}(\tilde{h}_1,\cdots\tilde{h}_n)$

证:作 $V(z) = z^TBz + \int_0^{z_{n+1}} f(z_{n+1})\mathrm{d}z_{n+1}$,则 $V(z)$ 是关于 z_{n+1} 无穷大正定的,$z=\mathrm{col}(z_1,\cdots,z_n)$。

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.8\text{-}5)} = \dot{z}^TBz + z^TB\dot{z} + \dot{z}_{n+1}f(z_{n+1})$$

$$= z^T(\tilde{A}^TB + B\tilde{A})z + (\tilde{h}Bz + z^TB\tilde{h} + \boldsymbol{c}^Tz)$$

$$\cdot f(z_{n+1}) - \rho f^2(z_{n+1})$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ f(z_{n+1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -P & (B\hat{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}) \\ (B\hat{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c})^T & -\rho+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ f(z_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$-\varepsilon f^2(z_{n+1}) \leqslant -\varepsilon f^2(z_{n+1}) < 0 \quad 当\ z_{n+1} \neq 0$$

故(4.8-5)式的零解绝对稳定。

例1　讨论控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t} = 0\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + f(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2 - f(\sigma) \qquad \rho>0, f(\sigma)\in F_\infty \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \rho f(\sigma) \end{cases} \qquad (4.8\text{-}9)$$

的零解的绝对稳定性,其中 $f(\sigma)$ 满足

$$\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma = +\infty$$

这里 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^T P + PA = -B$

给定任何正定矩阵 B，上述 Ляпунов 矩阵方程没有正定矩阵解，故传统方法失效，但这里提供的方法可证明它的零解绝对稳定。

事实上，作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x}, \sigma) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \int_0^\sigma f(\sigma) \mathrm{d}\sigma$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.8\text{-}9)} &= -x_1 x_2 + x_1 f(\sigma) + x_1 x_2 - x_2 f(\sigma) \\ &\quad - x_1 f(\sigma) + x_2 f(\sigma) - \rho f^2(\sigma) \\ &= -\rho f^2(\sigma) < 0 \qquad \text{当 } \sigma \neq 0 \end{aligned}$$

故(4.8-9)式的零解关于 σ 绝对稳定。

又令 $f(\sigma) = \sigma$，(4.8-9)式变为线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_2 + \sigma \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - \sigma \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 - \rho\sigma \end{cases} \tag{4.8-10}$$

$$\begin{aligned} \det\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda + \rho \end{vmatrix} &= \lambda^2(\rho + \lambda) + \lambda + \lambda + \lambda + \rho \\ &= \lambda^3 + \rho\lambda^2 + 3\lambda + \rho = 0 \end{aligned}$$

特征多项式是 Hurwitz 多项式的充要条件为

$$\rho > 0 \qquad \Delta_1 = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & \rho \\ 1 & \rho \end{vmatrix} = 3\rho - \rho = 2\rho > 0$$

故 $\rho > 0$ 满足条件，从而零解绝对稳定。

下面考虑将上述基本结果应用到 Лурье 第二标准型

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i x_i + \sigma$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_i-p\sigma-rf(\sigma)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)\tag{4.8-11}$$

这里 $p>0, r>0, \rho_i>0\ (i=1,2,\cdots,n), f(\sigma)\in F_\infty$。

定理 4.8.9 若

$$p\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+\mathrm{sgn}\beta_i}{2}\right)\frac{\beta_i}{\rho_i}\tag{4.8-12}$$

则(4.8-11)式的零解绝对稳定的。

证:作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x},\sigma)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i^2+\sigma^2\tag{4.8-13}$$

显然 $V(\boldsymbol{x},\sigma)$关于 σ 是无穷大正定的,若

$$c_i=\begin{cases}-\beta_i & 当\beta_i<0\\ \varepsilon & 0<\varepsilon_i\ll 1 \qquad 当\beta_i=0\\ \beta_i & 当\beta_i>0\end{cases}$$

则有

$$\frac{-\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.8\text{-}11)}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}^T$$

$$\cdot\begin{pmatrix}2c_1\rho_1 & 0 & 0 & \cdots & -(c_1+\beta_1)\\ 0 & 2c_2\rho_2 & 0 & & -(c_2+\beta_2)\\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & -(c_n+\beta_n)\\ -(c_1+\beta_1) & -(c_2+\beta_2) & \cdots & (c_n+\beta_n) & 2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}$$

$$+2r\sigma f(\sigma)\tag{4.8-14}$$

今证(4.8-12)式的第一项非负,为此只须证

$$D \overset{\text{def}}{=} \det\begin{vmatrix} 2c_1\rho_1 & 0 & \cdots & -(c_1+\beta_1) \\ 0 & 2c_1\rho_2 & \cdots & -(c_2+\beta_2) \\ \vdots & & \vdots & \\ -(c_1+\beta_1) & -(c_2+\beta_2) & \cdots & -2c_n\rho_n \end{vmatrix} \geqslant 0$$

根据引理 4.3.1 展开 D,故必须且只须证明

$$2p - \sum_{i=1}^{n} \frac{(c_i+\beta_i)^2}{2c_i\rho_i} \geqslant 0$$

因为条件

$$p - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1+\text{sgn}\beta_i}{2}\right) \frac{\beta_i}{\rho_i} \geqslant 0$$

成立,故 $\quad 4p - \sum_{i=1}^{n} \frac{(c_i+\beta_i)^2}{c_i\rho_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4p}{n} - \frac{(c_i+\beta_i)^2}{c_i\rho_i}\right) \geqslant 0$

自然满足。从而有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(4.8\text{-}11)} \leqslant -2r\sigma f(\sigma) < 0 \qquad \text{当 } \sigma \neq 0$$

故(4.8-11)式的零解关于 σ 绝对稳定。

另一方面,在(4.8-11)式中,令 $f(\sigma)=\sigma$,则(4.8-11)式变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\rho_i x_i + \sigma \\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j - (p+r)\sigma \end{cases} \tag{4.8-15}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

对(4.8-12)式,仍用 Ляпунов 函数(4.8-13)式有

$$V(\boldsymbol{x},\sigma) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i^2 + \sigma^2$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.8\text{-}15)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \sigma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2c_1\rho_1 & 0 & \cdots & (c_1+\beta_1) \\ 0 & -2c_2\rho_2 & & \vdots \\ \vdots & & & (c_n+\beta_n) \\ (c_1+\beta_1) & (c_2+\beta_2) & & -2p-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \sigma \end{pmatrix}$$

令
$$D_1 \overset{\text{def}}{=} \det\begin{vmatrix} 2c_1\rho_1 & 0 & \cdots & -(c_1+\beta_1) \\ 0 & 2c_2\rho_2 & & -(c_2+\beta_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -(c_1+\beta_1) & -(c_2+\beta_2) & \vdots & 2p+2r \end{vmatrix}$$

$$= D + 2r\prod_{i=1}^{n}(2c_i\rho_i) \geqslant 2r\prod_{j=1}^{n}(2c_i\rho_i) > 0$$

故$\frac{dV}{dt}\big|_{(4.8\text{-}15)}$负定。

从而定理 4.8.1 的条件全满足，从而(4.8-15)式的零解绝对稳定。

定理 4.8.9 的结果对飞机纵向运动方程有重要的应用。

例 2　考虑飞机纵向运动方程

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\rho_i x_i + \sigma \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \sum_{j=1}^{4}\beta_i x_i - rp_2\sigma \end{aligned} \tag{4.8-16}$$
$$(i = 1,2,3,4)$$

这里 $rP_2>0, \rho_i>0, f(\sigma)\in F_\infty$。

显然(4.8-16)式是(4.8-15)式的特例，这个方程零解的绝对稳定性有许多著名学者研究过，我们这里要列出前人几个典型结果。

他们分别得到的稳定性参数区间为

(a)　$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2 r^2 p_2^2 - 16\left(\sum\limits_{j=1}^{4}\beta_i^2\right) > 0$

(b)　$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i r b_2 - 4\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}|\beta_i|\right) > 0$

(c)　$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i^2 r^2 p_2^2 - 4\left(\sum\limits_{i=1}^{4}\beta_i^2\right) > 0$

它们的几何解释分别如图 4-3(a)、(b)、(c) 所示：令 $R = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}\rho_i r p_2$

作为定理 4.8.9 的推论可得到结论：

若 $\quad rp_2 \geqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2} \frac{\beta_i}{\rho_i}$

则(4.8-16)式的零解绝对稳定,这个稳定性参数区域与上述区域的对比如图 4-4。

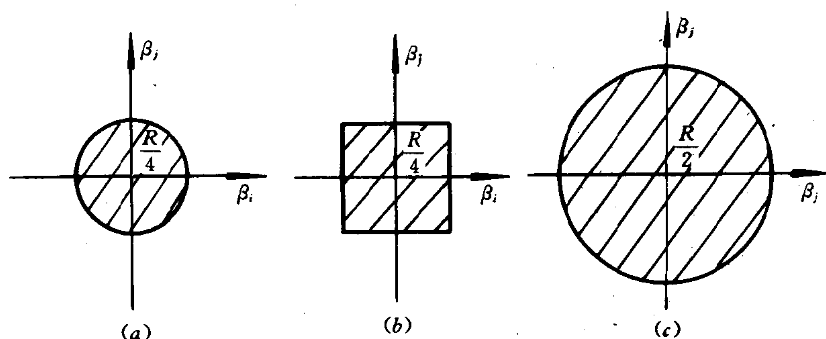


图 4-3

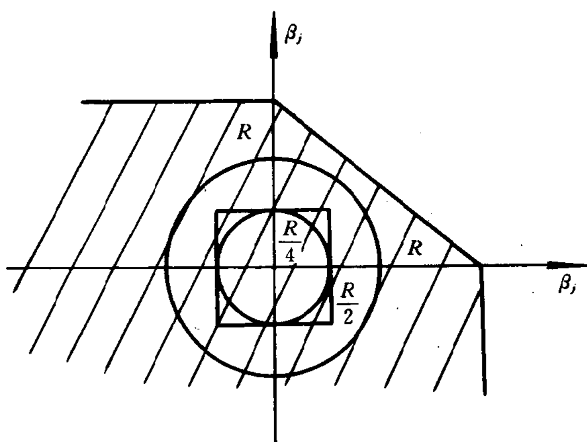


图 4-4

比上述典型的稳定性参数区域扩大了无穷多倍,稳定性参数区域越大,兼顾其它技术指标的可能性就越大,从而实际意义也越大。

§9 一般 Лурье 控制系统绝对稳定的充要条件[68]

前面已经给出了直接控制和间接控制系统绝对稳定的充要条件,但因为通过变换,化为关于部分变元的绝对稳定性,不便于与 Лурье 方法、S 程序、Popov 方法等传统结果进行对比。

为了与经典的主要方法和结果进行有效的对比,我们不变换,而且不必分直接控制、间接控制、临界控制,用统一的处理方法来得到一般 Лурье 控制系统的绝对稳定性的判据。

仍考虑一般的 Лурье 控制系统(4.1-3),这里仅假设 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$。

定义 4.9.1 称(4.1-3)式的零解关于反馈变量集合 $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{x: |\sigma = c^T x = 0\}$ 绝对稳定,若 $\forall f(\sigma)\in F_\infty$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta(\varepsilon)>0$,当 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$,(4.1-3)式的解 $x(t)\overset{\text{def}}{=}x(t,t_0,x_0)$满足

$$|\sigma(t)| = |c^T x(t)| < \varepsilon, t \geqslant t_0$$

$$\forall x_0 \in R^n, 有 \lim_{t\to+\infty}\sigma(t) = \lim_{t\to+\infty} c^T x(t) = 0$$

定义 4.9.2 称连续函数 $V(x)\in C[R^n,R^1]$,关于 Ω 正定[负定],若

$$V(x)\begin{cases} = 0 & 当\ x\in\Omega \\ > 0 & x\overline{\in}\Omega \end{cases} \left[V(x)\begin{cases} = 0 & 当\ x\in\Omega \\ < 0 & 当\ x\overline{\in}\Omega \end{cases} \right]$$

称 $V(t)$关于 Ω 为无穷大正定,若 $V(x)$关于 Ω 正定,且 $V(x)\to+\infty$,当$|\sigma|\to+\infty$。

定理 4.9.1 (4.1-3)式的零解绝对稳定的充要条件是:

1)$B\overset{\text{def}}{=}[A+\theta bc^T]$为 Hurwitz 矩阵,$\theta=1$ 或 $\theta=0$;

2) (4.1-3)式的零解关于 Ω 绝对稳定。

证:必要性

1)当 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$,取 $\theta=0$;当 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$,取 $\theta=1$,将 $f(\sigma)=\sigma=c^T x$ 代入(4.1-3)式,便可知 $B\overset{\text{def}}{=}A+\theta bc^T$ 稳定。

2) $\forall \varepsilon>0$,取 $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|}$ ，$\exists\,\delta(\varepsilon)>0$

当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$,有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} |x_i(t)| < \tilde{\varepsilon}$$

进而有

$$|\sigma(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i x_i(t)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |c_i| \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| < \max_{1\leqslant i\leqslant n} |c_i| \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

且 $\lim\limits_{t\to\infty} |\sigma(t)| \leqslant \lim\limits_{t\to+\infty} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |c_i| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i(t)| = 0 \qquad \forall x_0 \in R^n$

充分性　　$\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,t_0\boldsymbol{x}_0)$可表为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{B(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{B(t-\tau)}[\boldsymbol{b}f(\sigma(\tau)) - \theta\boldsymbol{b}\sigma(\tau)]d\tau$$

余下可仿本章§7 的定理 4.7.1 的充分性证明。

定理 4.9.2　(4.1-3)式的零解绝对稳定的充要条件是:

1) $B \overset{\text{def}}{=} A+\theta\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^T$稳定,$\theta=1$ 或 $\theta=0$;

2) 存在 $V(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R^1]$, $V(0)=0$ 满足

$$V(\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(|\sigma|) \qquad \varphi \in KR$$

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(4.1\text{-}3)} \leqslant -\Psi(|\sigma|), \Psi \in K$$

证:充分性,只需证条件 2)蕴涵(4.1-3)式的零解关于 Ω 绝对稳定。

$\forall \varepsilon>0, \exists\,\delta(\varepsilon)$, 因 $V(0)=0(0\in\Omega)$, 而 $V(\boldsymbol{x})$连续,故当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$, 有 $V(\boldsymbol{x}_0)<\varphi(\varepsilon)$,由条件 2)有

$$\varphi(|\sigma(t)|) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) < \varphi(\varepsilon)$$

故$|\sigma(t)|<(\varepsilon)$,从而(4.1-3)式的零解关于 Ω 稳定。

下面证　$\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$, $\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$, 由条件 2)知

$V(t)\overset{\text{def}}{=}V(\boldsymbol{x}(t))$单调下降,且有下界。

故　　$\inf\limits_{t\geqslant t_0} V(\boldsymbol{x}(t)) = \lim\limits_{t\to+\infty} V(\boldsymbol{x}(t)) \overset{\text{def}}{=} \alpha \geqslant 0$ 存在。

进而易证下极限 α 只能在 Ω 上达到。$\forall x_0 \in R^n$ 由条件 2)可知

$$|\sigma(t)| \leqslant |c^T x(t_0)| \stackrel{\text{def}}{=} h < H < \infty$$

若 $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) \neq 0$,由 $\sigma(t)$ 的一致连续性知存在 $\beta>0, \eta>0$ 和点列 $\{t_j\}$,使得

$$|\sigma(t)| \geqslant \beta \qquad \text{当 } t \in [t_j - \eta, t_j + \eta]$$

令
$$r = \inf_{\beta \leqslant |\sigma| \leqslant h} \Psi(|\sigma|) > 0$$

于是有
$$\begin{aligned} V(t) &\leqslant V(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant V(t_0) - \int_{t_0}^{t} \Psi(|\sigma(\tau)|)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant V(t_0) - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j-\eta}^{t_j+\eta} \Psi(|\sigma(\tau)|)\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant V(t_0) - 2n\eta r \to -\infty \qquad \text{当 } n \to \infty \end{aligned} \tag{4.9-1}$$

与 $V(x(t)) \geqslant 0$ 矛盾,从而 $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = 0$,故(4.1-3)式的零解关于 Ω 绝对稳定,由定理 4.9.1 知充分性成立。

必要性,因为(4.1-3)式的零解绝对稳定,故 R^n 是吸引区域,$\forall x \in R^n$,令

$$\varphi(x) = \sup_{t \geqslant 0}\{\|x(t)\|^2\}$$

易知 $\varphi(x)$ 有以下性质。

1) $\varphi(x) \geqslant 0$,等号当且仅当 $x=0$ 时成立,且 $\varphi(x)$ 是无穷大正定的;

2) $\varphi(x(t))$ 单调不增;

3) $\varphi(x)$ 是 R^n 上连续函数。

再定义

$$V(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x(\eta))\mathrm{e}^{\eta}\mathrm{d}\eta \tag{4.9-2}$$

则
$$V(x(t)) = \int_0^{+\infty} \varphi(x(t+\eta))\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta$$

记 $$\bar{q} = \int_0^{t+\eta} \varphi(\boldsymbol{x}(\xi))\mathrm{d}\xi$$

利用 $\varphi(\boldsymbol{x}(\xi))$的性质,经过分部积分等技巧,不难证明

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} < 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{x} \neq 0$$

从而存在正定函数 $W(\boldsymbol{x})$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} \leqslant -W(\boldsymbol{x})$$

由正定函数与类函数的等价关系有 $\tilde{\varphi}(\|\boldsymbol{x}\|) \in KR$ 和 $\Psi(\|\boldsymbol{x}\|) \in K$,使得

$$V(\boldsymbol{x}) \geqslant \tilde{\varphi}(\|\boldsymbol{x}\|) = \tilde{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\Big) \geqslant \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\boldsymbol{c}_i|}\sum_{i=1}^{n}|c_ix_i|\right)$$

$$\tilde{\varphi}\Big(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|}\Big)|\sigma| \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(|\sigma|) \in KR \tag{4.9-3}$$

故 $V(\boldsymbol{x})$关于 Ω 为无穷大正定。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} &\leqslant -W(\boldsymbol{x}) \leqslant -\Psi(\|\boldsymbol{x}\|) \\ &\leqslant -\tilde{\Psi}\Big(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\boldsymbol{c}_j|}\Big)\sum_{j=1}^{n}|c_ix_i| \\ &\quad -\tilde{\Psi}\Big(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|c_j|}|\sigma|\Big) \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{\Psi}(|\sigma|) \\ &\quad \tilde{\Psi} \in K\end{aligned} \tag{4.9-4}$$

故$\dfrac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 Ω 负定。从而定理的条件 2)成立,条件 1)成立是显然的。

定理 4.9.3 若下列条件满足

1) $(A+\theta\boldsymbol{bc}^{\mathrm{T}})$稳定,$\theta=0$ 或 $\theta=1$。

2)存在对称矩阵 $P_{n\times n}$和常数$\beta\geqslant 0,\alpha>0$,

使得 $$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} + \beta\int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \text{ 有估计式}$$

$$\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x} \geqslant \alpha\sigma^2 \qquad \text{或}$$

$$V(\boldsymbol{x}) = \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \beta > 0, \qquad 且\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma = +\infty$$

3) $\boldsymbol{x}^T(PA + A^TP)\boldsymbol{x} + (2P\boldsymbol{b} + \beta A^T\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}f(\sigma) + \beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma) \leqslant -\tau\varepsilon$

$\tau \in \{\sigma^2, \sigma f(\sigma), f^2(\sigma)\}$, $\quad 0<\varepsilon\ll 1$,则(4.1-3)式的零解绝对稳定。

证:只需证定理 4.9.3 的条件 2)、3)蕴涵定理 4.9.2 的条件 2)。

事实上,作 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x} + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$

由条件 2)有

$$\varphi_1(|\sigma|) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant V(\boldsymbol{x}) \qquad \varphi_1 \in KR$$

或

$$\tilde{\varphi}_1(|\sigma|) \stackrel{\text{def}}{=} \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant V(\boldsymbol{x}) \qquad \tilde{\varphi}_1 \in KR$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1-3)} = \boldsymbol{x}^T(PA + A^TP)\boldsymbol{x} + (2P\boldsymbol{b} + \beta A^T\boldsymbol{c})^T \cdot \boldsymbol{x}f(\sigma) + \beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma)$$
$$\leqslant -\varepsilon\tau \stackrel{\text{def}}{=} -\Psi(|\sigma|) \quad \tau \in \{\sigma^2, \sigma f(\sigma), f^2(\sigma)\}$$

故定理 4.9.2 的条件 2)满足,从而结论成立。

定理 4.9.3 优于前人的一些经典结果,下面以推论形式来说明这一问题。

推论 4.9.1 (即文献[57]定理 2.1)若存在对称正定矩阵 P 和常数 $\beta \geqslant 0$ 使得

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x} + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1-3)} = \boldsymbol{x}^T(PA + A^TP)\boldsymbol{x} + \left(2P\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\beta A^T\boldsymbol{c}\right)^T \cdot \boldsymbol{x}f(\sigma) + \beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma)$$

负定,则(4.1-3)式的零解绝对稳定。

证:只须验证定理 4.9.3 的条件满足。

当 A 稳定(对应 $\theta = 0$),有

$$V(0)=0,V(\boldsymbol{x})\geqslant\underline{\lambda}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\underline{\lambda}\frac{n\sum\limits_{j=1}^{n}|c_ix_i|^2}{n\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|c_j|^2}$$

$$\geqslant\underline{\lambda}\,\frac{n(\sum\limits_{j=1}^{n}c_ix_i)^2}{n\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|c_j|^2}$$

$$=\underline{\lambda}\frac{\sigma^2}{n\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_j|^2}\overset{\text{def}}{=}\varphi(|\sigma|)\in KR \tag{4.9-5}$$

这里 $\underline{\lambda}$为 P 的最小特征值。

故 $V(\boldsymbol{x})$关于 Ω 为无穷大正定函数。

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}\leqslant-\Psi(|\boldsymbol{x}|)\leqslant-\Psi(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|})\sum_{j=1}^{n}|c_i\boldsymbol{x}_i|$$

$$=-\Psi(\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|c_i|})|\sigma|\overset{\text{def}}{=}-\Psi(|\sigma|)$$

其中 Ψ_1、$\Psi\in K$，故定理 4.9.3 的条件全满足，故结论真。

下面来改进 Майгаран 定理[文献[74]P62 定理 1.1]

设 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=-A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}f(\sigma) \tag{4.9-6}$$

$$f\in F_{[k_1k_2]}\overset{\text{def}}{=}\{f\mid f(0)=0\quad k_1\sigma^2\leqslant\sigma f(\sigma)\leqslant k_2\sigma^2\quad\sigma\neq0\}$$

令 $\varphi(\sigma)\overset{\text{def}}{=}-k_1\sigma+f(\sigma)\qquad k=k_2-k_1\qquad$ 则 $\varphi(0)=0$

$$0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant k\sigma^2$$

$$S_1\overset{\text{def}}{=}\sigma\varphi(\sigma)$$

$$S_2\overset{\text{def}}{=}(f(\sigma)-k_1\sigma)(k_2\sigma-f(\sigma))\geqslant0$$

推论 4.9.2 设 A 稳定，$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 关于 Ω 正定，且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}f(\sigma)$$

其中 $$Q=PA+A^{\mathrm{T}}P$$

而
$$-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}+S_1\right)=\boldsymbol{x}^T(2Q+k_1\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x}$$
$$+2\boldsymbol{x}^T\left(P\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)f(\sigma) \qquad (4.9\text{-}7)$$

关于 Ω 正定。

或

$$-\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}+S_2\right)=\boldsymbol{x}^T(2Q+k_1k_2\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x}$$
$$+2\boldsymbol{x}^T\left(P\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right)\boldsymbol{c}f(\sigma) \qquad (4.9\text{-}8)$$

关于 Ω 正定。则(4.9-6)式的零解绝对稳定。

显然比 Майгаран 定理中要求 P 正定的条件要弱。

下面推广 Morozan 定理[32]。

考虑间接控制系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}f(\sigma) \quad A\in R^{n^2} \quad \boldsymbol{b}\in R^n \quad \boldsymbol{c}\in R^n \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\rho f(\sigma) \quad f(\sigma)\in F\end{cases} \qquad (4.9\text{-}9)$$

推论 4.9.3 Morozan 定理的推广

若 A 和 $\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}^T & -\rho\end{pmatrix}$ 稳定，且存在对称半正定矩阵和正数，使得

$$W(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^TG\boldsymbol{x}+f(\sigma)\{2u^T\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{x}\}-\rho f^2(\sigma)$$

半负定，其中 $u=B\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}$。

B 为 Ляпунов 矩阵方程 $BA+A^TB=-G$ 的对称正定解。

则(4.9-6)式的零解绝对稳定。

证：作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}+\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\frac{\beta}{2(\rho+\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{b})}$$
$$\cdot(\boldsymbol{c}^TA^{-1}\boldsymbol{x}-\sigma)^2 \qquad (4.9\text{-}10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}9)} &= -\boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{x} + 2f(\sigma)(B\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{x} - \rho f^2(\sigma) \\ &\quad + \frac{\beta}{(\rho + \boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{x} - \sigma)(\rho + \boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b})f(\sigma) \\ &= -\boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{x} + f(\sigma)\{2\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{x}\} \\ &\quad - \rho f^2(\sigma) - \beta\sigma f(\sigma) \\ &= W(\boldsymbol{x}) - \beta\sigma f(\sigma) \leqslant -\beta\sigma f(\sigma)\end{aligned}$$

故结论成立。

注 Morozan 定理要求 G 正定，W 负定，这些条件显然蕴涵推论 4.9.3 的条件成立。

下面利用定理 4.9.3 来讨论几个实例，这些实例有些既不属于直接控制系统，又不属于间接控制，而是更复杂的临界控制系统，这些例子，用 Лурье 方法、Popov 方法是十分棘手的，这些例子也很好地回答了文献[53]中 P.119 中的第二个问题。

例 1

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + x_2 + f(x_1 + x_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2 + 2f(x_1 + x_2) \quad f \in F_\infty\end{cases} \tag{4.9-11}$$

讨论它的零解的绝对稳定性。

① 令 $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$，代入例 1 之中得到

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad 稳定。$$

故定理 4.9.3 条件 1)满足。

②作 $V = (x_1 + x_2)^2$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}11)} = -2(x_1 + x_2)f(x_1 + x_2)$$

关于 $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{x, \sigma = x_1 + x_2 = 0\}$ 稳定，定理 4.9.3 条件 2)满足，故(4.9-11)式的零解绝对稳定。

例 2　讨论

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0x_1 + x_2 - f(x_1 - x_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 0x_2 + 2f(x_1 - x_2) \qquad f \in F_\infty \end{cases} \tag{4.9-12}$$

的零解的绝对稳定性。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{有一对纯虚特征值。}$$

故例 2 既不是直接控制，也不是间接控制，而是更复杂的临界控制系统。

①令 $f(x_1 - x_2) = x_1 - x_2$，代入(4.9-12)式，得到

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{稳定。}$$

②作 $V = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}12)} = -(x_1 - x_2)f(x_1 - x_2)$$

$$\text{关于 } \Omega = \{x, x_1 - x_2 = 0\}$$

负定，故定理 4.9.3 的条件全部满足，从而(4.9-12)式的零解绝对稳定。

例 3　研究三维控制系统

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(x_1 + x_2 + x_3) \tag{4.9-13}$$

① 易验证 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -1 \end{pmatrix}$ 稳定

② 作　$V = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}13)} \leqslant -2(x_1+x_2+x_3)f(x_1+x_2+x_3)$$

故$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}13)}$关于 $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x_1+x_2+x_3=0\}$负定,故零解绝对稳定。

此例固然可以用 Лурье 方法或 Popov 方法解决,但要进行极为复杂的计算,当解 Ляпунов 矩阵

$$PA + A^T P = -B$$

就遇到解 9 阶线性代数方程组,相当冗繁。

例 4 讨论下列三维控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0x_1 + x_2 - f(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 0x_2 + f(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2 - \rho f(\sigma) \qquad p>0 \qquad f(\sigma)\in F_\infty \end{cases} \tag{4.9-14}$$

这里 $\int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma = +\infty, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 不稳定,常见的传统方法失效。

①令 $f(\sigma)=0$ 代入(4.9-14)式,得

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\rho \end{pmatrix}$$

易验证 B 稳定。

② 作 $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.9\text{-}14)} = -\rho f^2(\sigma) < 0 \qquad 当\ \sigma \neq 0$$

故(4.9-14)式的零解绝对稳定。

§10 改进的 S 方法[68]

判定 Лурье 直接控制系统的绝对稳定性时,S 方法是最灵活,

应用最方便，苏联学者很乐于采用的方法，但传统的S方法要求凑成的 $S(\boldsymbol{x},\sigma)$关于$(\boldsymbol{x},\sigma)$负定，若为半负定，则失效了，还得借助于Красовский-Барбашин 定理或 LaSalle 不变原理才可能判定其绝对稳定性，相当麻烦，这里要介绍一个改进的S方法，它推广了原S方法，扩大了应用范围。

定理 4.10.1 设 A 稳定，且存在常数 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 及实对称正定矩阵 P，使得

$$r>0 \qquad R-\frac{1}{r}dd^T\geqslant 0 \tag{4.10-1}$$

或

$$R>0 \qquad r-\boldsymbol{d}^TR^{-1}\boldsymbol{d}\geqslant 0 \tag{4.10-2}$$

则(4.1-3)式的零解绝对稳定。这里

$$R=-PA-A^TP$$

$$\boldsymbol{d}=-\left[P\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\alpha\boldsymbol{c}+\beta A^T\boldsymbol{c})\right]$$

$$r=-\beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}+\frac{\alpha}{k}$$

$$0\leqslant\frac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant k\leqslant+\infty$$

证：作 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}+\beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{4.10-3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}=&\ \boldsymbol{x}^T(PA+A^TP)\boldsymbol{x}+2(P\boldsymbol{b}\\&+\frac{1}{2}\beta A^T\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}f(\sigma)+\beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}f^2(\sigma)\end{aligned} \tag{4.10-4}$$

利用S方法，将(4.10-4)式整理成为

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}&=\boldsymbol{x}^TR\boldsymbol{x}+2d^T\boldsymbol{x}f(\sigma)+rf^2(\sigma)+\alpha f(\sigma)(\sigma-\frac{1}{k})\\&\overset{\text{def}}{=}S(\boldsymbol{x},\sigma)+\alpha f(\sigma)(\sigma-\frac{1}{k}f(\sigma))\end{aligned}$$

这里 $S(\boldsymbol{x},\sigma)=\boldsymbol{x}^TR\boldsymbol{x}+2d^T\boldsymbol{x}f(\sigma)+rf^2(\sigma)$。 当 $k=+\infty$，则条件(4.10-1)或(4.10-2)式蕴涵着 $S(\boldsymbol{x},\sigma)\geqslant 0$，故 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)}\leqslant$

$-2\sigma f(\sigma)$关于 Ω 负定,从而由定理 4.9.3 知结论成立。

推论 4.10.1 若 $k=+\infty$,下列条件之一满足

① $$\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}\left(\frac{\beta c^T c}{2}+Pb\right)+\beta c^T b<0$$

② $$\left[\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}c\right]^2-[c^T R^{-1}c]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\beta c^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)+\beta c^T b\right]\geqslant 0$$

且 $$\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}c<0$$

③ $$\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}c\leqslant 0 \qquad 且$$

$$\left[\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}c\right]^2-[c^T R^{-1}c]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)+\beta c^T b\right]>0$$

则存在 $\alpha>0$,使得(4.10-2)成立,从而(4.1-3)式的零解绝对稳定。

证:因 $R>0$, 令 $d^T R^{-1}d-r=0$,即

$$\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb+\frac{\alpha c}{2}\right)^T R^{-1}\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb+\frac{\alpha c}{2}\right)+\beta c^T b=0$$

亦即

$$\frac{c}{2}R^{-1}\frac{c}{2}\alpha^2+\left[\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right]^T R^{-1}\frac{c}{2}+\frac{c^T}{2}R^{-1}\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)\alpha$$

$$+\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)^T R^{-1}\left(\frac{\beta A^T c}{2}+Pb\right)+\beta c^T b=0 \tag{4.10-5}$$

当且仅当条件①、②、③之一满足(4.10-5)式有正数解 α,从而条件①、②、③之一满足,定理 4.10.1 条件成立,故结论真。

推论 4.10.2 若 $k<+\infty$,下列条件成立

$$\frac{1}{k}-c^T R^{-1}d>0 \tag{4.10-6}$$

$$\left(\frac{1}{k}-c^T R^{-1}d\right)^2-c^T R^{-1}c(d^T R^{-1}d+\beta c^T b)>0 \tag{4.10-7}$$

则 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x} + \beta\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 沿(4.1-3)式的导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(4.1\text{-}3)}$关于 Ω 负定,从而(4.1-3)式的零解在 Hurwitz 角域[0, k]内绝对稳定。

证:由条件蕴涵着存在 $\varepsilon>0, 0<\varepsilon\ll 1$,使得

$$\frac{1}{k+\varepsilon} - \boldsymbol{c}^T R^{-1}\boldsymbol{d} > 0 \tag{4.10-8}$$

$$\left(\frac{1}{k+\varepsilon} - \boldsymbol{c}^T R^{-1}\boldsymbol{d}\right)^2 - \boldsymbol{c}^T B^{-1}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}^T B^{-1}\boldsymbol{d} + \beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}) > 0 \tag{4.10-9}$$

故有

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}3)} &= \boldsymbol{x}^T R \boldsymbol{x} + 2d^T \boldsymbol{x} f(\sigma) \\ &\quad + \tilde{r} f^2(\sigma) + \alpha f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{k+\varepsilon} f(\sigma)\right) \\ &\overset{\text{def}}{=} \tilde{S}(\boldsymbol{x},\sigma) + \alpha f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{k+\varepsilon} f(\sigma)\right) \end{aligned} \tag{4.10-10}$$

其中
$$d \overset{\text{def}}{=} -\left[P\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}(\alpha\boldsymbol{c} + \beta A^T\boldsymbol{c})\right]$$

$$\tilde{r} \overset{\text{def}}{=} -\left(\beta\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b} - \frac{\alpha}{k+\varepsilon}\right)$$

显然,R 正定,从而条件(4.10-6)、(4.10-7)式保证了

$$\det\begin{vmatrix} R & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}^T & \tilde{r} \end{vmatrix} = 0$$

关于 α 有正数解,故 $\tilde{S}(\boldsymbol{x},\sigma)\geqslant 0$,从而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.1\text{-}2)} \leqslant -\alpha f(\sigma)\left(\sigma - \frac{1}{k+\varepsilon} f(\sigma)\right) \tag{4.10-11}$$

关于 Ω 负定,即(4.1-3)式的零解在 Hurwity 角域[0,k]内绝对稳定。

推论 4.10.3 的条件,即定理 4.4.2 的条件说明了推广的 S 方法没有亏损。

文献[65]举了一个例子,说明经典的 S 方法是有亏损的,现仍用此例来说明新的 S 方法能判定它的绝对稳定性。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -2x_1 + 0x_2 + f(x_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1 - x_2 - \dfrac{1}{2}f(x_2) \end{cases} \tag{4.10-12}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{稳定}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $$V = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \int_0^{x_2} f(x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.10\text{-}12)} = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

$$+ 2x_1f(x_2) - 2x_2f(x_2) - \frac{1}{2}f^2(x_2)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1+s \\ 1 & -1+s & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ f(x_2) \end{pmatrix}$$

$$- sx_2f(x_2)$$

取 $s = \dfrac{1}{2}$ 便有

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant -\dfrac{1}{2}f(\boldsymbol{x}_2)\cdot x_2$ 故 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 关于

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x}, \sigma = x_2 = 0\}$$

负定,从而(4.10-12)式的零解绝对稳定。

§11 时变 Лурье 控制系统的绝对稳定性[71]

本节考虑时变 Лурье 控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma,t) \\ \sigma = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \end{cases} \tag{4.11-1}$$

的绝对稳定性。

这里 $A(t)\in C[I,R^{n\times n}]$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^n,\boldsymbol{x}\in R^n$

$$f \in \widetilde{F}_{[0,k]} = \{f: \mid f(0,t) \equiv 0,$$

$$0 \leqslant \frac{f(\sigma,t)}{\sigma} \leqslant k < +\infty, \sigma \neq 0, f \in \boldsymbol{C}[I \times R, R]\}$$

关于(4.11-1)式零解的绝对稳定性,关于 $\Omega:=\{\boldsymbol{x}\mid\sigma=0\}$的绝对稳定性,以及 $V(\boldsymbol{x})$函数关于 Ω 的定号性等定义与本章 §9 节相同。

定理 4.11.1 假设下列条件满足

1) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{4.11-2}$$

的零解一致渐近稳定;

2) (4.11-1)式的零解关于 Ω 在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定。

则(4.11-1)式的零解在 Hurwitz 角域$[0,k]$内绝对稳定。

证:根据常数变易法,(11-1)式的任意解能表示为

$$\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = K(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\boldsymbol{b}f(\sigma(\tau),\tau)d\tau$$

这里,$K(t,t_0)$是(4.11-2)式的 Cauchy 矩阵的解。

因为条件 1)成立,故存在常数 $\alpha>0$ 及 $M\geqslant 1$ 使得

$$\| K(t,\tau) \| \leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}$$

由条件 2),$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta_1(\varepsilon)>0$,使得当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_1(\varepsilon)$

$$|\sigma(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)| < \frac{2\varepsilon}{\alpha M \|\boldsymbol{b}\| k} \qquad 当\ t \geqslant t_0$$

这意味着当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_1(\varepsilon)$,则当 $t>t_0$ 有

$$\int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \| \boldsymbol{b}f(\sigma(\tau,t_0,\boldsymbol{x}_0),\tau) \| \,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \| \boldsymbol{b} \| k \mid \sigma(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \mid \mathrm{d}\tau < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.11-3}$$

取 $\delta(\varepsilon)=\min(\frac{\varepsilon}{\alpha M},\delta_1(\varepsilon))$,则当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$,$t\geqslant t_0$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \|k(t,t_0)\| \|\boldsymbol{x}_0\| + \int_{t_0}^{t} \|k(t,\tau)\| \|\boldsymbol{b}f(\sigma(\tau),\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故(4.11-1)式的零解稳定。

$\forall \boldsymbol{x}_0 \in R^n$,用 L'Hospital 法则可推出

$$0 \leqslant \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \lim_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \|\boldsymbol{x}_0\| +$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)} \|\boldsymbol{b}f(\sigma(\tau),\tau)\| \mathrm{d}\tau$$

$$= 0 + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha t}}\int_{t_0}^{t} M\mathrm{e}^{\alpha\tau} \|f(\sigma(\tau),\tau)\| \mathrm{d}\tau = 0$$

故(4.11-1)式的零解是绝对稳定的。

定理 4.11.2 假设

1)定理 4.11.1 的条件 1)成立;

2)存在一连续函数 $V(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}[R^n,R]$,使得

$$V(0) = 0 \qquad V(\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\mid\sigma\mid) \quad \varphi \in KR \tag{4.11-4}$$

3) $D^+V(\boldsymbol{x})|_{(4.11\text{-}1)} \leqslant -\Psi(|\sigma|) \quad \Psi\in R$ (4.11-5)

则(4.11-1)式的零解在[0,k]内绝对稳定。

证:因为 $V(0)=0(0\in\Omega)$,且 $V(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R]$,$\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall \boldsymbol{x}_0\in\ \varphi(\varepsilon)$,当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$,由(4.11-4)、(4.11-5)式有

$$\varphi(\mid\sigma(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\mid) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \varphi(\varepsilon) \quad 当\ t\geqslant t_0$$

这就蕴涵着

$$\mid\sigma(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\mid < \varepsilon \qquad 当\ t\geqslant t_0$$

今证:$\forall\, \boldsymbol{x}_0 \in R^n$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=0$

(4.11-5)式蕴涵着

$$\inf_{t\geqslant t_0} V(\boldsymbol{x}(t)) = \lim_{t\to\infty} V(\boldsymbol{x}(t)) \overset{\text{def}}{=} \alpha \geqslant 0$$

仿照前面定理充分性的证明,能证明

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t,t_0,\boldsymbol{x}_0) = 0$$

根据定理 4.11.1 知结论真。

定理 4.11.3 如果以下条件满足:

1) 定理 4.11.1 条件 1)成立,且 $|f(\sigma,t)|\geqslant\Psi(|\sigma|)\in K$;

2) 存在对称矩阵 $B(t)_{n\times n}$ 和常数 $\alpha>0,\beta_1>0,\beta_2>0$ 和 $\varepsilon>0$,使得有

$$\beta_1\sigma^2\geqslant \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x}\geqslant\beta_2\sigma^2 \qquad \text{且矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} G(t) & g(t) \\ g^T(t) & \dfrac{-\alpha}{k+\varepsilon}\end{pmatrix} \qquad \text{负定。}$$

这里
$$G(t)=A^T(t)B(t)+B(t)A(t)+\dot{B}(t)$$

$$g(t)=B(t)\boldsymbol{b}+\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}$$

则(4.11-1)式的零解是绝对稳定的。

证:选取关于 Ω 为径向无界的 Ляпунов 函数

$V(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T B(t)\boldsymbol{x}$ 则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.11\text{-}1)} &= \boldsymbol{x}^T(A^T(t)B(t)+\dot{B}(t)+B(t)A(t))\boldsymbol{x} \\
&\quad + 2\boldsymbol{x}^T B(t)\boldsymbol{b}f(\sigma,t) \\
&= \boldsymbol{x}^T(A^T(t)B(t)+\dot{B}(t)+B(t)A(t))\boldsymbol{x} \\
&\quad + 2\boldsymbol{x}^T B(t)\boldsymbol{b}f(\sigma,t)+a\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}f(\sigma,t)-\frac{\alpha}{k+\varepsilon}f^2(\sigma,t) \\
&\quad - \alpha\left(\sigma-\frac{f(\sigma,t)}{k+\varepsilon}\right)f(\sigma,t) \\
&= (\boldsymbol{x}^T, f(\sigma,t))\begin{pmatrix} G(t) & g(t) \\ g^T(t) & \dfrac{-\alpha}{k+\varepsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ f(\sigma,t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$-\alpha(\sigma-\frac{f(\sigma,t)}{k+\varepsilon})f(\sigma,t)$$

$$\leqslant-\alpha(\sigma-\frac{f(\sigma,t)}{k+\varepsilon})f(\sigma,t)$$

$$\leqslant-(\frac{\alpha}{k+\varepsilon})\varepsilon f(\sigma,t)\leqslant-\frac{\alpha\varepsilon}{k+\varepsilon}|\sigma|\Psi(|\sigma|)$$

故$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(4.11\text{-}1)}$关于 Ω 负定,从而(4.11-1)式的零解绝对稳定。

§12 具有多重非线性反馈项的控制系统[72]

考虑具有多重非线性反馈控制项的 Лурье 控制系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+\sum_{j=1}^{m}b_jf_j(\sigma_j) \tag{4.12-1}$$

$$\sigma_j=c_j^Tx=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_i \qquad j=1,2,\cdots,m$$

这里 $A\in R^{n\times n},\quad x\in R^n,\quad b_j=\mathrm{col}(b_{1j},\cdots,b_{nj}),$

$$c_j=\mathrm{col}(c_{1j},\cdots,c_{nj})$$

$$f_j\in F_\infty \qquad \mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$$

$$\Omega_j\overset{\mathrm{def}}{=}\{x,\sigma_j=c_j^Tx=0,j=1,2,\cdots,m\}$$

$$\Omega\overset{\mathrm{def}}{=}\{x,\|\sigma\|=\sum_{j=1}^{m}|\sigma_j|=\sum_{i=1}^{m}|c_i^Tx_i|=0\}$$

仿照上面关于 Ω 绝对稳定,关于 Ω 正定的 V 函数,关于 Ω 径向无界的 V 函数的定义,来定义(4.12-1)的零解关于(Ω,(Ω_j))绝对稳定,V 函数关于(Ω,(Ω_j))正定,径向无界等概念。

定理 4.12.1 (4.12-1)式的零解绝对稳定的充要条件是:

1)$B\overset{\mathrm{def}}{=}A+\sum_{j=1}^{m}b_jc_j^T\theta_j$ 稳定,其中 $\theta_j=1$ 或 $\theta_j=0$;

2) (4.12-1) 式的零解关于 Ω 绝对稳定。

证:充分性,由常数变易法公式(4.12-1) 式的通解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 可表示为

$$x(t)=\mathrm{e}^{B(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{B(t-\tau)}[\sum_{j=1}^{m}b_jf_j[\sigma_j(\tau)-\sum_{j=1}^{m}\theta_jb_j\sigma_j(\tau)]]\mathrm{d}\tau$$

仿照本章§9定理4.9.3的证法可完成充分性的证明。

必要性,1)若 A 稳定,则取 $\theta_j=0, j=1,2,\cdots,m$,则 $B=A$ 稳定,若 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$,则取 $\theta_j=1$,且取 $f_j(\sigma_j)=\sigma_j=\boldsymbol{c}_j^T\boldsymbol{x}, j=1,2,\cdots,m$,则(4.12-1)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=[A+\sum_{j=1}^{m}\theta_j\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{c}_j^T]\boldsymbol{x}$$

故 $$B=A+\sum_{j=1}^{m}\theta_j\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{c}_j^T \quad 稳定。$$

2) $\forall\varepsilon>0$,取 $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{c}_j^T\|}$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得

$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(\varepsilon)$ 则

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|=\sum_{j=1}^{m}|\boldsymbol{x}_j(t)|<\bar{\varepsilon} \qquad 当\ t\geqslant t_0$$

因此,当 $t\geqslant t_0$

$$\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{c}_j^T\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{c}_j^T\|\ \|\boldsymbol{x}(t)\|<\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{c}_j^T\|\bar{\varepsilon}=\varepsilon$$

因此 $\forall\boldsymbol{x}_0\in R^n$,有

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$$

于是有

$$0\leqslant\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{c}_j^Tx(t)\|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{c}_j^T\|\cdot\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$$

从而(4.12-1)的零解关于 Ω 是绝对稳定的。

定理 4.12.2 (4.12-1)式的零解绝对稳定的充要条件是当且仅当:

1) 定理4.10.1的条件1)成立;

2) 存在 $V(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R]$ 和 $\varphi\in KR,\Psi\in K$。

使得 $$V\geqslant\varphi(|\sigma|)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.12\text{-}1)}\leqslant-\Psi(|\sigma|)$$

证:必要性,因为(4.12-1)式的零解绝对稳定,故 R^n 是吸收

区域，$\forall f \in F, \forall \boldsymbol{x} \in R^n$，令

$$W(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|\boldsymbol{x}(t,0,\boldsymbol{x})\|^2, t \geqslant 0\} \tag{4.12-2}$$

则 $W(\boldsymbol{x})$具有如下性质。

1) $W(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=0, W(\boldsymbol{x})=0$。

$W(\boldsymbol{x})$是径向无界正定函数。

2) $W(\boldsymbol{x}(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|\boldsymbol{x}(t+\eta,0,\boldsymbol{x})\|^2, \eta \geqslant 0\}$，是单调递减函数。

3) $W(\boldsymbol{x})$在 R^n 内连续。

现定义

$$V(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} W(\boldsymbol{x}(\eta,0,\boldsymbol{x}))\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta \tag{4.12-3}$$

显然　　$V(\boldsymbol{x})$是径向无界正定函数，故存在 $\varphi \in KR$，使得

$$V(\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

令　　$$\overline{\Phi} = \int_0^{t+\eta} W(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$$

则　　$$\overline{\Phi}'_\eta = \overline{\Phi}'_t = W(\boldsymbol{x}(t+\eta)) \tag{4.12-4}$$

用分部积分便有

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}(t)) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\overline{\Phi} = \mathrm{e}^{-\eta}\int_0^{t+\eta} W(\boldsymbol{x}(\xi))\mathrm{d}\xi \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \overline{\Phi}(t+\eta)\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\ &= -\int_0^t W(\boldsymbol{x}(\xi))\mathrm{d}\xi + \int_0^{+\infty} \overline{\Phi}(t+\eta)\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{4.12-5}$$

因为 $W(\boldsymbol{x}(t))$是单调非增函数，$W(\boldsymbol{x}(t))$是有界的，因此，推出

$$W(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant W(\boldsymbol{x}(t+\eta)) \qquad \eta \geqslant 0$$

$$\lim_{\eta \to \infty} \mathrm{e}^{-\eta}\int_0^{t+\eta} W(\boldsymbol{x}(\xi))\mathrm{d}\xi = 0$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -W(\boldsymbol{x}(t)) + \int_0^{\infty} \overline{\Phi}'_t \mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta$$

$$= -W(x(t)) + \int_0^{+\infty} W(x(t+\eta))\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta$$

$$= \int_0^{+\infty} [W(x(t+\eta)) - W(x(t))]\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta$$

特别地，如果 $x(t)$是(4.12-1)式的非零解，则

$$W(x(t)) \not\equiv W(x(t+\eta)) \qquad \text{或}$$

$$W(x(t)) \equiv W(x(t+\eta)) \to 0 \qquad \text{当 } \eta \to +\infty$$

这意味着 $W(x(t)) \not\equiv W(x(t+\eta))$ 或

$$W = \sup(\|x(t,0,x)\|^2, t \geqslant 0) \neq 0$$

因此，如果 $x(t) \neq 0$，则

$$\int_0^{+\infty} [W(x(t+\eta)) - W(x(t))]\mathrm{e}^{-\eta}\mathrm{d}\eta < 0$$

即 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.12\text{-}1)} < 0$ 当 $x \neq 0$

这样，便有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.12\text{-}1)} \leqslant -\tilde{\varphi}(\|x\|) = -\tilde{\varphi}(\sum_{j=1}^{n} |x_i|)$$

$$\leqslant -\tilde{\varphi}(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\max\limits_{i,j}|c_{ij}|})\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}x_j|$$

$$\leqslant -\tilde{\varphi}(\frac{1}{m}\frac{1}{\max\limits_{i,j}|c_{ij}|})\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}x_j|$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} -\Psi(|\sigma|) \quad , \quad \Psi(|\sigma|) \in K$$

因此，条件 2)满足，证毕。

充分性，因为 $V(0)=0, 0 \in \Omega$，且 $V(X)$是 x 的连续函数，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$，使得 $V(x_0) < \varphi(\varepsilon)$，当 $\|x_0\| < \delta$，这意味着

$$\varphi(|\sigma(t)|) \leqslant V(x(t)) \leqslant V(x_0) \leqslant \varphi(\varepsilon)$$

即 $|\sigma(t)| < \varepsilon$

从而(4.12-1)式的零解关于 Ω 稳定。

现证 $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t,t_0,x_0) = 0 \qquad \forall x_0 \in R^n$

定理 4.12.2 的条件 2)蕴涵着

$$\varphi(|\sigma(t)|) \leqslant V(x(t)) \leqslant V(x_0)$$

故 $$|\sigma(t)|\leqslant\varphi^{-1}(V(x_0))\overset{\text{def}}{=}H<\infty$$

若 $$\lim_{t\to\infty}\sigma(t)\neq 0$$

因为在任何紧集中 $\sigma(t)$ 是一致连续的，故存在常数 $\beta>0,\eta>0$ 和序列 $t_0<t_1<t_2,\cdots,<t_n\to\infty$，使得

$$|\sigma(t)|\geqslant\beta \qquad \text{当 } t\in[t_j-\eta,t_j+\eta] \qquad j=1,2,\cdots$$

令 $$r=\inf_{\beta\leqslant|\sigma|\leqslant H}\Psi(\sigma) \qquad \text{从而可推出}$$

$$\begin{aligned}0\leqslant V(t)&\leqslant V(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{dV}{dt}dt\\&\leqslant V(t_0)-\sum_{j=1}^{n}\int_{t_j-\eta}^{t_j+\eta}\Psi(|\sigma(\tau)|)d\tau\\&\leqslant V(t_0)-2n\eta r\to\infty \qquad \text{当 } n\to\infty\end{aligned}$$

矛盾，说明了 $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$，从而(4.12-1)式的零解关于 Ω 绝对稳定，由定理 4.12.1 知结论真。

推论 4.12.1 (4.12-1)式零解绝对稳定当且仅当：

1)定理 4.12.1 的条件 1)成立；

2) $\forall f_j\in F(j=1,2,\cdots,m)$，存在 $V^{(j)}(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}[R^n,R](j=1,2,\cdots,n)$使得

$$V^{(j)}(\boldsymbol{x})\geqslant\varphi^{(j)}(|\sigma_j|),\varphi^{(j)}\in KR \qquad j=1,2,\cdots,m$$

$$D^+V^{(j)}\leqslant-\Psi^{(j)}(|\sigma_j|),\Psi^{(j)}\in K \qquad j=1,2,\cdots,m$$

推论 4.12.2 若下列条件满足，(4.12-1)式零解绝对稳定的。

1)定理 4.12.1 的条件 1)成立；

2)存在实对称矩阵 P 和常数 $\beta_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m,\alpha>0$。使得

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\int_0^{\sigma_j}f_j(\sigma_j)d\sigma_j$$

满足 $$\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}\geqslant\alpha\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{x}_i^2 \qquad \alpha>0 \qquad \text{为常数}$$

或 $$V(\boldsymbol{x}) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^{\sigma_j} f_j(\sigma_j)\mathrm{d}\sigma_j \qquad \beta_j > 0 \text{ 是常数}$$

$$\text{且} \quad \int_0^{+\infty} f(\sigma_j)\mathrm{d}\sigma_j = +\infty$$

3) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant -\varepsilon\tau$$

$$\tau \in \{\sigma^2, \quad \sum_{j=1}^{m} \sigma_j f_j(\sigma_j), \quad \sum_{j=1}^{m} f_i^2(\sigma_i), \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\}$$

ε 是正数。

则(4.12-1)式的零解绝对稳定。

这两个推论的证明是很容易的,故略。

例 1　考虑文献[67]研究过的例子

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{x}_1 - \varphi_1(\boldsymbol{x}_1) - 2\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{x}_2 - 2\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) - 2\varphi_1(\boldsymbol{x}_2) \end{cases} \tag{4.12-4}$$

其中 $\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) \in F_\infty$, $\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) \in F_\infty$,现在用极简单的方法证明它的绝对稳定性。

事实上,取

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1 \mathrm{sign}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \mathrm{sign}\boldsymbol{x}_2$$

$$D^+ V(\boldsymbol{x})|_{(4.12\text{-}4)} \leqslant -|\boldsymbol{x}_1| - |\boldsymbol{x}_2| < 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{x} \neq 0$$

根据推论 4.12.1 知(4.12-4)式的零解绝对稳定。

§13　具有刚性和旋转反馈的非线性控制系统

考虑具有刚性和旋转反馈的非线性控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\xi + df(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = f(\sigma) \qquad \sigma = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - r\xi - Nf(\sigma) \end{cases} \tag{4.13-1}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n, A\in R^{n^2}, \boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in R^n, r,N\in R', r\neq 0$,如图 4-5 所示。

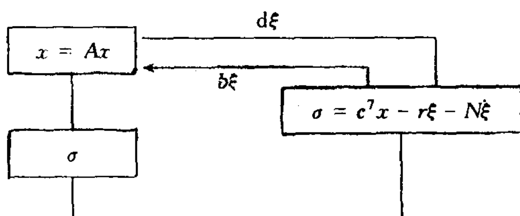


图 4-5

令

$$F^1_{[k_1,k_2]} \overset{\text{def}}{=} \{ f \mid f(0)=0, \quad 0\leqslant k_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant k_2\sigma^2, \forall \sigma\neq 0$$

$$0\leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant +\infty, f\in c', k_1 \leqslant \frac{\partial f}{\partial \sigma} \leqslant k_2 \}$$

显然　若 $N=0$,则(4.13-1)式是 Лурье 间接控制系统,若 $N=\boldsymbol{b}=\xi=0$, A 稳定,则(4.13-1)式是 Лурье 直接控制系统。

从
$$\sigma = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - r\xi - Nf(\sigma)$$
得到

$$\xi = r^{-1}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \sigma - Nf(\sigma)) \tag{4.13-2}$$

显然能化(4.13-1)式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \hat{A}\boldsymbol{x} + \hat{b}\sigma + \hat{d}f(\sigma) \\ W(\sigma)\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{x} - \hat{\rho}\sigma - \hat{N}f(\sigma) \end{cases} \tag{4.13-3}$$

这里　$\tilde{A} = A + \boldsymbol{b}r^{-1}\boldsymbol{c}^T$　　$\tilde{\boldsymbol{b}} = -r^{-1}\boldsymbol{b}$　　$\tilde{\boldsymbol{c}}^T = r^{-1}\boldsymbol{c}^T\tilde{A}$

$\tilde{d} = \boldsymbol{d} - r^{-1}\boldsymbol{b}N$　　$\tilde{P} = r^{-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{b}$　　$\tilde{N} = -r^{-1}\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{d}} + r$

$$W(\sigma) = 1 + \frac{\partial f}{\partial \sigma}N$$

定理 4.13.1　(4.13-1)式的零解绝对稳定的充要条件是

1)　$$B \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A + \dfrac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^T}{1+N} & \boldsymbol{b} - r\dfrac{\boldsymbol{d}r}{1+N} \\ \dfrac{\boldsymbol{c}^T}{1+N} & -\dfrac{r}{1+N} \end{bmatrix}$$ 是稳定的。

2)(4.13-2)式的零解关于 σ 绝对稳定。

证:必要性,令 $f(\sigma)=\sigma$,则(4.13-1)式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=(A+\dfrac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^T}{1+N})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{d}r}{1+N})\xi \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=(\dfrac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}}{1+N})-\dfrac{r}{1+N}\xi\end{cases} \tag{4.13-4}$$

故 B 应是稳定的。

(4.13-1)式与(4.13-2)式的零解绝对稳定性等价,由(4.13-2)式的零解绝对稳定,特别地应关于 σ 绝对稳定。

充分性,改写(4.13-1)为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=(A+\dfrac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}^T}{1+N})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{d}r}{1+N})\xi-\boldsymbol{d}\sigma+\boldsymbol{d}f(\sigma) \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=(\dfrac{\boldsymbol{c}^T}{1+N}\boldsymbol{x}-\dfrac{r}{1+N}\xi-\sigma+\boldsymbol{d}f(\sigma)\end{cases} \tag{4.13-5}$$

令

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \xi\end{bmatrix} \qquad \varphi(\sigma)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{d}\sigma, & \boldsymbol{d}f(\sigma)\\ -\sigma, & f(\sigma)\end{bmatrix}$$

则(4.13-5)式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=B\boldsymbol{y}+\varphi(\sigma) \tag{4.13-6}$$

将(4.13-6)式的通解表为

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{B(t-t_0)}\boldsymbol{y}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{B(t-\tau)}\varphi(\sigma(t))\mathrm{d}\tau \tag{4.13-7}$$

余下证明可仿照本章§9 定理 4.9.1 的充分性证明完成,略。

可以仿照本章§9 定理 4.9.2 证明。

定理 4.13.2 (4.13-2)式的零解绝对稳定当且仅当:

1)定理 4.13.1 的条件 1)成立;

2)存在函数 $V(z)\in \boldsymbol{C}^1[R^{n+1},R^1]$,满足

$$V(0)=0 \qquad V(z)\geqslant\varphi(|\sigma|) \qquad \varphi\in KR$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.13\text{-}2)}\leqslant-\Psi(|\sigma|) \qquad \Psi\in K$$

其中 $$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \sigma\end{pmatrix}$$

定理 4.13.3 假设

1) $W(\sigma)>0$，且 $\int_0^{\pm\infty} W(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\pm\infty$；

2) $\tilde{A}$ 是稳定的；

3)存在常数 $r_i\geqslant 0, j=1,2,\cdots,n, r_{n+1}>0$，使得

$$-r_j\tilde{a}_{jj}\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} r_i\mid\tilde{a}_{ij}\mid+r_{n+1}\mid\tilde{c}_j\mid\qquad j=1,2,\cdots,n$$

且 $\quad r_{n+1}P\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\tilde{b}_i|r_i\quad$，且 $\quad r_{n+1}\tilde{N}\geqslant\sum_{i=1}^{n}r_i|\tilde{d}_i|$

至少成立一个严格的不等式。

则(4.13-2)式的零解是绝对稳定的。

证:1)构造 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x},\sigma)=\sum_{j=1}^{n}r_i\mid x_i\mid+r_{n+1}\int_0^{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)W(\sigma)\mathrm{d}\sigma\tag{4.13-8}$$

显然 $\quad V(\boldsymbol{x},\sigma)\geqslant r_{n+1}\int_0^{\sigma}(\mathrm{sgn}\sigma)W(\sigma)\mathrm{d}\sigma\overset{\mathrm{def}}{=}\varphi(\mid\sigma\mid)\in KR$

$$\begin{aligned}D^+V(\boldsymbol{x},\sigma)\mid_{(4.13\text{-}2)}\leqslant&\sum_{j=1}^{n}r_j\tilde{a}_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}r_j\tilde{a}_{jj}+r_{n+1}\mid\tilde{a}_j\mid\mid x_j(t)\mid\\&+[-r_{n+1}P+\sum_{j=1}^{n}\mid\hat{b}_j\mid r_i]\mid\sigma(t)\mid\\&+[-\tilde{N}r_{n+1}+\sum_{j=1}^{n}r_i\mid\hat{d}_i\mid]\mid f(\sigma(t))\mid\end{aligned}$$

$$\leqslant\begin{cases}[-r_{m+1}\hat{N}+\sum_{j=1}^{n}r_i\mid\hat{d}_i\mid]\mid f(\sigma(t))\mid & <0\quad 当\ \sigma\neq 0\\ \qquad\qquad 或 & \\ [-r_{m+1}P+\sum_{i=1}^{n}\mid\hat{b}_i\mid r_i]\mid\sigma(t)\mid & <0\quad 当\ \sigma\neq 0\end{cases}$$

故(4.13-2)式的零解关于 σ 绝对稳定。

2)(4.13-2)式的解能表示为

$$x(t)=e^{\hat{A}(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{\hat{A}(t-\tau)}[\hat{b}(\sigma(\tau))+\hat{d}f(\sigma\tau)]d\tau$$

仿照定理4.13.1,可证:$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,使得

$$\|x(t)\|<\varepsilon \qquad \text{当} \|x_0\|+|\sigma_0|<\delta$$

且 $\forall(x_0,\sigma_0)\in R^{n+1}$,有

$$\lim_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0,\sigma_0)=0$$

定理4.13.3证毕。

定理4.13.4 假设

1) $W(\sigma)>0$, $\int_0^{\pm\infty}W(\sigma)d\sigma=\pm\infty$

2) $\hat{a}_{ij}<0$, $\hat{P}>0$, $\hat{N}>0$, $i=1,2,\cdots,n$

3)$_a$

$$G_1\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}|\hat{a}_{11}| & -|\hat{a}_{12}| & \cdots & -|\hat{a}_{1n}| & -|\hat{b}_1|\\ -|\hat{a}_{21}| & |\hat{a}_{22}| & \cdots & -|\hat{a}_{2n}| & -|\hat{b}_2|\\ \vdots & & & & \\ -|\hat{a}|_{n1}| & \cdots & & & -|\hat{b}_n|\\ -|\hat{c}|_1| & |-\hat{c}_2| & \cdots & & -\hat{P}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

是一个 M 矩阵,且$|\hat{b}_i|\geqslant|\hat{d}_i|$, $\hat{P}<\hat{N}$,或

3)$_b$

$$G_2\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}|\hat{a}_{11}| & -|\hat{a}_{12}| & \cdots & -|\hat{a}_{1n}| & -|\hat{d}_1|\\ -|\hat{a}_{21}| & |\hat{a}_{22}| & \cdots & -|\hat{a}_{2n}| & -|\hat{d}_2|\\ \vdots & & & \vdots & \vdots\\ -|\hat{a}|_{n1}| & & & & -|\hat{d}_n|\\ -|\hat{c}|_1| & \cdots & & |-\hat{c}_n| & -\hat{N}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

是一个 M 矩阵,且 $|\hat{d}_i|\geqslant|\hat{b}_i|$,$\hat{N}\leqslant\hat{P}$,则(4.13-2)式的零解是绝对稳定的。

证:若条件 1),2),3)a 成立,因为 $\hat{a}_{ii}<0$, $i=1,2,\cdots,n$, $\hat{P}>0$, $\hat{N}>0$,且 G_1 是一个 M 矩阵,于是存在常数 $\eta_i>0$, $i=1,2,\cdots,n+1$,使得

$$\begin{cases} \eta_j\hat{a}_{jj} + \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} |\hat{a}_{ii}|\eta_i + \eta_{n+1}|\hat{c}_j| < 0 & (4.13\text{-}9) \\ \eta_{n+1}\hat{P} + \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} |\hat{b}_i|\eta_i < 0 & (4.13\text{-}10) \end{cases}$$

构造 Ляпунов 函数

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n}\eta_i|x_i| + \eta_{n+1}\int_0^{\sigma}W(\sigma)\mathrm{sgn}\sigma\mathrm{d}\sigma \in KR \qquad (4.13\text{-}11)$$

由 $|\hat{b}_i| \geqslant |\hat{d}_i|, i = 1,2,\cdots,n, \hat{P} \leqslant \hat{N}$ 由

$$-\eta_{n+1}\hat{P} + \sum_{i=1}^{n}|\hat{b}_i|\eta_i < 0$$

可推出

$$-\eta_{n+1}\hat{N} + \sum_{i=1}^{n}|\hat{d}_i|\eta_i < 0$$

因此，$D^+V(x,\sigma)|_{(4.13\text{-}2)} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n}(\eta_j\hat{a}_{jj} + \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|\hat{a}_{ij}|\eta_j +$

$$\eta_{n+1}|\hat{c}_j|)|x_j| + [-\eta_{n+1}\hat{P} + \sum_{i=1}^{n}|\hat{b}_i|\eta_i]|\sigma|$$

$$+ [-\eta_{n+1}\hat{N} + \sum_{i=1}^{n}|\hat{d}_i|\eta_i]|f(\sigma)|$$

$$\leqslant 0 \quad 当 |x|+|\sigma| \neq 0 \qquad (4.13\text{-}12)$$

因此(4.13-2)式的零解是绝对稳定的，类似地，能证明 1)，2)，3)$\boldsymbol{b}$ 蕴涵着(4.13-2)式的零解绝对稳定，定理 4.13.4 证毕。

定理 4.13.5 设

$$e_i = (\hat{b}_i + \hat{d}_i\frac{f(\sigma)}{\sigma}), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$e_{n+1} = (-\hat{P} - \hat{N}\frac{f(\sigma)}{\sigma})$$

且下列条件满足：

1) $\omega(\sigma) > 0, \int_0^{\pm\infty}\omega(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \pm\infty$。

2) 存在常数 $p_i>0, i=1,2,\cdots,n+1$, 使得矩阵 W $(\omega_{ij(n+1)\times(n+1)})$是负定的,这里

$$W_{ij}=W_{ji}=\begin{cases} p_i\bar{a}_{ij}+p_j\hat{a}_{ji} & \text{当 } 1\leqslant i,j\leqslant n \\ p_ie_i+p_{n+1}e_i & 1\leqslant i\leqslant n, j=n+1 \\ 2p_{n+1}e_{n+1} & j=j=n+1 \end{cases}$$

则(4.13-2)式的零解绝对稳定。

证:构造无穷大正定函数

$$V(x,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2+2p_{n+1}\int_0^\sigma\omega(\sigma)\sigma\mathrm{d}\sigma$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(4.13\text{-}2)}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}W_{11} & W_{1i} & & W_{1n+1}\\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n+1}\\ \vdots & & & \vdots\\ W_{n+11} & \vdots & & W_{n+1,n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\\sigma\end{pmatrix}<0$$

当$|\sigma|+|x|\neq0$

因此(4.13-2)式的零解是绝对稳定的。

定理 4.13.6 假设下列条件满足

1) $f\in F|_{[k_1,k_2]}$ $k_1>0$ $\int_0^{\pm\infty}W(\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\pm\infty$。

2) B 是稳定的(B 在定理 4.13.1 中定义)。

3) 存在对称半正定矩阵 $P=(P_{ij})_{n\times n}$和常数$\alpha>0,\varepsilon>0$,使得

$$\begin{pmatrix}x\\\sigma\\f(\sigma)\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}G & P\hat{b} & 2\hat{c}+P\hat{d}\\ \hat{b}^TP & 2\alpha\hat{P}k_1 & 2\hat{P}\\ 2\hat{c}^T+\hat{d}^TP & 2\hat{P} & \alpha\hat{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\\sigma\\f(\sigma)\end{pmatrix}\geqslant\varepsilon J$$

这里 $G=-(\hat{A}^TP+P\hat{A})$ $J\in\{\sigma^2 \quad \sigma f(\sigma) \quad f^2(\sigma)\}$

则(4.13-2)式的零解绝对稳定。

证:构造下列 Ляпунов 函数

$$V(x,\sigma)=x^TPx+\alpha\int_0^\sigma\omega(\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \quad (4.13\text{-}13)$$

很清楚 $V(\boldsymbol{x},\sigma)\geqslant\alpha\int_0^\sigma W(\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ 当 $|\sigma|\to+\infty$

且 $V(\boldsymbol{x},\sigma)>0$,当 $|\boldsymbol{x}|+|\sigma|\neq 0$,进而有

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.13\text{-}2)} &= \boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T P\hat{b}\sigma - 2\boldsymbol{x}^T P\hat{d}f(\sigma) - 2\alpha\hat{c}^T\boldsymbol{x}f(\sigma) \\
&\quad + 2\alpha\hat{P}\sigma f(\sigma) - 2\alpha\hat{N}f^2(\sigma) \\
&\geqslant \boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T P\hat{b}\sigma - 2\boldsymbol{x}^T P\hat{d}f(\sigma) - 2\alpha\hat{x}^T\boldsymbol{x}f(\sigma) \\
&\quad + 2\alpha\hat{P}k_1\sigma^2 + 2\alpha\hat{N}f^2(\sigma)
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} G & P\hat{b}^T P & 2\hat{c}^T + P\hat{d} \\ \hat{b}P & 2\alpha\hat{P}k_1 & 2\hat{P} \\ 2\hat{c}^T + \hat{\alpha}^T P & 2\hat{P} & 2\alpha\hat{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix} \geqslant \varepsilon J \tag{4.13-14}
$$

即 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(4.13\text{-}2)}\leqslant -\varepsilon J \overset{\text{def}}{=} -\widetilde{\Psi}(|\sigma|)$ $\widetilde{\Psi}\in K$ 因此(4.13-2)式的零解是绝对稳定的。

例 1 考虑形如(4.13-2)式的三阶控制系统

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t \\ W(\sigma)\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{b}_1 & \hat{d}_1 \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{b}_2 & \hat{d}_2 \\ \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & -\hat{P} & -\hat{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix} \tag{4.13-15}
$$

这里 $k_1=0, k_2=2$ 定理 4.13.3 的条件 1)显然满足。

$\hat{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$是稳定的,定理 4.13.3 的条件 2)成立。

取 $r_1=r_2=1$, $r_3=2$,则

$$
-r_1\hat{a}_{11} = 2 = r_2|\hat{a}_{21}| + r_3\hat{c}_1
$$

$$-r_2\hat{a}_{22}=2=r_2|\hat{a}_{12}|+r_3\hat{c}_2$$
$$r_3\hat{P}=2=r_1|b_1|+r_2|b_2|$$
$$r_3\hat{N}=4>3r_1|d_1|+r_2|d_2|$$

定理 4.13.3 的条件 3)成立,故(4.13-15)式的零解绝对稳定。

例 2　考虑一个由(4.13-1)式型的系统变换而来的系统

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t \\ W(\sigma)\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -p & -N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \sigma \\ f(\sigma) \end{pmatrix} \qquad (4.13\text{-}16)$$

$k_1=0$　显然定理 4.13.6 的条件 2) 满足,且

$|b_i|\geqslant|d_i|$　　$i=1,2,3$　　$P=4=N$

$\Delta_1=|a_{11}|=4>0$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & -|a_{13}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & -|a_{23}| \\ -|a_{31}| & -|a_{32}| & |a_{33}| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=29>0$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & -|a_{13}| & |b_1| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & -|a_{23}| & |b_2| \\ -|a_{31}| & -|a_{32}| & |a_{33}| & |b_3| \\ -|c_1| & -|c_2| & -|c_3| & P \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0
$$

故

$$
G_1 = \begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & -|a_{13}| & |b_1| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & -|a_{23}| & |b_2| \\ -|a_{31}| & -|a_{32}| & |a_{33}| & |b_3| \\ -|c_1| & -|c_2| & -|c_3| & |q_{44}| \end{vmatrix} \text{是一个 } M \text{ 矩阵。}
$$

根据定理 4.13.6 知(4.13-16) 式的零解绝对稳定。

第五章　两类连续神经网络

人工神经网络模型很多，本章仅就其中最典型最富有代表性的 Hopfield 连续神经网络及细胞神经网络的稳定性进行分析，重点是讨论前者。§1 推广、改进和发展 Hopfield 的稳定性判据；§2 在允许激活函数的增益无界的情况下讨论 Hopfield 神经网络的全局稳定性；§3 用一次近似方法讨论 Hopfield 网络的局部稳定与不稳定性；§4 研究 Hopfield 网络的全局指数稳定性；§5 给出了吸收区域的估计；§6 对细胞神经网络进行了定性分析。

§1　Hopfield 模型及稳定性判据[88~91]

80 年代，美国加州理工大学生物物理学家 Hopfield 提出了一种新型的连续神经网络模型[88~91]——Hopfield 模型，用常微分方程组描述如下

$$\begin{cases} C_i \dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_i}{R_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} T_{ij}V_j + I_i \qquad i = 1,2,\cdots,n \\ V_i = g_i(u_i) \end{cases} \tag{5.1-1}$$

$T_{ij} = T_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$，其中电阻 R_i 和电容 C_i 的并联，模拟了生物神经之输出的时间常数，而跨导 T_{ij} 则模拟神经元之间互连的突触特征，运算放大器则模拟神经元的非线性特征，电压 u_i 为第 i 个神经元的输入，V_i 为其输出。$V_i = g_i(u_i)$ 为神经元非线性连续可微严格单调递增函数。电路图及工作原理如文献[88~91]所示。设 $G_i(V_i) = g_i^{-1}(V_i) = u_i$，　$i = 1,2,\cdots,n$

在 $T_{ij} = T_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$ 的假定下，Hopfield 构造了如下的计算能量函数

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_iV_j - \sum_{i=1}^{n}V_iI_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}\int_0^{V_i}G_i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

沿(5.1-1)式的解对 E 求导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial V_i}\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}C_iG'_i(V_i)(\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t})^2 \leqslant 0$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}1)} = 0$ 等价于 $\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = 0$ 等价于

$$\frac{-u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_j + I_i = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n \quad (5.1\text{-}2)$$

人们由(5.1-2)式而得到结论:1)(5.1-1)式是稳定的,解演化到系统的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$,这平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 渐近稳定。2)$\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$自动演化到 $\boldsymbol{u}^*$,$\boldsymbol{u}^*$ 为 $E(V)$的极小值点。

人们只要仔细地分析一下,就不难发现,用这种方法,只能得到解 $\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$趋于(5.1-1)式的某一个平衡位置 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{u}_0)$,而 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{u}_0)$依赖于始值 $\boldsymbol{u}_0$,不能断定 $\boldsymbol{u}^*$ 是 Ляпунов 意义下稳定的,更不能断言 $\boldsymbol{u}^*$ 一定是吸引的;只能得到 $\boldsymbol{u}^*$ 是 $E(V)$的驻点(逗留点),不能断定它必然是 $E(V)$的极小值点,具体给定一个平衡位置 $\boldsymbol{u}^*$,问是否稳定,用这种方法也不能判定,因此,神经网络中所讨论的稳定性,是一种不同于 Ляпунов 意义下的稳定性,由于它广泛地应用到多方面(例如联想记忆、优化计算),很受人关注,因此完善、改进、发展这种稳定性理论和方法是很有意义的。

本节,试图从两个方面来讨论这个问题。

1)首先给 Hopfield 意义下的稳定性一个严格的数学定义,把它和某集合吸引的概念建立联系,然后推广 Hopfield 型计算能量函数法,使它能判定一类权矩阵为非对称的神经网络系统的 Hopfield 稳定性。

2)将原来的 Hopfield 型计算能量函数略加改进,使之能判定通过解的演化找到的平衡位置是否渐近稳定,并能估计吸引区域。

现在先讨论第一个问题[112]：

设(5.1-1)式平衡点的全体所构成的集合为

$$E =: \{ \boldsymbol{u} \mid \frac{u_i}{R_i} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} V_j + I_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \}$$

令 $\boldsymbol{u} \in R^n$ 为任意一点。

$$\rho(\boldsymbol{u}, E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in E} \{ \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} \| \}$$

表示点 $\boldsymbol{u}$ 到 E 的距离。

定义 5.1.1 称(5.1-1)式的平衡点集 E 是吸引的。如果 $\forall k > 0, \forall \boldsymbol{u}_0 \in S_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ \boldsymbol{u}, \| \boldsymbol{u} \| \leqslant k \}$ 过始值 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$ 的(5.1-1)式的解 $\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0)$ 满足

$\rho(\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{u}_0), E) \to 0$，当 $t \to \infty$

从 Hopfield 所构造的计算能量函数所得到的结论来看，他所言的稳定性实质上就是(5.1-1)式的平衡点集 E 的吸引性。

不妨把 E 的吸引性称为 Hopfield 意义下的稳定性，简称为 H 稳定。

这种平衡点集的吸引性有很好的实用价值。现在对 Hopfield 型计算能量函数予以推广，或代之用其它方法来研究 E 的吸引性，将会扩大应用范围。

下面，利用 LaSalle 不变原理来严格证明在一定条件下（比 Hopfield 的条件更广泛），平衡点集 E 的吸引性。先建立以下引理：

引理 5.1.1 设 $|g_i(u_i)| \leqslant k_i \quad (i = 1, \cdots, n) \quad k_i$ 为某些正常数。令

$$\mathscr{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \boldsymbol{u} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} [| u_i | - \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | k_j R_i + | I_i | R_i)]^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} [\frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | k_j R_j + | I_i | R_i)]^2 \}$$

则(5.1-1)式的从初始值 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathscr{D}$ 出发的解，恒停留在 $\mathscr{D}$ 内。

证：令 $W(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^2$，沿(5.1-1)式之解对 $W(\boldsymbol{u})$ 求导数

便有

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{(5.1\text{-}1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} k_j \mid T_{ij}u_i \mid - \frac{u_i^2}{R_i} + \mid I_i \mid \mid u_i \mid\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{R_i}\left(u_i^2 - \sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i \mid u_i \mid - \mid I_i \mid R_i \mid u_i \mid\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{1}{R_i}\left[u_i^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right) \mid u_i \mid\right]\right.$$

$$- \frac{1}{R_i}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right]^2$$

$$\left. + \frac{1}{R_i}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right)\right]^2\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{1}{R_i}\left[\mid u_i \mid - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right)\right]^2\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right)\right]^2$$

于是,当 $\boldsymbol{u} \in R^n / \mathscr{D}$,即

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\left[\mid u_i \mid - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right)\right]^2$$

$$> \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \mid T_{ij} \mid k_j R_i + \mid I_i \mid R_i\right)\right]^2$$

$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{(5.1\text{-}1)} < 0$ 故

从 $\mathscr{D}$ 中出发的解,不会越出 $\mathscr{D}$,恒停留在 $\mathscr{D}$ 中。

定理 5.1.1[112] 若存在常数 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$使得$(\beta_i T_{ij})_{n\times n}$为一对称矩阵,则(5.1-1)式的平衡点集 E 是吸引的,亦即(5.1-1)式是 H 稳定的。

证:构造广义 Hopfield 型计算能量函数

$$\widetilde{W}(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\beta_i T_{ij})V_i V_j - \sum_{i=1}^{n}\beta_i I_i V_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i \frac{1}{R_i}\int_0^{V_i} G_i(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1-3}$$

沿(5.1-1)式的解,对 $\widetilde{W}(\boldsymbol{u})$ 求导数有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{W}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial V_i} \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\beta_i T_{ij})V_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\beta_j T_{ij})V_j + \beta_i \frac{u_i}{R_i} - \beta_i I_i]\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{2}(\beta_i T_{ij}) - \beta_j T_{ji}]V_j - \sum_{j=1}^{n}[(\beta_i T_{ij})V_j + \beta_i \frac{u_i}{R_i} - \beta_i I_i]\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{i=1}^{n} C_i\beta_i g'(u_i)(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t})^2 \leqslant 0$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{W}(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}=0$ 等价于 $\dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$等价于

$$\frac{-u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}V_j + I_i = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

因为 $\widetilde{W}(\boldsymbol{u}(t))$是单调下降的,而 $\hat{W}(\boldsymbol{u}(t))$在 $\mathscr{D}$ 内是有界的,故$\lim\limits_{t\to\infty}\hat{W}(\boldsymbol{u}(t)) = \hat{W}_0$ 存在。

$\forall \boldsymbol{u}_0 \in \mathscr{D}$,设 $\Omega(\boldsymbol{u}_0)$为解 $\boldsymbol{u}(t,t_0,\boldsymbol{u}_0)$的 Ω 集,E 为(5.1-1)式的平衡点集,M 为(5.1-1)式的在 $\mathscr{D}$ 内的最大不变集,由 LaSalle 不变原理,有

$$\boldsymbol{u}(t,t_0,\boldsymbol{u}_0) \to M \quad (\text{当 } t \to +\infty)$$

但是 $\Omega(\boldsymbol{u}_0) \subseteqq E \subseteqq M$

因此,E 是吸引的,即平衡点集是 Hopfield 意义下稳定的。

推论 5.1.1 若 $T_{ij} = T_{ji}$,即 T 为对称矩阵,则(5.1-1)式是 Hopfield 意义下稳定的。这是定理 5.1.1 中 $\beta_i = 1(i=1,2,\cdots,n)$的情况,正是 Hofield 的结论。

例 1 考虑一个 3 维权矩阵不对称的 Hopfield 神经网络

$$\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-u_1\\ -u_2\\ -u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 4\\ 1/2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{pmatrix} \tag{5.1-4}$$

今取 $\beta_1=2,\beta_2=1,\beta_3=4$,则$(\beta_i T_{ij})_{3\times3}$

$$(\beta_i T_{ij}) = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$$ 是对称的。

从而(5.1-4)式是 Hopfield 意义下稳定的。

现在,借助于区间矩阵稳定性的方法和结果,来研究(5.1-1)式的平衡点集 E 的吸引性,拓广 Hopfield 意义下稳定性的研究。

对(5.1-1)式的两边求导数,且令

$$y_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

则(5.1-1)式化为

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{y_i}{C_iR_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}g_j'(u_j)y_j \tag{5.1-5}$$

仅在 $\mathscr{D}$ 中考虑平衡点集,$\mathscr{D}$ 为引理 5.1.1 所定义。

令 $\underline{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{u_j\in\mathscr{D}}\left\{\frac{T_{ij}}{C_i}g_j'(u_j)\right\}$ $\qquad \overline{T}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{u_j\in\mathscr{D}}\left\{\frac{T_{ij}}{C_i}g_j'(u_j)\right\}$

则(5.1-5)式便化为了一个区间动力系统

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{y_i}{C_iR_i} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j \tag{5.1-6}$$

其中 $\alpha_{ij}\in[\underline{T}_{ij},\ \overline{T}_{ij}]$。

$\forall\,\alpha_{ij}\in[\underline{T}_{ij},\overline{T}_{ij}]$,(5.1-6)式的零解渐近稳定,则称区间动力系统(5.1-6)式是渐近稳定的。显然,区间动力系统(5.1-6)式的渐近稳定性的充分条件往往是(5.1-5)式的零解渐近稳定的充分条件。

因此,下面给出区间动力系统(5.1-6)的零解渐近稳定的充分

条件。

定理 5.1.2[112] 设 $-\frac{1}{C_iR_i}+\overline{T}_{ii}<0 \quad i=1,2,\cdots,n$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\frac{1}{C_iR_i}-\overline{T}_{ii}\right)-(1-\delta_{ij})\max\{|\underline{T}_{ij}| \quad |\overline{T}_{ij}|\} \right\}_{n\times n}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (b_{ij})_{n\times n}$$

为一个 M 矩阵,则区间动力系统(5.1-6)的平凡解是渐近稳定的,从而(5.1-6)式的零解渐近稳定,即(5.1-1)是 Hopfield 意义下稳定的。

证:因为 B 为一个M 矩阵,故$(B^T)^{-1}\geqslant 0$

$\forall \xi=\mathrm{col}(\xi_1,\cdots,\xi_n)>0,\eta\stackrel{\text{def}}{=}(B^T)^{-1}\xi>0$

(即 $\xi_i>0,\eta_i>0,i=1,\cdots,n$)

对于$\forall \alpha_{ij}\in(\underline{T}_{ij},\overline{T}_{ij})$,对(5.1-6)式作正定的 Ляпунов 函数

$$W(y)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i|y_i|$$

沿(5.1-6)式的解对 $W(y)$求 Dini 导数

$$D^+W(y)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(y_i)\left(-\frac{1}{C_iR_i}y_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j\right)\eta_i$$

$$\leqslant -y^TB^T\eta=-\sum_{i=1}^{n}\xi_i|y_i|<0 \qquad \text{当 } y\neq 0 \tag{5.1-7}$$

故结论成立。

定理 5.1.3[112] 若矩阵 $B^*=(b_{ij}^*)_{n\times n}$是负定的,则(5.1-6)式的零解渐近稳定从而(5.1-5)式的零解渐近稳定,即(5.1-1)是 Hopfield 意义下稳定的。

这里 $b_{ii}^*=\frac{-1}{C_iR_i}+\overline{T}_{ii} \qquad i=1,2,\cdots,n$

$$b_{ij}^*=\max_{i\neq j}\left[\frac{|\underline{T}_{ij}+\underline{T}_{ji}|}{2},\frac{|\overline{T}_{ij}+\overline{T}_{ji}|}{2}\right] \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

$i\neq j$

证:对(5.1-6)式作 Ляпунов 函数

$$W(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}y_i^2$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}W(y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}6)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{C_i R_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{C_i R_i} - \overline{T}_{ii}\right) y_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left(\frac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}\right) y_i y_j$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{C_i R_i} - \overline{T}_{ii}\right) y_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} b_{ij}^{*} \mid y_i \mid \mid y_j \mid$$

$$\leqslant (\mid y_1 \mid \cdots \mid y_n \mid)(B^{*})\mathrm{col}(\mid y_1 \mid, \cdots \mid y_n \mid)$$

$$< 0 \quad 当\ y \neq 0 \tag{5.1-8}$$

从而定理 5.1.3 的结论成立。

例 2　考虑一个二维 Hopfield 神经网络

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{R_1} + T_{11} g_1(u_1) + T_{12} g_2(u_1) + I_1 \\ C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{1}{R_2} + T_{21} g_1(u_1) + T_{22} g_2(u_2) + I_2 \end{cases}$$

设　$C_i = \dfrac{1}{2}$, $R_i = \dfrac{1}{3}$, $i = 1.2$,　$\overline{T}_{ii} = 2$, $\underline{T}_{ii} = -2$, $i = 1.2$,

$\underline{T}_{12} = -3.5$, $\overline{T}_{12} = 3$, $\underline{T}_{21} = -3$, $\overline{T}_{21} = 4$

其中　$\underline{T}_{ij} = \inf\limits_{u_j \in R} \left\{ \dfrac{T_{ij}}{C_i} g_j'(u_j) \right\}$, $\overline{T}_{ij} = \sup\limits_{u_j \in R} \left\{ \dfrac{T_{ij}}{C_i} g_j'(u_j) \right\}$

于是　$\dfrac{-1}{C_i R_i} + \overline{T}_{ii} = -6 + 2 = -4 < 0 \qquad i = 1,2$

$$B \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C_1 R_1} + \overline{T}_{11} & -\max(\mid \underline{T}_{12} \mid, \mid \overline{T}_{12} \mid) \\ -\max(\mid \underline{T}_{21} \mid, \mid \overline{T}_{21} \mid), & \dfrac{1}{C_2 R_2} - \overline{T}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3.5 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad 为\ M\ 矩阵。$$

故例 2 是 Hopfield 意义下稳定的。

下面,用 Красовский 定理[6]来研究(5.1-1)式的 Hopfield 意义下的稳定性,改写(5.1-1)式为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i}{C_iR_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}V_j + \frac{I_i}{C_i} \stackrel{\text{def}}{=} f_i(\boldsymbol{u}) \quad i = 1,\cdots,n \qquad (5.1\text{-}9)$$

定理 5.1.4 如果存在对称正定矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$,使得矩阵

$$\overline{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (PJ + J^TP)$$

是负定的,则(5.1-9)式是 Hopfield 意义下稳定的,即(5.1-9)式的平衡点集是吸引的。

证:作 Ляпунов 函数

$$W(u) = f^T(\boldsymbol{u})Pf(\boldsymbol{u})$$

其中 $f=\mathrm{col}(f_1(\boldsymbol{u}),f_2(\boldsymbol{u}),\cdots,f_n(\boldsymbol{u}))$

显然 $W(u)\geqslant 0$, $W(u)=0$,当且仅当 $\boldsymbol{u}$ 为(5.1-9)式的平衡点,沿着(5.1-9)式的解对 $W(u)$ 求导数,便有

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}9)} = f^TP\dot{f} + \dot{f}^TPf = f^TPJf + (Jf)^TPf$$

$$= f^T(PJ + J^TP)f = f^T\overline{Q}f \leqslant 0$$

等号成立,当且仅当(5.1-9)的平衡位置。

故知平衡集是吸引的,亦即(5.1-9)式是 Hopfield 意义下稳定的。

推论 5.1.2 若矩阵 $\overline{Q}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (J+J^T)$是负定的,则(5.1-9)式是 Hopfield 意义下稳定的。

这里是定理 5.1.4 中 $P=E$ 的特殊情况。

例如下列条件是 $\overline{Q}_1$ 负定的充分条件

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{C_iR_i} + \dfrac{T_{ii}}{C_i}\dfrac{\partial V_i}{\partial u_i} < 0 \\ 2\left(\dfrac{1}{C_iR_i} - \dfrac{T_{ii}}{C_i}\dfrac{\partial V_i}{\partial u_i}\right) > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\left(\dfrac{T_{ij}}{C_i}\dfrac{\partial V_j}{\partial u_i} + \dfrac{T_{ji}}{C_j}\dfrac{\partial V_i}{\partial u_j}\right)\right| \end{cases} \qquad (5.1\text{-}10)$$

这个定理断定了(5.1-10)式的所有平衡位置都是吸引的,但

要求 $\overline{Q}$ 或 $\overline{Q}_1$ 处处负定，此条件似乎过于苛刻。如果已知(5.1-10)式的一个孤立平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$，要判定 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是否渐近稳定，只需判定 $\overline{Q}$ 或 $\overline{Q}_1$ 在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 的某邻域内负定，而且这个邻域就是 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 的吸收区域。

上面给出了 Hopfield 意义下的稳定性严格的明确的数学定义，以示与 Ляпунов 意义下的稳定性和渐近稳定的区别。并且给出了其明确的判据，下面将 Hopfield 能量函数法加以改进，使之也能用来判定 Ляпунов 意义下的稳定性。

仍考虑(5.1-1)式，设 $T_{ij}=T_{ji} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$

$g_i(0)=0 \qquad g_i(u_i)u_i>0$ 当 $u_i\neq 0 \qquad i=1,2,\cdots,n$

$g_i(u_i)$及 $G(V_i)$都是连续可微单调上升函数。因此(5.1-1)也可以改写为等价形式

$$G_i(V_i)C_i\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_j-\frac{G_i(V_i)}{R_i}+I_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5.1-11}$$

设用 Hopfield 的演化方法找到了(5.1-1)式的一个孤立的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$，亦即(5.1-11)的一个孤立的平衡位置 $V=V^*$。如果用 Hopfield 原来的方法尚不知道 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ $(V=V^*)$是否渐近稳定，是否稳定。

故需要进一步研究。下面采用与 Hopfield 引进的计算能量函数略为不同的 Ляпунов 函数[94]。

$$\text{令}E^*(V)\overset{def}{=}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_iV_j+\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i^*}^{V_i}\frac{G_i(V_i)}{R_i}\mathrm{d}V_i-\sum_{i=1}^{n}I_i(V_i-V_i^*)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_i^*V_j^* \tag{5.1-12}$$

定理5.1.5[94] 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是(5.1-1)式的孤立的平衡位置。即 $V^*=g(\boldsymbol{u}^*)=\mathrm{col}[g_1(\boldsymbol{u}_1^*),\cdots g_n(\boldsymbol{u}_n^*)]$是(5.1-11)式的孤立的平衡位置，如果矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 E^*}{\partial V^2}\right)_{V=V^*} = \left(\frac{\partial^2 E^*}{\partial V_i \partial V_j}\right)_{n\times n}\bigg|_{V=V^*}$$

是正定的，则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的，亦即(5.1-11)式的平衡位置 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 是渐近稳定的。

证：显然 $E^*(\boldsymbol{V}^*)=0$

$$\frac{\partial E^*(\boldsymbol{V})}{\partial V_i}\bigg|_{V=V^*} = -\sum_{j=1}^{n} T_{ij}V_j^* + \frac{1}{R_i}G_i(V_i^*) - I_i = 0 \qquad i=1,\cdots,n$$

$$\frac{\partial^2 E^*(\boldsymbol{V})}{\partial V_i^2}\bigg|_{V=V^*} = -T_{ii} + \frac{1}{R_i}(g_i^{-1})'(V_i^*) \qquad i=1,\cdots,n$$

$$\frac{\partial^2 E^*(\boldsymbol{V})}{\partial V_i \partial V_j}\bigg|_{V=V^*} = \frac{\partial^2 E^*}{\partial V_j \partial V_i}\bigg|_{V=V^*} = -T_{ij} = -T_{ji} \qquad i\neq j, i=1,\cdots,n$$

因为 $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right)\bigg|_{V=V^*}$ 正定，由多元函数在 $V=V^*$ 达到极小值的判别定理可知，既然 $E^*(V)$ 在 $V=V^*$ 的充分小的邻域内是正定的，因此 $E^*(V)$ 在 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 的邻域内是一个合适的 Ляпунов 函数。

今沿(5.1-11)式对 $E^*(V)$ 求导数，由于 $C_i>0$，$(g_i^{-1})(V_i)>0$，有

$$\frac{\mathrm{d}E^*(\boldsymbol{V})}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(5.1\text{-}11)} = \sum_{i=1}^{n}[-\sum_{j=1}^{n} T_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\dot{G}_i(V_i)[\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}]^2\begin{cases}\leqslant 0 & (V\neq 0^*)\\ =0 & (V=0^*)\end{cases} \tag{5.1-13}$$

故(5.1-11)在 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 的某邻域内负定。

由 Ляпунов 关于渐近稳定的基本定理，可知平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$(或 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$)是渐近稳定的。

定理 5.1.4 中的条件还依赖于具体的平衡位置的已知，如果平衡位置不知道，条件不好验证，下面的推论避免了具体平衡位置的信息，验证是方便的。

推论 5.1.3 如果$(G_iV_i)'\geqslant 0$,且$(T_{ij})_{n\times n}$对称负定,则系统(5.1-11)的任何平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$(亦即系统(5.1-6)的平衡位置 $V=V^*$)是渐近稳定的。

证:设 $V=V^*$ 是(5.1-11)式的平衡位置,因为$\frac{1}{R_i}\dot{G}_i(V_i)\geqslant 0$,故

$$\frac{1}{R_i}\dot{G}_i(V_i^*)\geqslant 0$$

于是

$$\mathrm{diag}\left[\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(V_1^*),\cdots,\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(V_n^*)\right]$$

半正定,从而二次型

$$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V_i\partial V_j}\right)_{n\times n}\Bigg|_{V=V^*}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)=\begin{pmatrix}V_1-V_1^*\\V_2-V_2^*\\\vdots\\V_n-V_n^*\end{pmatrix}^T$$

$$\times\begin{pmatrix}-T_{11}+\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(V_1^*) & -T_{12} & \cdots & -T_{1n}\\ -T_{21} & -T_{22}+\frac{1}{R_2}\dot{G}_2(V_2^*) & & \vdots\\ -T_{n1} & \cdots & & -T_{nn}+\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(V_n^*)\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}V_1-V_1^*\\\vdots\\V_n-V_n^*\end{pmatrix}$$

$$=-(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T(T_{ij})_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$$

$$+(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\mathrm{diag}\left[\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(\boldsymbol{V}_1^*),\cdots,\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(\boldsymbol{V}_n^*)\right](\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$$

$$\geqslant-(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T(T_{ij})_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$$

$$>0\qquad \boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{V}^* \tag{5.1-14}$$

故定理 5.1.5 条件满足,即 $\left(\frac{\partial^2 E^*}{\partial V_i\partial V_j}\right)_{n\times n}$ 正定,从而推论 5.1.3

结论成立。

推论 5.1.4 若 $\dot{g}_i(\boldsymbol{u}_i)>0(\ i=1,\cdots,n)$，矩阵$(T_{ij})_{n\times n}$对称半负定，则(5.1-11)式的任何平衡位置 $V=V^*$ 是渐近稳定的。

证：由(5.1-14)式，有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V_i \partial V_j}\right)(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*) &= -(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T(T_{ij})_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*) \\
&+(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\operatorname{diag}\left[\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(\boldsymbol{u}_1),\cdots,\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(\boldsymbol{u}_n)\right](\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*) \\
&\geqslant(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\operatorname{diag}\left[\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(V_1^*),\cdots,-\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(\boldsymbol{V}_n^*)\right](\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*) \\
&>0 \qquad \boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{V}^*
\end{aligned}
\tag{5.1-15}
$$

故定理 5.1.1 的条件满足，结论成立。

定理 5.1.6[94] 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$是(5.1-1)式平衡位置，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$是(5.1-11)式的平衡位置，如果矩阵$\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial V_i \partial V_j}\right)_{n\times n}\Bigg|_{V=V^*}$是负定的，则系统(5.1-1)的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$（亦即(5.1-12)式的平衡位置 $V=V^*$）是完全不稳定的。

证：利用定理 5.1.5 中关于$\dfrac{\partial E^*(\boldsymbol{V}^*)}{\partial V_i}$，$\dfrac{\partial^2 E^*(\boldsymbol{V}^*)}{\partial V_i \partial V_j}$的计算，可知$\left(\dfrac{\partial^2 E^*}{\partial V_i \partial V_j}\right)_{n\times n}\Bigg|_{V=V^*}$负定蕴涵着 $E^*(\boldsymbol{V})$在 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$处达到局部极大，故 $E^*(\boldsymbol{V})$在 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 的一个充分小的邻域内负定。$\dfrac{\mathrm{d}E^*}{\mathrm{d}t}$在$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$的邻域内负定，由 Ляпунов 关于不稳定性的定理可知 $V=V^*$是完全不稳定的。

定理 5.1.7 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$是(5.1-1)式的平衡位置[$V=V^*$是(5.1-11)式的平衡位置]，如果

$$
(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\frac{\partial^2 E^*(\boldsymbol{V}^*)}{\partial V_i \partial V_j}\Bigg|_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)
$$

是一个变号函数，则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$（亦即(5.1-11)式的平衡位置 $V=V^*$）是条件稳定的。

证:因为$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\frac{\partial^2 E^*(V^*)}{\partial V_i\partial V_j}\bigg|_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$是一个变号函数,故在 $V=V^*$ 的邻域内存在分别使得

$$(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T\frac{\partial^2 E^*(\boldsymbol{V}^*)}{\partial V_i\partial V_j}\bigg|_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$$

负定和正定的区域 G_n、G_p,从而由 G_n 内的初始值 $\boldsymbol{V}_0$ 出发的(5.1-11)式的解 $V(t,t_0,V_0)$远离 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$。从 G_p 内的初始值 $\boldsymbol{V}_0$ 出发的(5.1-11)式的解 $V(t,t_0,\boldsymbol{V}_0)$趋于 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$,故 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 是鞍点型平衡点,$V=V^*$是 $E^*(V^*)$的逗留点。定理 5.1.7 证毕。

§2 全局渐近稳定性[95]

仍考虑(5.1-1)式,且设 $\dot{G}_i(\boldsymbol{u}_i)>0$,本节取消 $\dot{g}_i(\boldsymbol{u}_i)$为有界的假设[95],直到目前,常见的文献都是假设 $\dot{g}_i(\boldsymbol{u}_i)$为有界。如文献[99]及所引的参考文献都是假设 $g'_i(\boldsymbol{u}_i)$有界,故不能与文献[95]允许 $g'_i(\boldsymbol{u}_i)$无界的条件进行强弱不同的比较,特别地,在 $g'_i(\boldsymbol{u}_i)$有界的假设下,文献[95]的全局稳定的条件自然满足。

现在取消 $T_{ij}=T_{ji}$的假设,即允许 $T(T_{ij})_{n\times n}$是非对称的。且设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$是(5.1-1)式的已知的平衡位置,现在研究 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$的稳定性的一般方法。

定理 5.2.1 若存在正定矩阵 $P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots,p_n)>0$,使得 $T^TP+PT\leqslant 0$(即半负定),则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$是全局渐近稳定的。

这里 T^T为矩阵 T 的转置矩阵。

证:改写(5.1-1)式为等价形式

$$C_i\frac{\mathrm{d}(u_i-u_i^*)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^n T_{ij}(g_j(u_i)-g_j(u_i^*))-\frac{u_i-u_i^*}{R_i} \tag{5.2-1}$$

因为存在正定矩阵

$$P=\mathrm{diag}(p_1,\cdots p_n)>0$$

使得

$$PT + T^TP \leqslant 0$$

构造 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} p_i C_i \int_{u_i^*}^{u_i} (g_i(u_i) - g_i(u_i^*)) \mathrm{d}u_i \quad (5.2\text{-}2)$$

显然

$$W(\boldsymbol{u}^*) = 0 \qquad W(\boldsymbol{u}) > 0 \qquad 当\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^*$$

故 $W(\boldsymbol{u})$是一个正定的 Ляпунов 函数,由于 $g_i(u_i)$的单调性,显然

$$\lim_{|\boldsymbol{u}| \to \infty} W(\boldsymbol{u}) = \infty$$

故 $W(\boldsymbol{u})$是径向无界的。

沿(5.2-1)式的解计算 $W(\boldsymbol{u})$的导数,便有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.2\text{-}1)} &= (g(\boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{u}^*))^T(PT + T^TP)(g(\boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{u}^*)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{u_i - u_i^*}{R_i}\right)(g_i(u_i) - g_i(u_i^*)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} -\frac{p_i}{R_i}(g_i(u_i) - g_i(u_i^*))(u_i - u_i^*) \\ &< 0 \qquad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^* \end{aligned} \quad (5.2\text{-}3)$$

故(5.2-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的。

推论 5.2.1 如果下列条件之一满足:

1) $T = T^T \leqslant 0$;

2) $T + T^T \leqslant 0$;

3) T 是反对称的。

则(5.2-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的。

证:在定理 5.2.1 的证明中,取 $P = E$,E 为 $n \times n$ 单位矩阵,即可完成证明。略。

定理 5.2.2 若 $T_{ii} < 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$且

$((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)$是一个 Hurwitz 矩阵,则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的。

这里 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,n$

证:因为$((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)$是一个 Hurwitz 矩阵,等价于 $-((-1)^{\delta_{ij}}|T_{ij}|)_{n\times n}$,是一个 M 矩阵。根据 M 矩阵性质,存在常数 $\xi_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\xi_j T_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|<0\qquad j=1,2,\cdots,n$$

构造径向无界的正定 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{n}\xi_i C_i|u_i-u_i^*|\tag{5.2-4}$$

沿(5.2-1)式的解计算 $W(\boldsymbol{u})$的 Dini 右上导数。

$$\begin{aligned}D^+W(\boldsymbol{u})&=\sum_{i=1}^{n}\xi_i C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{sgn}(u_i-u_i^*)\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}[\xi_j T_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|][g_i(u_i)-g_i(u_i^*)]\\&\quad-\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{R_i}|u_i-u_i^*|<0\qquad 当\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{u}^*\end{aligned}$$

这就意味着(5.1-1)式的 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的。

定理 5.2.3 若下列条件之一满足:

1) 存在常数 $\xi_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\xi_j T_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\xi_i|T_{ij}|\leqslant 0$$

2) $T_{ii}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|T_{ij}|\leqslant 0$,且 $g_i=g_j,\ i,j=1,\cdots,n$

则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是全局渐近稳定的。

证:如果条件 1)成立,选取 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{n}\xi_i C_i|u_i-u_i^*|$$

显然它是正定径向无界的,沿(5.2-1)式的解求 Dini 导数,便有

$$D^+W(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i C_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\operatorname{sgn}(u_i - u_i^*)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} [\xi_j T_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \xi_i |T_{ij}|] |g_j(u_j) - g_j(u_j^*)|$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{R_j} |u_j - u_j^*|$$

$$\leqslant - \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{R_j} |u_j - u_j^*| < 0 \qquad 当 \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^*$$

如果条件 2)成立,则可以构造另一个正定的径向无界的 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u}) \overset{\text{def}}{=} |u_l - u_l^*| \overset{\text{def}}{=} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i - u_i^*|$$

则成立

$$D^+W(\boldsymbol{u})\Big|_{(5.2-1)} \leqslant \frac{1}{C_l}[T_{ll} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} |T_{lj}|][g_l(u_l) - g_l(u_l^*)]$$

$$- \frac{1}{C_l R_l} |u_l - u_l^*|$$

$$\leqslant - \frac{1}{C_l R_l} |u_l - u_l^*| < 0 \qquad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^*$$

故定理 5.2.3 成立。

§3 一次近似方法的应用

如果已知一个平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$,研究 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 的局部渐近稳定或不稳定,最常用的方法是一次近似理论。下面予以介绍。

令

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{T_{ii}}{C_i} \dfrac{\partial g_i(u_i)}{\partial u_i}\Big|_{u_i = u_i^*} - \dfrac{1}{C_i R_i} & i = j = 1,\cdots,n \\[2ex] \dfrac{1}{C_i} T_{ij} \dfrac{\partial g_j(\boldsymbol{u}_j)}{\partial \boldsymbol{u}_j}\Big|_{\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j^*} & i \neq j \qquad i,j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

则(5.1-1)式的一次近似系统为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = B(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*) \qquad B = (B_{ij}) \tag{5.3-1}$$

由一次近似理论可知,如果 B 是一个 Hurwitz 矩阵,即 B 的全部特征值具有负实部,则(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的,(5.3-1)式的平衡位置也是渐近稳定的。如果 B 至少有一个特征值具有正实部,则(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是不稳定的。

当 $n \geqslant 1$,计算 B 的特征值是困难的,因此, 给出一些验证方便的充分条件。

定理 5.3.1[95] 若矩阵$((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$是一个 Hurwitz 矩阵,则1) $b_{ii}<0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,蕴涵着(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 渐近稳定的;2)至少有一个 $b_{i_0 i_0}>0$,蕴涵着(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是不稳定的。

证:因为$((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)$是一个 Hurwitz 矩阵等价于存在常数 $\zeta_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\zeta_j b_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \zeta_i |b_{ij}| < 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

对于(5.3-1)式构造 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i |u_i - u_i^*| \tag{5.3-2}$$

$$D^+ W(\boldsymbol{u})\Big|_{(5.3\text{-}1)} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{sgn} |u_i - u_i^*|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} [\zeta_j b_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \zeta_i |b_{ij}|] |u_j - u_j^*| < 0 \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}$$

故(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的,从而(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的。

若$((-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|)_{n\times n}$是一个 Hurwitz 矩阵,且至少有一个 $b_{i_0 i_0}>0$,为不失一般性,设

$$b_{ii} < 0(i = 1,2,\cdots,m), b_{ii} > 0(i = m+1,\cdots,n),\ 1 \leqslant m \leqslant n$$

因此,存在常数 $\zeta_i>0$,使得

$$\zeta_j b_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \zeta_i \mid b_{ij} \mid < 0 \qquad j = 1,\cdots,m$$

$$-\zeta_j b_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \zeta_i \mid b_{ij} \mid < 0 \qquad j = m+1,\cdots,n$$

构造如下变号的 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \mid u_i - u_i^* \mid - \sum_{i=m+1}^{n} \zeta_i \mid u_i - u_i^* \mid$$

则有

$$D^+ W(\boldsymbol{u})\Big|_{(5.3\text{-}1)} = \sum_{j=1}^{m} [\zeta_j b_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \zeta_i \mid b_{ij} \mid] \mid u_j - u_j^* \mid$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} [\zeta_i b_{jj} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \mid b_{ij} \mid] \mid u_j - u_j^* \mid$$

$$< 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^*$$

故(5.3-1)式的平衡位置是不稳定的,根据一次近似理论可知,(5.3-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 也是不稳定的。

若取 $\xi_i \equiv 1(i=1,\cdots,n)$,读者易得出有用的推论。略。

§4 全局指数稳定性

目前,常见到的文献,都是在 $g_i(u_i)$ 的增益有限,即 $M=\sup g'_i(u_i)<+\infty$的假设下研究稳定性、全局稳定性、指数稳定性。这是一种本质上受线性控制的弱非线性,因而往往局部渐近稳定蕴涵全局渐近稳定,全局渐近稳定蕴涵全局指数稳定。本节先取消 $g_i(u_i)$的增益为有限的假设,给出(5.1-1)式平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$全局指数稳定性的两个定理。然后给出(5.1-1)式的增益为有限时的两个全局指数稳定性定理。

记 $\boldsymbol{u}=\mathrm{col}=(u_1,\cdots,u_n)$,而 $\boldsymbol{u}^*=\mathrm{col}(u_1^*,\cdots,u_n^*)$为(5.1-1)式的平衡位置。

定理 5.4.1 若存在两组常数 $\zeta_i>0, \eta_i>0 \quad (i=1,\cdots n)$,使得下列矩阵 A 负定,则有结论:

1) (5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 全局指数稳定;

2) (5.1-1)式有限平衡位置唯一;

3) $\varepsilon=\dfrac{\lambda}{\mu}$ 可作为 Ляпунов 指数。

其中 $A=\begin{bmatrix}A_{11}A_{12}\\A_{12}^TA_{22}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}$ $A_{11}=\mathrm{diag}(-\dfrac{\zeta_1}{R_1},\cdots,-\dfrac{\zeta_n}{R_n})$

$$A_{12}=\mathrm{diag}(-\frac{\eta_1}{2R_1},\cdots,-\frac{\eta_n}{2R_n})_{n\times n}+\left(\frac{\zeta_iT_{ij}+\zeta_jT_{ji}}{2}\right)_{n\times n}$$

$$A_{22}=\left(\frac{\eta_iT_{ij}+\eta_jT_{ji}}{2}\right)_{n\times n} \qquad \text{令} \qquad B=\begin{bmatrix}B_{11}B_{12}\\B_{12}^TB_{22}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$B_{11}=\mathrm{diag}(\frac{C_1\zeta_1}{2},\cdots,\frac{C_n\eta_n}{2})_{n\times n}$$

$$B_{12}=B_{12}^T=\mathrm{diag}(\frac{\eta_1C_1}{2},\cdots,\frac{\eta_nC_n}{2})_{n\times n}B_{22}=O_{n\times n}$$

$-\lambda$ 为 A 的最大特征值,μ 为 B 的最大特征值。

A_{12}^T 为 A_{12} 的转置,B_{12}^T 为 B_{12} 的转置。

证:1)令 $\boldsymbol{x}\overset{\text{def}}{=}\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{col}(u_1-u_1^*,\cdots,u_n-u_n^*)$

$f_i(x_i)\overset{\text{def}}{=}g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_i^*)$ 则可以改写(5.1-1)式为

$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(x_j)-\frac{x_i}{R_i} \qquad (i=1,\cdots n) \quad (5.4\text{-}1)$$

则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 与(5.4-2)式的解 $\boldsymbol{x}=0$ 的全局稳定性等价。

对(5.1-1)式构造径向无界的正定 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i\zeta_i}{2}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_iC_i\int_0^{x_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i \quad (5.4\text{-}2)$$

显然 $W(0)=0, W(\boldsymbol{x})>0$,当 $x\neq 0$,且

$$W(x)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i\zeta_i}{2}x_i^2\to\infty \qquad \text{当 } x\to\infty$$

沿(5.1-1)的解对(5.4-2)式的 $W(x)$ 求导,便有

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1-1)}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\zeta_i}{R_i}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\zeta_i x_i\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i x_i}{R_i}f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_i f(x_i)f_j(x_j)$$

$$=-(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

令 $W^*=\mathrm{e}^{\varepsilon t}W,\varepsilon>0$ 是充分小的正数。因为

$$B_{11}=\mathrm{diag}(\frac{C_1\zeta_1}{2},\cdots,\frac{C_n\eta_n}{2})_{n\times n}$$

$$B_{12}=B_{12}^T=\mathrm{diag}(\frac{\eta_1 C_1}{2},\cdots,\frac{\eta_n C_n}{2})_{n\times n}$$

$$B_{22}=O_{n\times n}$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1-1)}=\varepsilon e^{\varepsilon t}W+e^{\varepsilon t}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\Big|_{(5.4-1)}$$

$$=\mathrm{e}^{\varepsilon t}\left[\varepsilon W+(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\varepsilon t}\left[\varepsilon(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i\zeta_i}{2}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_i C_i\int_0^{x_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i)\right.$$

$$\left.+(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\right]$$

$$\leqslant\mathrm{e}^{\varepsilon t}\left[\varepsilon(\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i\zeta_i}{2}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_i C_i x_i f_i(x_i))\right.$$

$$\left.+(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^T & A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\varepsilon t}(\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix}A_{11} & B_{11}\varepsilon & A_{12} & +B_{12}\varepsilon\\ A_{12}^T & B_{12}^T\varepsilon & A_{22} & +B_{22}\varepsilon\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\tag{5.4-3}$$

因矩阵特征值是矩阵元素的连续函数，故 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}$ 负定蕴涵当 ε 适当小时，$\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11}\varepsilon & A_{12}+B_{12}\varepsilon \\ A_{12}^T+B_{12}^T\varepsilon & A_{22}+B_{22}\varepsilon \end{bmatrix}$ 负定，故当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}1)} \leqslant 0$$

对(5.4-3)式从 0 到任意的 t 进行积分，便有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}W(x(t)) = W^*(x(t)) \leqslant W^*(x(0)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_0^* < \infty$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i\zeta_i}{2} x_i^2 \leqslant W(x(t)) \leqslant \mathrm{e}^{-\varepsilon t} W_0^* \qquad (5.4\text{-}4)$$

进而有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \frac{W_0^*}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{C_i\zeta_i}{2}} \mathrm{e}^{-\varepsilon t} \qquad (\varepsilon > 0) \qquad (5.4\text{-}5)$$

(5.4-5)式说明(5.1-1)式的 $\boldsymbol{x}=0$ 全局指数稳定，从而(5.1-1)式的 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 全局指数稳定，ε 可定义为 Ляпунов 指数。

2)现设 $\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}}$ 也为(5.1-1)的平衡位置，用上面类似的方法可证 $\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}}$ 也为全局指数稳定，由全局渐近稳定的平衡位置的唯一性可知 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}^*$，故(5.1-1)式的有限平衡位置唯一。附带说明了(5.1-1)式不存在周期解及振荡性。

3)设 $-\lambda$、μ 分别为 A、B 的最大特征值，沿用(5.4-3)式的推导，便有

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.1\text{-}1)} \leqslant\ & \mathrm{e}^{\varepsilon t}\left[(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\right] \\
& + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\Big[\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i\xi_i}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i C_i x_i f_i(x_i)\Big)\Big] \\
& \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon t}\Big[-\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_i)\Big] + \mathrm{e}^{\varepsilon t} \\
& \left[\varepsilon(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}))\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$\leqslant e^{\varepsilon t}[-\lambda+\varepsilon\mu]\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_i)\right)\leqslant 0$$

故(5.4-3)式成立,从而 $\varepsilon=\frac{\lambda}{\mu}$为 Ляпунов 指数估计。定理 5.4.1 证毕。

令 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11},\widetilde{A}_{12}\\ \widetilde{A}_{11}^T,\widetilde{A}_{12}\end{pmatrix}$ 其中 $\widetilde{A}_{11}=-\mathrm{diag}\left(\frac{1}{R_1},\cdots,\frac{1}{R_n}\right)$

$$\widetilde{A}_{12}=-\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2R_1},\cdots,\frac{1}{2R_n}\right)_{n\times n}+\left(\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}\right)_{n\times n}$$

$$\widetilde{A}_{22}=\left(\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}\right)_{n\times n}\qquad \widetilde{B}=\begin{pmatrix}\widetilde{B}_{11},\widetilde{B}_{12}\\ \widetilde{B}_{12}^T,\widetilde{B}_{22}\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

其中 $\widetilde{B}_{11}=\left(\frac{C_1}{2},\cdots,\frac{C_n}{2}\right)_{n\times n}$

$$\widetilde{B}=\widetilde{B}_{12}^T=\mathrm{diag}\left(\frac{C_1}{2},\cdots,\frac{C_n}{2}\right)_{n\times n}\qquad \widetilde{B}_{22}=O_{n\times n}$$

推论 5.4.1 若 $\widetilde{A}$ 负定,则(5.1-1)式平衡位置唯一且全局指数稳定,且$\tilde{\varepsilon}=\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}$可作为 Ляпунов 指数,其中 $-\tilde{\lambda}$、$\tilde{\mu}$分别为 $\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$ 的最大特征值。

证:在定理 5.4.1 中取 $\xi_i=\eta_i=1,(i=1,\cdots,n)$便可得到推论 5.4.1 的结论。

定理 5.4.2 若存在两组正数 $\varepsilon_i>0,\eta_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,使下列矩阵 G 负定,则定理 5.4.1 结论成立。且(5.4-5)式估计式成立,其中 ε 满足

$$\varepsilon=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{\frac{\eta_i}{R_i}-\xi_iT_{ii}}{\eta_iC_i},\frac{\lambda^*}{\mu_*}\right]$$

$-\lambda^*$为 G 的最大特征值,$\mu_*=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{C_i\xi_i}{2}$

其中 $G=\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{12}^T & G_{22}\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$ $\qquad G_{11}=-\mathrm{diag}\left(\frac{\xi_1}{R_1},\cdots,\frac{\xi_n}{R_n}\right)$

$$G_{12}=G_{12}^T=\left((1-\delta_{ij})\frac{\xi_i T_{ij}+\xi_j T_{ji}}{2}\right)_{n\times n}$$

$$G_{22}=\left(\frac{\eta_i T_{ij}+\eta_j T_{ji}}{2}\right)_{n\times n}$$

证:由 G 的负定性可推知 $T_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$,仍沿用 Ляпунов 函数(5.4-2)式,类似于(5.4-3)式的推导便有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=(x^T,f^T(x))\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{12}^T & G_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\xi_i T_{ii}x_i f_i(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i}{R_i}x_i f_i(x_i) \qquad (5.4\text{-}6)$$

令 $W^*=\mathrm{e}^{\varepsilon t}W$,沿用(5.4-3)式的推导,有

$$\frac{\mathrm{d}W^*}{\mathrm{d}t}\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon t}\Big[(x^T,f^T(x))\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{12}^T & G_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i C_i}{2}x_i^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon\eta_i C_i+\xi_i T_{ii}-\frac{\eta_i}{R_i})x_i f_i(x_i)\Big]$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon t}[-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_i))+\mu_x\varepsilon\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon\eta_i C_i+\xi_i T_{ii}-\frac{\eta_i}{R_i})x_i f_i(x_i)]\leqslant 0 \qquad (5.4\text{-}7)$$

余下可仿定理 5.4.1 完成最后的证明,略。

注 当 $T_{ij}\equiv 0$,此时亦可视为 $g_j(u_j)=0$,定理 5.4.1[定理 5.4.2]中的 $A(G)$ 负定便自然退化为 $A_{11}(G_{11})$ 负定,结论仍真,因此,此时(5.4-2)式为 $W(x)=\sum\limits_{j=1}\frac{C_i}{2}\xi_i x_i^2$,(5.4-4)式为$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=x^TA_{11}x=x^TG_{11}x$。

仍考虑(5.4-1)式,除前面对(5.4-1)式的一些基本假设外,还设增益参数有限,即 $M_i=\sup g_i'(u)<+\infty$

令 $\Omega_1=\mathrm{diag}(\frac{1}{R_1}-T_{11}M_1,\cdots,\frac{1}{R_n}-T_{nn}M_n)_{n\times n}-(\sigma_{ij}|T_{ij}|M_j)_{n\times n}$

$$\Omega_2=\mathrm{diag}(\frac{-1}{R_1M_1},\cdots,\frac{-1}{R_nM_n})+(T_{ij})_{n\times n}$$

其中　$\sigma_{ij}=1-\delta_{ij}$，而 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

定理 5.4.3　若 Ω_1 为 M 矩阵，则(5.4-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 唯一且全局指数稳定。

证：因为 Ω_1 为 M 矩阵，故存在一组常数 $\xi_i>0$，使得

$$\xi_j\left(\frac{-1}{R_j}+T_{jj}M_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid M_j<0 \quad j=1,\cdots,n \qquad (5.4\text{-}8)$$

为不失一般性，不妨设

$$\xi_iT_{jj}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid\leqslant 0 \qquad j=1,\cdots,n_0 \qquad 1\leqslant n_0\leqslant n$$

$$\xi_iT_{jj}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid>0 \qquad j=n_0+1,\cdots,n$$

令　$$\lambda=\min_{\substack{1\leqslant k\leqslant n_0\\ n_0+1\in j\leqslant n}}\left[\frac{1}{R_kC_k},\left(\frac{\xi_j}{R_j}-\xi_jT_{jj}M_j-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\xi_i\mid T_{ii}\mid M_j\right)/\xi_jC_j\right]$$

作径向无界的正定 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\xi_iC_i\mid x_i\mid$$

沿(5.4-1)式之解对 $W(\boldsymbol{x})$ 求 Dini 右上导数便有

$$\begin{aligned}
D^+W(\boldsymbol{x})\mid_{(5.4\text{-}1)}&=\sum_{i=1}^{n}\xi_iC_i\dot{x}_i\operatorname{sgn}x_i\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big[-\frac{1}{R_i}\mid x_i\mid+T_{ii}\mid f_i(x_i)\mid\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid\mid f_j(x_j)\mid\Big]\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{n_0}\xi_j\left(\frac{-1}{R_j}\right)\mid x_j\mid+\sum_{j=1}^{n_0}\Big(\xi_jT_{jj}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid\Big)\mid f_j(x_j)\mid+\sum_{j=n_0+1}^{n}\left(\frac{-\xi_j}{R_j}\right)\mid x_j\mid\\
&\quad+\sum_{j=n_0+1}^{n}\Big(\xi_jT_{jj}+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}\mid T_{ij}\mid\Big)M_j\mid x_j\mid\\
&\leqslant\sum_{j=1}^{n_0}\left(\frac{-\xi_j}{R_j}\right)\mid x_j\mid+\sum_{j=n_0+1}^{n}\Big[\frac{-\xi_j}{R_j}
\end{aligned}$$

$$+ (\xi_j T_{jj} M_j + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} \xi_i | T_{ij} | M_j)] | x_j |$$

$$\leqslant - \lambda W(x) \tag{5.4-9}$$

故 $0 \leqslant W(x(t)) \leqslant W_1(x(0)) e^{-\lambda t}$

从而 $$| x_i(t) | \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_i C_i} W(x(0)) e^{-\lambda t} \tag{5.4-10}$$

(5.4-10)式意味着(5.1-1)式的平凡解是全局指数稳定的，λ 可作为 Ляпунов 指数。

设 $\boldsymbol{u} = \tilde{u}$ 也是(5.1-1)式的平衡位置，用上面类似方法可证 $\boldsymbol{u} = \tilde{u}$ 也全局稳定，从而 $\tilde{u} = \boldsymbol{u}^*$，定理 5.4.3 证毕。

注 假设 $R_i = M_i = 1, (i = 1, 2, \cdots, n)$，文献[99]所列举的(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 为全局渐近稳定的一些充分条件分别为

$$\| T \|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | T_{ij} | < 1$$

$$\mu_{\infty}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (T_{ii} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} | T_{ij} |) < 1$$

$$\mu_1(T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (T_{jj} + \sum_{i=1}^{n} | T_{ij} |) < 1$$

$$\| T \|_m = [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T_{ij}^2]^{1/2} < 1$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} [T_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} (| T_{ij} | + | T_{ji} |)] < 1$$

$$\| T \|_2 = \sup_x [| Tx |_2 / | x |_2] = [\lambda_{\max}(T^T T)^{1/2}] < 1$$

由 M 矩阵的性质可知，这些条件均是 Ω_1 为 M 矩阵的简单的充分条件，从而这些结果均是定理 5.4.1 的特例。

注 文献[99]的定理 4、定理 5 均是这里定理 5.4.3 的特例。

定理 5.4.4 若矩阵 Ω_2 是 Ляпунов－Votterra 稳定的，则(5.1-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是全局指数稳定的。

证:因为 Ω_2 是 Ляпунов - Votterra 稳定的,故存在正定矩阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)$,使得

$$Q=\frac{1}{2}(H\Omega_2+\Omega_2^T H) \qquad \text{负定。}$$

令 $\lambda\in(0,\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{R_iC_i})$ 是使矩阵

$Q+\lambda\,\mathrm{diag}(\frac{C_1h_1}{M_1},\cdots,\frac{C_nh_n}{M_n})$ 半负定的最大正数解。

造 Ляпунов 函数

$$W(x)=\sum_{i=1}^{n}C_ih_i\int_0^{x_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i \tag{5.4-11}$$

显然 $W(x)$正定,今证 $W(x)$径向无界。

令 $\underline{m}_i=\min\limits_{|x|\leqslant 1}|f_i'(x)|$, $\overline{m}_i=\min[f_i(1),|f_i(-1)|]$

$\forall x\in R^n$,不失一般性,不妨设

$|x_i|\leqslant 1 \quad i=1,2,\cdots,i_0 \qquad |x_i|>1 \quad i=i_0+1,\cdots,n$

利用 f 的单调性。

于是 $$W(x)=\sum_{i=1}^{n}C_ih_i\int_0^{x_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{\tau_0}C_ih_i\underline{m}_ix_i^2+\sum_{i=\tau_0+1}^{n}C_ih_i\overline{m}_i\,|x_i|\to\infty$$

当$|x|\to\infty$

故 $W(x)$是径向无界的。

沿(5.1-1)的解计算 $\mathrm{e}^{\lambda t}W$ 的导数,且利用 $f_i(x_i)$的单调性,有

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\lambda t}W}{\mathrm{d}t}=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{i=1}^{n}C_ih_i\int_0^{x_i}f_i(x_i)\mathrm{d}x_i+\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{i=1}^{n}C_ih_if_i(x_i)\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$
$$\leqslant\mathrm{e}^{\lambda t}[\lambda\sum_{i=1}^{n}C_ih_ix_if_i(x_i)-\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{R_i}x_if_i(x_i)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_if_i(x_i)T_{ij}f_j(x_j)]$$
$$=\mathrm{e}^{\lambda t}[-\sum_{i=1}^{n}(\frac{h_i}{R_i}-C_ih_i\lambda)x_if_i(x_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_iT_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)]$$

$$=e^{\lambda t}[-\sum_{i=1}^{n}(\frac{h_i}{R_iM_i}-\frac{hD_iC_i\lambda}{M_i})f_i^2(x_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_iT_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j)]$$

$$=e^{\lambda t}\{(f_1(x_1),\cdots f_n(x_n))[\frac{1}{2}(H\Omega_2+\Omega_2^TH)$$

$$+\lambda\,\mathrm{diag}(\frac{C_1h_1}{M_1},\cdots,\frac{C_nh_n}{M_n})](f_1(x_1),\cdots f_n(x_n))^T\}$$

$$=e^{\lambda t}\{(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))[Q+\lambda\,\mathrm{diag}(\frac{C_1h_1}{M_1},\cdots,\frac{C_nh_n}{M_n})]$$

$$\cdot(f_1(x_1),\cdots,f_n(x))^T\} \tag{5.4-12}$$

对(5.4-12)两边从 0 到 t 进行积分，便有：

$$W(\boldsymbol{x}(t))\leqslant e^{-\lambda t}W(\boldsymbol{x}(0))\overset{\text{def}}{=}e^{-\lambda t}W_0$$

亦即

$$\sum_{i=1}^{i_0}C_i\xi_i\,\underline{m}_ix_i^2+\sum_{i=i_0+1}^{n}C_i\xi_i\overline{m}_i\mid x_i\mid\leqslant W_0e^{-\lambda t} \tag{5.4-13}$$

从(5.4-13)式有

$$\mid x_i(t)\mid\leqslant\sqrt{\frac{1}{C_i\xi_i\,\underline{m}_i}}\sqrt{W_0}e^{-\frac{\lambda}{2}t}\qquad 1\leqslant i\leqslant i_0$$

$$\mid x_i(t)\mid\leqslant\frac{1}{C_i\xi_i\underline{m}_i}W_0e^{-\lambda t}\qquad i_0+1\leqslant i\leqslant n$$

令

$$K=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_0\\ i_0+1\leqslant j\leqslant n}}\left[\sqrt{\frac{1}{C_i\xi_i\,\underline{m}_i}},\sqrt{\frac{1}{C_j\xi_j\overline{m}_j}}\ \right]$$

故有 $|x_i(t)|\leqslant k<\max[W_0,\sqrt{W_0}]e^{\frac{-\lambda t}{2}}\qquad i=1,2,\cdots,n$

从而 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 全局指数稳定。

注 当在 $R_1=M_i=1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 条件下，前人给出 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 全局渐近稳定的条件为

$$\mu_2(T)=\lambda\max[(T+T^T)/2]<1$$

显然是定理 5.4.4 特例。

文献[99]定理 6 也是定理 5.4.4 的特例。

§5 吸收区域的估计[110]

最理想的渐近稳定性是全局指数渐近稳定性,这时,其稳定的平衡位置只能是一个,但一般人工神经网络有多个平衡位置,稳定的平衡位置也不只一个。因而不可能是全局渐近稳定的,因此局部渐近稳定点的吸引区域的大小估计在联想记忆和优化计算中就显得特别重要,本节介绍 Hopfield 神经网络的吸引区域的估计。

为方便读者,我们将(5.1-1)式分别重写在下面,且重新编号。

$$\begin{cases} C_i \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_i}{R_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} T_{ij}V_j + I_i \qquad i = 1,\cdots,n \\ V_i = g_i(u_i) \end{cases} \tag{5.5-1}$$

令 $G_i(V_i) = g_i^{-1}(V_i)$

$$G_i^1(V_i)C_i \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}V_j - \frac{G_i(V_i)}{R_i} + I_i \qquad i=1,\cdots,n \tag{5.5-2}$$

定义5.5.1 设 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 是(5.5-1)式的渐近稳定的孤立平衡位置。若存在 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 的一个邻域 $\mathscr{D} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{u} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^* \| < r)[\Omega \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{V} \| \boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^* \| < \sigma)]$,对于此邻域内的任意始值 $\boldsymbol{u}_0 \in \mathscr{D}[\forall \boldsymbol{V}_0 \in \Omega]$,(5.5-1)式[(5.5-2)式]的解 $\boldsymbol{u}(t,t_0,\boldsymbol{u}_0)[\boldsymbol{V}(t,t_0,\boldsymbol{V}_0)]$收敛于 $\boldsymbol{u}^*$,[收敛于 $\boldsymbol{V}^*$],即$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{u}(t,t_0,\boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{u}^*[\lim \boldsymbol{V}(t,t_0,x_0 = \boldsymbol{V}^*)]$,则称 $\mathscr{D}[\Omega]$为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*[\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^*]$的一个吸收区域。

如何寻找这个吸收区域,并且使之尽可能大,也是稳定性理论中一个有重要应用价值的研究课题。

定理 5.5.1 设下列条件满足:

1) $G_i(V_i)$的二阶导数有估计式: $|(G''_i(V_i))| \leqslant \alpha_i$, α_i 为非负常数。

2) λ 为矩阵 $H(k_{ij})_{n\times n}$的最小特征值,其中

$$k_{ij}=\begin{cases}-T_{ii}+\dfrac{1}{R_i}(G'_i(V_i^*)) & i=j=1,\cdots,n\\ -T_{ij} \quad i\neq j & i,j=1,\cdots,n\end{cases}$$

3) 矩阵$\left(\dfrac{\partial^2 E^*}{\partial \boldsymbol{V}^*}\right)_{V=\boldsymbol{V}^*}=\left(\dfrac{\partial^2 E^*}{\partial V_i \partial V_j}\right)\Bigg|_{V=V^*}$正定。其中 $\boldsymbol{V}^*$ 为(5.5-2)式的一个平衡位置。

$$E^*(V)\overset{\text{def}}{=}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_iV_j+\sum_{j=1}^{n}\int_{V_i^*}^{V_i}\frac{g_i^{-1}(V_i)}{R_i}\mathrm{d}V_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n}I_i(V_i-V_i^*)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}V_j^*V_j^* \qquad (5.5\text{-}3)$$

则(5.5-2)式的平衡位置 $V=V^*$ 渐近稳定,$\Omega\overset{\text{def}}{=}\Omega_1\cap\Omega_2$ 为(5.5-2)式的一个平衡位置 V^* 的吸收区域,其中 $\Omega_1\overset{\text{def}}{=}\{V\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|V_i-V_i^*|<\lambda\}$,$\Omega_2\overset{\text{def}}{=}\{V\|V-V^*\|<r\}$,式中 r 是(5.5-2)式与 V^* 最邻近的平衡点 V^e 与 V^* 的距离,若 V^* 是唯一的平衡位置,则 $r=\infty$,$\Omega_2=R^n$,$\Omega=\Omega_1$。

证:因为定理 5.1.5 的条件满足,故知 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 是局部渐近稳定的。下面仅证 Ω 为 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 的一个吸引区域。

将(5.1-12)式在 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 处进行 Toylor 展开,便有

$$E^*(\boldsymbol{V})=(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^TH(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)+\sum_{i=1}^{n}G''(\xi_i)(V_i-V_i^*)^3 \qquad (5.5\text{-}4)$$

其中 ξ_i 为介于 V_i^* 与 V_i 之间的一个数。

进而有估计式

$$E^*(\boldsymbol{V})\geqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}(V_i-V_i^*)^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|V_i-V_i^*|^3$$
$$\geqslant[\lambda-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i|V_i-V_i^*|]\sum_{i=1}^{n}|V_i-V_i^*|^2$$
$$>0 \qquad 当\ \boldsymbol{V}\neq\boldsymbol{V}^* \qquad (5.5\text{-}5)$$

故 $E^*(\boldsymbol{V})$在区域 Ω 内是正定的。又由定理条件可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}E^*(\boldsymbol{V})}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.5\text{-}2)} = -\sum_{i=1}^{n} C_i\dot{G}_i(V_i)\left[\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}\right]^2 \begin{cases} < 0 & \tilde{\boldsymbol{V}} \neq \tilde{\boldsymbol{V}}^* \\ = 0 & \tilde{\boldsymbol{V}} = \tilde{\boldsymbol{V}}^* \end{cases}$$

即$\left.\frac{\mathrm{d}E^*}{\mathrm{d}t}\right|_{(5.5\text{-}2)}$在 Ω 内是负定的。

从而 Ω 为一个吸引区域。

推论 5.5.1 若下列条件满足:

1) 定理 5.5.1 条件 1);

2) 矩阵 T 对称半负定;

3) $G_i(u_i)>0 \qquad i=1,\cdots,n$

$V_i^*(i=1,\cdots,n)$为(5.5-2)式的在开区域:$\Omega^* \overset{\text{def}}{=} \Omega_1^* \cap \Omega_2$内的唯一平衡位置。则 Ω^* 为 $V=V^*$ 的吸引区域。

证:由于 $T(T_{ij})_{n\times n}$ 对称负定,故 $-(T_{ij})_{n\times n}$ 对称正定。(5.5-4)式可以推出

$$\begin{aligned} E^*(\boldsymbol{V}) &= (\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T H(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V})^* \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}(\dot{G}_i(\xi_i))(V_i - V_i^*)^3 \\ &\geqslant -(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T(T_{ij})_{n\times n}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*) + (\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)^T \end{aligned}$$

$$\mathrm{diag}\left[\frac{1}{R_1}\dot{G}_1(V_1^*)\cdots\frac{1}{R_n}\dot{G}_n(V_n^*)(V_n^*)\right](\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}^*)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mid V_i - V_i^* \mid^3 \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{R_i}G'_i(V_i^*)\right) - \alpha_i \mid V_i - V_i^* \mid\right] \mid V_i - V_i^* \mid^2 \\ &> 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{V}^* \end{aligned} \tag{5.5-6}$$

其中 ξ_i 介于 V_i 与 V_i^* 之间的数,$i=1,2,\cdots,n$,故 $E^*(\tilde{V})\frac{\mathrm{d}E^*(\tilde{V})}{\mathrm{d}t}$ 分别在 Ω^* 正定、负定,从而 Ω^* 是 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^*$ 的一个吸引区域。

推论 5.5.2 假设:

1) 定理 5.5.1 条件 1)满足;

2) $(G'_i(V_i))\geqslant 0$, $T=(T_{ij})$为对称负定矩阵,μ 为

$-T(T_{ij})$的最小特征值。

3) $V_i^*(i=1,2,\cdots,n)$为(5.5-2)式的在开区域 $\hat{\Omega}=\hat{\Omega}_3\cap\hat{\Omega}_2$ 的平衡位置,则 $V=V^*$ 渐近稳定,$\hat{\Omega}$ 为吸引区域,$\hat{\Omega}_3\stackrel{\text{def}}{=}\{V|V:\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|h_i|V_i-V_i^*|<\mu\}$,$\Omega_2$ 如定理 5.5.1 的定义。

不难仿照定理 5.5.2 和推论 5.5.2 的证明完成推论 5.5.2 的证明,故略。

下面根据一次近似理论来研究吸收区域的估计问题。

设 $u=u^*$ 为(5.5-1)式的平衡位置,改写(5.5-1)式为

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(u_j-u_j^*)+\sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}g_i''(\xi_i)(u_j-u_j^*)^2 \quad (5.5\text{-}7)$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

其中 b_{ij}定义如下

$$b_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{1}{R_iC_i}+\dfrac{T_{ii}}{C_i}\quad\left.\dfrac{\partial g_i(u_i)}{\partial u_i}\right|_{u_i=u_i^*} & i=j=1,\cdots,n\\[2ex] \left.\dfrac{1}{C_i}T_{ij}\dfrac{\partial g_j(u_j)}{\partial u_j}\right|_{u_j=u_j^*} & i\neq j,i,j=1,\cdots,n\end{cases} \quad (5.5\text{-}8)$$

定理5.5.2 设矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$是一个 Hurwitz 矩阵,$g_i(u_i)$的二阶导数满足

$|g_i''(\xi_i)|\leqslant k_i$ k_i 非负常数,$i=1,2,\cdots,n$,D 为 Ляпунов 矩阵方程

$$DB+B^TD=-I_n$$

的正定矩阵解,则(5.5-1)式的平衡位置 $u=u^*$ 是渐近稳定的。$u=u^*$ 的吸收区域有估计式

$$D\stackrel{\text{def}}{=}\{u\mid\mu\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mid u_i-u_i^*\mid<1\}$$

其中 μ 为 $W_i=(|D|C^{-1}|T|K+K|T^T|C^{-1}|D|)$的最大特征值。

$$|D|\stackrel{\text{def}}{=}(|d_{ij}|)_{n\times n},\qquad |T|=(|T_{ij}|)_{n\times n},\qquad |T^T|=(|T_{ji}|_{n\times n})$$

$$K\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_n)\qquad C^{-1}\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{diag}(1/C_1,\cdots,1/C_n)$$

证：令 $G''(\xi)\overset{\text{def}}{=}\text{diag}(g_1''(\xi_1),\cdots,g_n''(\xi n))$

$(u-u^*)^2\overset{\text{def}}{=}\text{col}((u_i-u_i^*)^2,\cdots,(u_n-u_n^*)^2)$

由一次近似理论可知 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 是渐近稳定的，下面证 D 为吸收区域。

作 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^T D(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)$$

$W(\boldsymbol{u})$在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 的任何邻域内是正定的。

沿(5.5-1)式的解对 $W(\boldsymbol{u})$求导数便有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\Big|_{(5.5\text{-}1)} &= (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^T(DB+B^TD)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)\\ &\quad+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^T DC^{-1}TG''(\xi)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^2\\ &\quad+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^{2T}G''(\xi)T^TC^{-1}D(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)\\ &\leqslant -(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^T(I_n)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)\\ &\quad+|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*|(|D|C^{-1}|T|K+K|T^T|C^{-1}|D|)\\ &\quad\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i-u_i^*||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*|\\ &\leqslant -\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*)^2\\ &\quad+\mu\max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i-u_i^*|\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*)^2\\ &\quad=[\mu\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i-u_i^*|-1]\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*)^2<0\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{u}^*$ 　　且 $\boldsymbol{u}\in D$

故 D 为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 的吸收区域。

定理 5.5.3 假设 $b_{ii}<0$ 　$i=1,2,\cdots,n$，

$-[(-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|]$为一个 M 矩阵，$g_i(u_i)$的二阶导数满足：$|g''_i(\zeta_i)|\leqslant k_i, i=1,2,\cdots,n, \beta_i>0, i=1,2,\cdots,n$，为代数方程组

$$[(-1)^{\delta_{ij}}|b_{ij}|]^T\beta=\text{col}(-1,\cdots,-1)$$

的正数解，(5.5-1)式的平衡位置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 渐近稳定。

$$D_2\overset{\text{def}}{=}\left\{[\max_{1\leqslant j\leqslant n}|u_j-u_j^*|k_j\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{|T_{ij}|}{C_j}<1]\right.\text{为吸引区域。}$$

证:对(5.5-1)式作 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mid u_i - u_i^* \mid$$

沿(5.5-1)式的解求 $W(\boldsymbol{u})$的 Dini 右上导数有

$$\begin{aligned}
D^+ W(\boldsymbol{u}) \mid_{(5.5\text{-}1)} &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \operatorname{sgn}(u_i - u_i^*) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \beta_i [b_{ii} \mid u_i - u_i^* \mid + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mid b_{ij} \mid \mid u_j - u_j^* \mid \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mid T_{ij} \mid}{C_j} \mid g''_j(\zeta_j) \mid \mid u_j - u_j^* \mid^2] \\
&= \sum_{j=1}^{n} [\beta_j b_{jj} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \beta_i \mid b_{ij} \mid] \mid u_j - u_j^* \mid \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\mid T_{ij} \mid}{C_j} \mid g''_j(\zeta_i) \mid u_j - u_j^* \mid^2 \\
&\leqslant - \sum_{j=1}^{n} \mid u_j - u_j^* \mid + \sum_{j=1}^{n} \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mid u_j - u_j^* \mid k_j \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\mid T_{ij} \mid}{C_j} \mid u_j - u_j^* \mid \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} [\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mid u_j - u_j^* \mid k_j \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_i \mid T_{ij} \mid}{C_j} - 1] \\
&\quad \mid u_j - u_j^* \mid < 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^*
\end{aligned}$$

故 D_2 为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 的吸引区域。

例 1　考虑二维系统

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_1}{R_1} + T_{11} g_1(u_1) + T_{12} g_2(u_2) + I_1 \\[2ex] C_2 \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_2}{R_2} + T_{21} g_1(u_1) + T_{22} g_2(u_2) + I_2 \end{cases}$$

设 $C_1 = C_2 = 1, R_1 = R_2 = 1/25$,$g_i(u_i^*) = \dfrac{1}{2}, |g''_i(\xi)| \leqslant k_i = 1$

$$T_{21} = T_{12} = 2 \quad , \quad T_{11} = T_{22} = 1$$

于是由简单的计算有 $b_{11} = b_{22} = -2$，　$b_{12} = b_{21} = 1$

方程组$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$的解为 $\beta_1 = \beta_2 = 1$。故例 1 平衡位置 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ 的吸收区域为

$$D = \{\boldsymbol{u} \mid \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j - u_j^*| < 1/4\}$$

§6 细胞神经网络的定性分析[108,109,111]

1988 年,美国电子学家 L.O.Chua 等受 Hopfield 神经网络的直接影响和细胞自动机的启发,积他本人多年在非线性运放电路中的研究成果,首创性地提出了如下细胞神经网络

$$C\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j + I \quad i = 1,2,\cdots n \tag{5.6-1}$$

其中 $f_j(x_j) = \frac{1}{2}\left||x_j(t)+1| - |x_j(t)-1|\right| \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$

$C>0$、$R>0$ 分别表示电容、电阻,x_i 表示电压,I 表电流,u_j 表输入电压,$|u_i| \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n$。

L.O.Chua 等采用了如下的 Ляпунов 函数

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f_i(x_i)f_j(x_j) + \frac{1}{2}\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_i) - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}f_i(x_i)u_j - \sum_{j=1}^{n} If_j(x_i) \tag{5.6-2}$$

来分析(5.6-1)式的动力学渐近行为,文献[111]指出(5.6-2)用来分析(5.6-1)式是失效的,因为在 $\min_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \geqslant 1$ 上(5.6-2)式恒为常数,众所周知,常数的导数为零,常数不能作为 Ляпунов 函数。因此,有广泛应用价值,易于电子电路实现的细胞神经网络的理论,必须重新研究。文献[108,109]在允许 $a_{ij} \neq a_{ji}$的情况下详细地研究了这个问题,这里仅介绍其主要结果及简略证明,欲了解及细节的读者可参考文献[108,109]。

令 $$\theta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{当 } i = j \text{ 且 } a_{ij} \leqslant 0 \\ 1 & \text{当 } i = j \text{ 且 } a_{ii} > 0 \text{ 或 } i \neq j \end{cases}$$

定理5.6.1 细胞神经网络(5.6-1)式是一个耗散系统,从任意始值 $x_i(0)(i=1\cdots n)$出发的解,最终要进入紧集

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} R^n/\Omega_1 \cap R^n/\Omega_2$$

其中 $$\Omega_1 \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \left| \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i| - \frac{1}{2}R\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| + |I| \right) \right]^2 \right. \right.$$
$$\left. > \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{R}{2}\left(\sum_{j} |a_{ij}|\theta_{ij} + \sum_{j} |b_{ij}| + |I| \right) \right]^2 \right\}$$
$$\Omega_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \left| |x_i| > M_i = R\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| + |I|\right) \right. \right\}$$

证:1)作正定径向无界的 Ляпунов 函数

$$W_1(x) = \frac{1}{2C}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

利用$|f_j(x_j)| \leqslant 1$, $|u_j| \leqslant 1$, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1}{dt}\Big|_{(5.6\text{-}1)} &= \sum_{i=1}^{n}\Big(-\frac{1}{R}|x_i|^2 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i f_j(x_j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i u_j + Ix_i\Big) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{R}\Big[|x_i|^2 - R\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\theta_{ij}|x_i| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||x_i| + |I||x_i|\Big)\Big] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{R}\Big[|x_i|^2 - R\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\theta_{ij} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| + |I|\Big)\Big]^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4}R^2\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| + |I|\Big)^2 \\
&< 0 \quad 当\ x \in \Omega_1
\end{aligned}$$

故解最终要进入 R^n/Ω_1。

2) 再造关于部分变元 x_i 为径向无界的 Ляпунов 函数

$$W_2(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{C}|x_i| \qquad i = 1,2,\cdots n$$

$$D^+W_2(x)|_{(5.6\text{-}1)} \leqslant \left(-\frac{1}{r}|x_i| + \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| + |I|\right) < 0$$

当 $x \in \Omega_2$ $\qquad i = 1,2,\cdots n$

故解最终要进入 R^n/Ω_2，从而解最终要进入 $\Omega = R^n/\Omega_1 \cap R^n/\Omega_2$。

从而(5.6-1)式是一个耗散系统。

易证明定理 5.6.1 对解的界的估计比文献[105]要精细。

令 $|A| = (|a_{ij}|)_{n\times n}$

定理 5.6.2 若矩阵 $R|A|$ 的谱半径 $\rho(R|A|)<1$，则(5.6-1)式的平衡位置唯一，且全局稳定。

证：(5.6-1)的平衡位置存在性容易证明，故略，这里仅证唯一性，令(5.6-1)式右端为零。

$$x_i = R\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i(x_j) + R\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + RI \qquad i = 1,2,\cdots n$$

设 $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}(i=1,2,\cdots n)$ 分别为(5.6-1)式的两个平衡位置。故有

$$\begin{aligned} |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| &\leqslant R\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| f_j(x_j^{(1)}) - f_j(x_j^{(2)}) \\ &\leqslant R\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \end{aligned} \qquad (5.6\text{-}3)$$

改写(5.6-3)为向量形式

$$\mathrm{col}(|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}, \cdots, |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \leqslant R|A|\mathrm{col}(|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}|, \cdots, |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|) \leqslant \cdots (R|A|)^n \mathrm{col}(|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}|, \cdots, |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}|)$$

因为 $\rho(R|A|)<1$，故 $\lim\limits_{m\to\infty}(R|A|)^m = 0$。

故 $x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$ 唯一性获证。

设此平衡位置为 $x = x^*$，将(5.6-1)式改写为

$$C\frac{\mathrm{d}(x_i - x_i^*)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}(x_i - x_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[f_j(x_j) - f_j(x_j^*)] \qquad (5.6\text{-}4)$$

$\rho(R|A|)<1$ 等价于$(E - r|A|)$为 M 矩阵，E 为单位矩阵。

故存在一组正数 $p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$-\frac{p_j}{R}+\sum_{i=1}^{n}p_i\mid a_{ij}\mid<0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

故(5.6-4)式作 Ляпунов 函数

$$W(x)=\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}p_i\mid x_i-x_i^*\mid>0, 当\ x\neq x^*, W(x^*)=0$$

$$W(x)\to+\infty \qquad 当\mid x_i-x_i^*\mid\to+\infty$$

$$D^{-1}W(x)\mid_{(5.6\text{-}4)}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left[-\frac{p_j}{R}+\sum_{i=1}^{n}p_i\mid a_{ij}\mid\right]\mid x_j-x_j^*\mid<0$$

当 $x\neq x^*$

故结论成立。

定理 5.6.3 若 $a_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$，且矩阵

$$H\overset{\text{def}}{=}\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12}^T & H_{22}\end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad 负定,$$

则(5.6-1)式的平衡位置 $x=x^*$ 全局稳定。

这里 $\qquad H_{11}=\mathrm{diag}(-\frac{1}{R},\cdots,\frac{1}{R}) \qquad H_{12}=\frac{1}{2}(A-H_{22})$

$$H_{22}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

证：对(5.6-4)式作 Ляпунов 函数

$$W(x)=\frac{1}{2C}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^*)^2 \tag{5.6-5}$$

对 $W(x)$ 沿(5.6-4)的解求导，且利用

$-(x_i-x_i^*)(f_i(x_i)-f_i(x_i^*))\leqslant-[f_i(x_i)-f_i(x_i^*)]^2$ 便有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\mid_{(5.6\text{-}4)}&=\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{R}(x_i-x_i^*)^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x_i-x_i^*)(f_i(x_i)\\&\quad-f_i(x_i^*))+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}(x_i-x_i^*)(f_j(x_j)-f_j(x_j^*))\\&\leqslant\sum_{j=1}^{n}-\frac{1}{R}(x_i-x_i^*)^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(f_i(x_i)-f_i(x_i^*))^2\\&\quad+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}(x_i-x_i^*)(f_j(x_j)-f_j(x_j^*))\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12}^T & H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}^*\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$<0 \quad 当 x \neq x^* \tag{5.6-6}$$

其中 $x - x^* = (x_1 - x_1^*, \cdots, x_n - x_n^*)^T$

$$f(x) - f(x^*) = (f_1(x_1) - f_1(x_1^*), \cdots, f_n(x_n) - f(x_n^*))^T$$

故 $x = x^*$,全局稳定。

定理 5.6.4 若 $a_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$,且存在 $\varepsilon>0$,使得矩阵 $H+\begin{pmatrix} E_n\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$ 半负定。

则(5.6-1)式的平衡位置 $x=x^*$ 全局稳定。

证:利用(5.6-5)式,便有

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}\Big|_{(5.6\text{-}4)} &= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{R}+\varepsilon\right)(x_i - x_i^*) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(f_i(x_i) - f_i(x_i^*))^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(x_i - x_i^*) \\ &\cdot (f_j(x_j) - f_j(x_j^*)) - \varepsilon\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^*)^2 \\ &\leqslant -\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)^2 \qquad 当 x\neq x^* \end{aligned}$$

故结论成立。

推论 5.6.1 若 $\frac{1}{R} > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{2}|a_{ij}|, \quad i = 1,2,\cdots,n$

$$-a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{2}|a_{ji}|, \quad i = 1,\cdots,n$$

则 $x=x^*$ 全局稳定。

定理 5.6.5 若矩阵 $\left(-\frac{1}{R}+a_{ii}+(1-\delta_{ij})|a_{ij}|\right)_{n\times n}$ 是 Hurwitz 矩阵,则(5.6-1)式的平衡位置 $x=x^*$ 全局稳定。其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号。

证:定理条件等价于存在正数 $p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\left(-\frac{1}{R}+a_{jj}\right)p_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} p_i|a_{ij}| < 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

作 Ляпунов 函数

$$W(x) = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_i^*)\mathrm{sgn}(x_i - x_i^*)$$

计及 $-|x_i - x_i^*| \leqslant -|f_i(x_i) - f_i(x_i^*)|$

故有

$$\begin{aligned}
D^+ W|_{(5.6\text{-}4)} = & \sum_{i=1}^{n} p_i[-\frac{1}{R}(x_i - x_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j) \\
& - f_j(x_j^*)]\mathrm{sgn}(x_i - x_i^*) \\
\leqslant & \sum_{j=1}^{n}[p_j\left(-\frac{1}{R}(x_i - x_i^*) + a_{jj}|f_j(x_j) - f_j(x_j^*)|\right) \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} p_i |a_{ij}||f_j(x_j) - f_j(x_j^*)|] \\
\leqslant & \sum_{j=1}^{l} -\frac{p_j}{R}|x_j - x_j^*| + \sum_{j=l+1}^{n}[p_j(-\frac{1}{R} + a_{jj}) \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} p_i |a_{ij}|] \cdot |f_j(x_j) - f_j(x_j^*)|] \\
\leqslant & \sum_{j=1}^{l} -\frac{p_j}{R}|x_j - x_j^*| + \sum_{j=l+1}^{n}[p_j(-\frac{1}{R} + a_{jj}) \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} p_i |a_{ij}|] \cdot |f_j(x_j) - f_j(x_j^*)| \\
< & 0 \quad \text{当 } x \neq x^*
\end{aligned}$$

故结论成立。

推论 5.6.2 若下列条件之一成立

1) $\dfrac{1}{R} - a_{jj} > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad j = 1,2,\cdots,n$

2) $\dfrac{1}{R} - a_{ii} > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,2,\cdots,n$

3) $\dfrac{1}{R} - a_{ii} > \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} (|a_{ji}| + |a_{ii}|) \qquad i = 1,\cdots,n$

则(5.6-1)式的平衡位置 $x = x^*$ 全局稳定。

下面来考虑细胞神经网络(5.6-1)式的周期解的存在性,不失一般性,仅考虑区域

$$D^* \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid |x_i| < 1, i = 1,2,\cdots,l, |x_j| \geqslant 1, j = l+1,\cdots,n\}$$

假设 $x = x^* \in D^*$ 为(5.6-1)式的平衡点,且为内点。

定理 5.6.6 若矩阵

$$L^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C}\begin{pmatrix} -\frac{1}{R}+a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & -\frac{1}{R}+a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{R}+a_{ll} \end{pmatrix}_{l\times l}$$

仅有单的纯虚特征值,即特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 均不同,则(5.6-1)在 D^* 的内点 x^* 附近,存在 l 维周期解流形,过 x^* 的点的 n 维邻域内的任意始值 x_0 的解,必趋于 l 维流形中的一个周期解。

证:在 D^* 内,(5.6-1)解改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_l - x_l^* \end{pmatrix} = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} -\frac{1}{R}+a_{11}, & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & \ddots & a_{2l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \cdots & -\frac{1}{R}+a_{ll} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_l - x_l^* \end{pmatrix} \tag{5.6-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_{l+1} - x_{l+1}^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} a_{l+1,1}, & \cdots & a_{l+1,l} \\ \vdots & & \\ a_{n,l} & \cdots & a_{n,l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x'_l - x_l^* \end{pmatrix} + \frac{1}{C}\begin{pmatrix} -\frac{1}{R}, & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{l+1} - x_{l+1}^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \tag{5.6-8}$$

因为 L^* 有 l 个互不相同的纯特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$，则矩阵

$$\overline{\varphi}(t)=\{e^{\lambda_1 t}(R_1-x^*),e^{\lambda_2 t}(R_2-x^*),\cdots,e^{\lambda_l t}(R_l-x^*)\}$$

是(5.6-7)式的基解矩阵，其中 R_i-x^* 是 L^* 的与 λ_i 相应的特征向量，故(5.6-7)式的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1-x_1^* \\ \vdots \\ x_l-x_l^* \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n} p_i e^{\lambda_i t}(R_i-x^*) \qquad p_i \text{ 为任意常数}$$

显然，它是 L 维周期流形，这里 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^T$。

(5.6-8)式的通解可表示为

$$\begin{pmatrix} x_{l+1}-x_{l+1}^* \\ \vdots \\ x_n-x_n^* \end{pmatrix}=\exp\begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} x_{l+1}^{(0)}-x_{l+1}^* \\ \vdots \\ x_n^{(0)}-x_n^* \end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t \exp\begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0, & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}(t-\tau)\sum_{i=1}^{n} p_i e^{\lambda_i \tau}(R_i-x^*)\mathrm{d}\tau \qquad (5.6\text{-}9)$$

(5.6-8)式的一特解为

$$\begin{pmatrix} x_{l+1}-x_{l+1}^* \\ \vdots \\ x_n-x_n^* \end{pmatrix}=\int_0^t \exp\begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0, & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

$$\cdot (t - \tau) \sum_{i=1}^{n} p_i e^{\lambda_i \tau} (R_i - x^*) d\tau \qquad (5.6\text{-}10)$$

易证此特解为周期解，且当始值 $\| (x_{l+1}^{(0)}) - x_{l+1}^*, \cdots, (x_n^{(0)} - x_n^*) \| \ll 1$，(5.6-9)式以(5.6-10)式为其极限，这就完成了证明。

第六章　离散动力系统

用差分方程描述的动力系统稳定性的研究是 Ляпунов 稳定性理论的近代内容,至今尚未见到离散动力系统稳定性的专著,本章较为详尽地介绍这方面的成果。§1　介绍 Ляпунов 直接法研究一般非自治和自治差分方程稳定性的基本定理;§2　介绍了 LaSalle 不变原理;§3　讨论比较原理在稳定性中的应用;§4　给出离散系统稳定性的代数判据;§5　给出实方阵 $A(a_{ij})$稳定性的简结的几何充要条件;§6　研究离散 Лурье 型控制系统绝对稳定的充要条件;§7　分析具有时滞的差分系统的稳定性;§8　介绍泛函差分方程的稳定域、渐近稳定域、指数稳定性域的新近结果。

§1　Ляпунов 函数法的基本定理[114]

考虑一般的非自治差分方程组

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(k,\boldsymbol{x}(k)) \tag{6.1-1}$$

$\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{f}\in C[N_+\times R^n,R^n]$,$N_+$为非负整数集。

$$\boldsymbol{f}(k,\boldsymbol{o})=0$$

即 $\boldsymbol{x}=0$ 为(6.1-1)式的一个平衡位置,以 $\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)$表示(6.1-1)式过始值 $\boldsymbol{x}(k_0)=\boldsymbol{x}_0$ 的解。

设 $V(\boldsymbol{x})\in C[R^n,R_+]$是由 R^n 到R_+的一个函数,$V(\boldsymbol{x})$沿(6.1-1)式的解的差分定义为

$$\Delta V(\boldsymbol{x})\mid_{(6.1\text{-}1)}=V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))$$

定义6.1.1　称(6.1-1)的零解$x=0$是稳定的[一致稳定

的],若$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon, k_0)>0[\exists \delta(\varepsilon)>0]$,当$\|x_0\|<\delta(\varepsilon, t_0)$ $[\|x_0\|<\delta(\varepsilon)]$,对一切$k\geqslant k_0$,有

$$\|x(k, k_0, x_0)\| < \varepsilon$$

反之,则称$x=0$是不稳定的。

定义 6.1.2 称(6.1-1)式零解$x=0$是吸引的,一致吸引的,若$\forall \varepsilon>0, \exists \sigma(t_0)>0, T(\varepsilon, k_0)>0[\exists \sigma>0, T(\varepsilon)>0]$,当$\|x_0\|<\sigma(t_0), k\geqslant T(\varepsilon, k_0)+k_0$[当$\|x_0\|<\sigma(t_0), k\geqslant k_0+T(\varepsilon)$],有

$$\|x(k, k_0, x_0)\|<\varepsilon$$

定义 6.1.3 称(6.1-1)式的零解渐近稳定[一致渐近稳定],若它稳定且吸引(若它一致稳定且一致吸引),$\Omega=\{x, \|x\|<\sigma\}$称为吸引区域。

若σ可任意大,则渐近稳定、一致渐近稳定分别为全局渐近稳定、全局一致渐近稳定。

定义 6.1.4 称(6.1-1)式的解$x(k)$有界[一致有界],若$\forall H>0, k_0\in N_+, \exists M(H, k_0)[\exists M(H)]$,使得对一切$x_0\in H$,有

$$\|x(k, k_0, x_0)\|\leqslant M(H, k_0)[\|x(k, k_0, x_0)\|\leqslant M(H)]$$

定义 6.1.5 称(6.1-1)式为耗散[一致耗散]系统,若存在一个紧集$\Omega\in R^n$,使得$\forall M>0, \exists$自然数$k_T(M, k_0)[k_T(M)>0]$,使得$\forall x_0\in S_M=\{x\,\|x\|\leqslant M\}$,当$k\geqslant k_0+k_T(M, k_0)[k\geqslant k_0+k_T(M)]$,解$x(k, k_0, x_0)$最终要进入$\Omega$内。

定理 6.1.1 若在$N_+\times S_r$上存在一个正定函数[具有无穷小上界的正定函数]$V(k, x)$,使得

$$\Delta V(k, x)\mid_{(6.1\text{-}1)} = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))\leqslant 0$$

则(6.1-1)式的零解稳定[一致稳定]。

证:因V正定[V正定且有无穷小上界],故存在$\varphi_1\in K[\exists \varphi_1, \varphi_2\in K]$,使得

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(k, x)[\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(k, x)\leqslant \varphi_2(\|x\|)]$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(k_0,\varepsilon)$ [取 $\delta=\varphi_2^{-1}[\varphi_1(\varepsilon)]$不依赖于 k_0]

当 $\|x_0\|<\delta(k_0,\varepsilon)$ [当 $\|x_0\|<\delta$]

有 $\varphi_1(\|x(k)\|)\leqslant V(k,x(k))\leqslant V(k_0,x_0)\leqslant\varphi_1(\varepsilon)$

$$[\varphi_1(\|x(k)\|)\leqslant V(k,x(k))\leqslant V(k_0,x_0)$$
$$\leqslant\varphi_2(\|x_0\|)\leqslant\varphi_2(\delta)=\varphi_1(\varepsilon)]$$

故有 $\|x(k)\|\leqslant\varepsilon$ 当 $k>k_0$

从而 $x=0$ 稳定 [一致稳定]。

现在介绍渐近稳定性结果。

定理 6.1.2 若存在正函数 $V(k,x)\in C[N_+\times S_r,R_+]$使得 $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}$负定,则(6.1-1)式的零解渐近稳定。

证:由假设存在 $\varphi\in K$,使得 $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}\leqslant-\varphi(\|x\|)$

这里
$$\begin{aligned}&V(k+1,x(k+1))-V(k_0,x_0)\\&=V(k+1,x(k+1))-V(k,x(k))+V(k,x(k))\\&\quad-V(k-1,x(k-1)),\cdots-V(k_0,x_0)\\&\leqslant-\sum_{j=k_0+1}^{k}\varphi\|x(j)\|\end{aligned}\tag{6.1-2}$$

令 $k\to\infty$,利用 V 的正定性,便有

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\varphi(\|x(j)\|)\leqslant V(k_0,x_0)\tag{6.1-3}$$

由级数的收敛性,可知当 $j\to\infty,\varphi(\|x(j)\|)\to0$,从而 $\|x(k)\|\to0$,当 $k\to\infty$。故(6.1-1)式的零解吸引,而它的稳定性由定理 6.1.1 保证,从而(6.1-1)式的零解渐近稳定。

定理 6.1.3 若存在具有无穷小上界的正定函数 $V(k,x)\in C[N_+\times S_r,R_+]$,使得 $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}$负定,则(6.1-1)式的零解一致渐近稳定。

证:由条件知存在 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_2\in K$,使之

$$\varphi_1(\|x\|)\leqslant V(k,x)\leqslant\varphi_2(\|x\|)\tag{6.1-4}$$

$$\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}\leqslant-\varphi_3(\|x\|)\tag{6.1-5}$$

由定理 6.1.1 知 $x=0$ 是一致稳定的,现只须证一致吸引,由 $x=0$ 的一致稳定性可知

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)$,当 $\|x_0\|<\delta$,有 $\|x(k,k_0,x_0)\|<\varepsilon$

今证对此 $\varepsilon>0, \exists \sigma_0(\varepsilon)>0$ 和 $T(\varepsilon)\in N_+$,当

$\|x_0\|<\sigma_0$,对一切 $k\geqslant k_0+T(\varepsilon)$,有 $\|x(k,k_0,x_0)\|<\varepsilon$

为此,取 $T(\varepsilon)=\left[\dfrac{\varphi_2(\delta)}{\varphi_3(\delta)}\right]+k_0$,[ ]表示括号内的数的最大整数部分。

当 $\|x_0\|<\sigma_0$,在 $k_0\leqslant k\leqslant k_0+T(\varepsilon)$ 中存在自然数 k_1,使得 $\|x(k_1,k_0,x_0)\|<\delta$。

若不然,则在 $k_0\leqslant k\leqslant k_0+T(\varepsilon)$ 内有

$$\|x(k,k_0,x_0)\|\geqslant\delta(\varepsilon) \tag{6.1-6}$$

故有 $\Delta V(k,x(k_0)\leqslant-\varphi_3(\|x(k)\|)\leqslant-\varphi_3(\delta(\varepsilon))$ (6.1-7)

从而 $\sum\limits_{k=k_0}^{T}\Delta V(k,x(k))\leqslant-\varphi_3(\delta)(T-k_0)$ 即

$$\begin{aligned}V(k,k_0,x_0)&\leqslant V(k_0,x_0)-\varphi_3(\delta)(T-k_0)\\&\leqslant\varphi_2(\|x_0\|)-\varphi_3(\delta)(T-k_0)\\&\leqslant\varphi_2(\delta_0)-\varphi_3(\delta)\left[\frac{\varphi_2(\delta)}{\varphi_3(\delta)}\right]\leqslant 0\end{aligned} \tag{6.1-8}$$

(6.1-8)与 $V(k\ x)$ 的正定性矛盾,故在 $k_0\leqslant k\leqslant k_0+T$ 中存在 k_1 使得

$$\|x(k_1,k_0,x_0)\|<\delta$$

因而对所有 $k\geqslant k_0+T$,有 $\|x(k,k_0,x_0)\|<\varepsilon$

从而 $x=0$ 一致渐近稳定。

定理 6.1.4 若在 $N_+\times R_n$ 上存在具有无穷小上界的无穷大正函数 $V(k,x)$,使得 $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}$ 负定,则(6.1-1)的平凡解全局一致渐近稳定。

证明可仿定理 6.1.3 进行,略。

以下介绍指数稳定和全局稳定的定理。

定理 6.1.5 若存在 $V(k,x)\in C[N_+\times S_r,R_+]$ 和两个常数 $c_1\geqslant 1, c_2>0$,使得

1) $\|x\|\leqslant V(k,x)\leqslant c_1\|x\|$ (6.1-9)

2)$\Delta V|_{(6.1\text{-}1)} \leqslant -c_2 \| \boldsymbol{x} \|$ (6.1-10)

则(6.1-1)式的零解指数稳定。

证:由条件有

$$
\begin{aligned}
V(k+1, \boldsymbol{x}(k+1)) &\leqslant V(k, \boldsymbol{x}(k)) - \frac{c_2}{c_1} V(k, \boldsymbol{x}(k)) \\
&\leqslant V(k, \boldsymbol{x}(k)) - \frac{c_2}{c_1 + c_2} V(k, \boldsymbol{x}(k)) \\
&= \frac{c_1}{c_1 + c_2} V(k, \boldsymbol{x}(k)) = \rho V(k, \boldsymbol{x}(k)) \\
&\leqslant \rho^2 V(k-1, \boldsymbol{x}(k-1)) \leqslant \cdots \leqslant \rho^{k+1} V(0, \boldsymbol{x}(0)) \quad (6.1\text{-}11)
\end{aligned}
$$

这里 $0 < \rho = \dfrac{c_1}{c_2 + c_1} < 1$

令 $-\alpha = \ln\rho$ 　　则 $\rho^{k+1} = \mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}$

从而由(6.1-9)、(6.1-10)、(6.1-11)式便有

$$
\begin{aligned}
\| \boldsymbol{x}(k+1, \boldsymbol{x}_0) \| &\leqslant V(k+1, \boldsymbol{x}(k+1)) \leqslant \rho^{k+1} V(0, \boldsymbol{x}(0)) \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha(k+1)} V(0, \boldsymbol{x}(0)) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(k+1)} c_1 \| x(0) \| \quad (6.1\text{-}12)
\end{aligned}
$$

(6.1-12)式表明(6.1-1)式的零解是指数稳定的。

定理 6.1.6 若存在 $V(k, \boldsymbol{x}) \in C[N_+ \times R^n, R_+]$ 和常数 $c_1 \geqslant 1, c_2 > 0$,使得

1) $\| \boldsymbol{x} \| \leqslant V(k, \boldsymbol{x}) \leqslant c_1 \| \boldsymbol{x} \|$ (6.1-13)

2) $\Delta V(k, \boldsymbol{x})|_{(p-1)} \leqslant -c_2 \| \boldsymbol{x} \|$ (6.1-14)

则(6.1-1)式的零解全局指数稳定。

证明可仿定理 6.1.5 进行,略。

例 1 考虑一个三维离散非线性系统

$$
\begin{cases}
x(k+1) = \dfrac{y(k)}{1 + x^2(k) + y^2(k) + z^2(k)} \\[2ex]
y(k+1) = \dfrac{z(k)}{1 + x^2(k) + y^2(k) + z^2(k)} \\[2ex]
z(k+1) = \dfrac{x(k)}{1 + x^2(k) + y^2(k) + z^2(k)}
\end{cases}
\quad (6.1\text{-}15)
$$

的零解的稳定性。

作 Ляпунов 函数 $V=x^2+y^2+z^2$

$$\Delta V(k)\mid_{(6.1\text{-}15)}=\left[\frac{1}{1+x^2(k)+y^2(k)+z^2(k))^2}-1\right]x^2(k)$$

$$+\left[\frac{1}{(1+x^2(k)+y^2(k)+z^2(k))^2}-1\right]y^2(k)$$

$$+\left[\frac{1}{(1+x^2(k)+y^2(k)+z^2(k))^2}-1\right]z^2(k)$$

$$<0 \qquad \text{当 } x^2+y^2+z^2\neq 0$$

故(6.1-15)式的零解是全局渐近稳定的。

例 2　考虑一个二维系统的指数稳定性

$$\begin{cases} x(k+1)=\dfrac{2y(k)}{3(1+|x(k)|)} \\ y(k+1)=\dfrac{4x(k)}{5(1+|y(k)|)} \end{cases} \tag{6.1-16}$$

作 Ляпунов 函数

$$V(x,y)=|x|+|y|$$

显然满足定理 6.1.6 条件,又

$$\Delta V|_{(6.1\text{-}16)}=\frac{|2y(k)|}{3(1+|x(k)|)}+\frac{|4x(k)|}{5(1+|y(k)|)}-|x(k)|-|y(k)|$$

$$=\left(\frac{4}{5(1+|y(k)|)}-1\right)|x(k)|+\left(\frac{2}{3(1+|x(k)|)}-1\right)\cdot|y(k)|$$

$$\leqslant-\frac{1}{5}|x(k)|-\frac{1}{3}|y(k)|$$

$$\leqslant-\frac{1}{5}(|x(k)|+|y(k)|)=-\frac{1}{5}V(x(k),y(k))$$

定理 6.1.6 的条件 2)满足。定理 6.1.6 的条件 2)满足,故零解是全局指数稳定的。

故例 2 的(6.1-16)式的零解是全局指数稳定的。

现在介绍不稳定性定理。

定理 6.1.7　若存在 $V(k,x)\in C[N_+\times S_r,R]$,使得 $V(k,0)=0$,且:

1) 对 $k \leqslant k_0$,在原点任意领域内有 $V>0$ 的区域;

2) 在区域 $V>0$,$V(k,\boldsymbol{x})$有界,

3)在 $V>0$ 中,$\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}$正定,即 $\forall \varepsilon>0$, $\exists l \geqslant 0$,使得在 $V \geqslant \varepsilon>0$ 中,对一切 $k \geqslant k_0$;

$$\Delta V|_{(6.1\text{-}1)} \geqslant l > 0 \qquad (6.1\text{-}17)$$

则(6.1-1)式的零解不稳定。

证:选取 $\varepsilon>0$,使 $0<\varepsilon<r$,今证 $\exists \boldsymbol{x}_0$,不管 $\|\boldsymbol{x}_0\|$ 多小,解 $\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)$总会越出 $\|\boldsymbol{x}\|<\varepsilon$。

在区域 $V>0$ 内,任取 $\boldsymbol{x}_0$ 使 $\|\boldsymbol{x}_0\|$ 任意小且 $V(k_0,\boldsymbol{x}_0)>0$。

因为 $\quad \Delta V|_{(6.1\text{-}1)}>0 \quad$ 故

$$V(k,\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)) \geqslant V(k_0,\boldsymbol{x}_0) > 0 \qquad (6.1\text{-}18)$$

若 $\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)$不越出 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$,则将一直位于区域 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ 中。

由条件 3),存在 $l>0$,使得

$$\Delta V(k,\boldsymbol{x}(k)) > l > 0 \qquad (6.1\text{-}19)$$

故 $\quad V(k,\boldsymbol{x}(k)) \geqslant V(k_0,\boldsymbol{x}_0) + l(k-k_0) \to \infty$

与条件 2)矛盾,故定理结论成立。

推论 6.1.1 若存在 $V(k,\boldsymbol{x}) \in C[N_+ \times S_r, R]$, $V(k,0)=0$

使得 1) 定理 6.1.7 条件 1)成立;

2) V 具有无穷小上界;

3)$\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}$正定;

则(6.1-1)式的零解不稳定。

证:由条件 2) 存在正定的函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$,使得

$$|V(t,\boldsymbol{x})| \leqslant \varphi(\|\boldsymbol{x}\|)$$

故对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta(\varepsilon)>0$,当 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时有

$$|V(t,\boldsymbol{x})| < \varepsilon \qquad (\forall t > t_0)$$

故在原点某领域 O_δ 与 $V>0$ 的交集内,$V(t,\boldsymbol{x})$有界,定理 6.1.7 条件 2)成立。

因为存在正函数 $W(\boldsymbol{x})$,使 $\Delta V \geqslant W(\boldsymbol{x})$ 故

$\forall \varepsilon^* > 0$,在 $V > \varepsilon^*$ 中有 $\|x\| \geqslant \delta$,取

$$l = \inf_{\delta \leqslant \|x \leq H} W(x) \tag{6.1-20}$$

从而 $W(x) \geqslant l > 0$,即在 $V > 0$ 内,ΔV 正定

定理 6.1.7 条件全满足,故结论真。

推论 6.1.2 若存在 $V(k,x) \in C[N_+ \times S_r, R]$使得

1)在原点任意领域内有 $V > 0$ 的区域;

2) V 在$N_+ \times S_r$ 内有界;

3) $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)} = \lambda V + W(t\, x)$

其中 $\lambda > 0, W(k,x) \geqslant 0$

则(6.1-1)式零解不稳定。

证:条件 1)、2)蕴涵定理 6.1.7 的条件 1)、2)成立。

$\forall \varepsilon > 0$,取 $l(\varepsilon) = \lambda\varepsilon$,在 $V \geqslant \varepsilon$ 上,有

$$\Delta V \geqslant \lambda\varepsilon > 0$$

从而条件 3)蕴涵定理 6.1.7 的条件 3)成立。

故定理 6.1.7 的全部条件满足,结论自然成立。

以上介绍系统的解的有界性和耗散性。

定理 6.1.8 若存在函数 $V(k,x) \in C[N_+ \times R^n, R]$

使得 1) $V(k,x) \geqslant \varphi(\|x\|) \quad \varphi \in KR$

2) $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)} \leqslant 0$

则(6.1-1)式的解是有界的。

证:对任意解 $x(k,k_0,x_0)$, 因为

$$\varphi(\|x(k)k_0,x_0\|) \leqslant V(k,x(k,k_0,x_0)) \leqslant V(k_0,x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(k_0,x_0) \tag{6.1-21}$$

故 $\|x(k,k_0,x_0)\| \leqslant \varphi^{-1}\beta(k_0,x_0)$, 对一切 $k \geqslant k_0$

从而(6.1-1)的解有界。

注 若条件 1)加强为

$\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(k,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|) \qquad \varphi_2 \in KR \quad i = 1,2$

其它条件不变,则(6.1-1)的解一致稳定,读者易于仿照一致稳定

的定理 6.1.1 及定理 6.1.8 证之,略。

定理 6.1.8 的条件 1)、2)不必在全空间 R^n 上成立,只要在 R^n/S_r 上成立,这里 R^n/S_r 即为 S_r 在 R^n 内的余集。

定理 6.1.9 若存在 $V(k,x)\in C[N_+\times R^n/S_r,R]$

使得 1) $V(k,\boldsymbol{x})\geqslant\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\qquad \boldsymbol{x}\in R_n/S_r$

2) $\Delta V|_{(6.1\text{-}1)}\leqslant-\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\qquad \boldsymbol{x}\in R^n/S_r\quad \varphi\in K$

则存在 $r_1>r$ $\forall \boldsymbol{x}_0\in R^n$,(6.1-1)式的解 $\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)$最终要进入 S_{r_1},即 $\|\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant r_1$,从而(6.1-1)式是一耗散系统。

证:$\forall \boldsymbol{x}_0\in R^n$,则必存在 $k_1>k_0$,使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}(k_1,k_0,\boldsymbol{x}_0)\|)\leqslant\varphi(r_1)\tag{6.1-22}$$

若不然,则从

$$V(k,\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant V(k_0,\boldsymbol{x}_0)-\sum_{j=k_0}^{k-1}\varphi(\|\boldsymbol{x}(j)\|)$$

$$\to-\infty\quad 当\ k\to\infty$$

就推出了矛盾,故(6.1-22)式成立。

记 $\boldsymbol{x}(k_1)=\boldsymbol{x}(k_1,k_0,\boldsymbol{x}_0)$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(\|\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)\|)&=\varphi(\|(\boldsymbol{x}(k,k_1,\boldsymbol{x}(k_1))\|)\\&\leqslant V(k,\boldsymbol{x}(k,k_1,\boldsymbol{x}(k_1)))\\&\leqslant V(k_1,\boldsymbol{x}(k_1,k_0,\boldsymbol{x}_0))\\&\leqslant\varphi(r_1)\end{aligned}$$

从而 $\|\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant r_1$ 当 $k\geqslant k_1$,故结论真。

如果将定理 6.1.9 的条件 1)加强为

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(k,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

其它条件不变,则(6.1-1)式是一个一致耗散系统。

§2 LaSalle 不变原理[30]

本节简略地介绍 LaSalle 不变原理的主要思想。

题,此外,稳定性必与动力行为有关,即当 x 和 T 都受扰动时,将出现什么情况。

方程 $x = Tx$ 之解的逐次逼近法的基本思想在于,如果 $T^n x_0$ 收敛,则它的极限就是一个解(不动点或不变点),LaSalle 推广了这一思想。

仿此 Birkhoff 的作法,引进 $T^n x$ 的极限集而得到重要的不变原理(LaSalle)。

现引进一些记号,对 $x \in R^m$ 及 $S \subset R^m$。

$\rho(x, S) = \inf(\| y - x \|, y \in S)$ 表示点 x 到集合 S 的距离,当 $n \to \infty$, $T^n x \to S$,即 $\rho(T^n x, s) \to 0, n \to \infty$。

$\bar{S} = \{x, \rho(x, s) = 0\}$ 是 S 的闭包。

若 $\bar{S} = S$,集合 S 是闭的;若它的余集是闭的,则 S 是开的。

$$T(s) = \{T(x), x \in S\}$$

定义 6.2.2 (Birkhoff)若存在一整数序列 n_i,使得当 $i \to \infty$ 有 $n_i \to \infty$ 和 $T_{n_i} x \to y$,则称 y 是 $T^n x$ 的一极限点,从 x 出发的运动 $T^n x$ 的极限集 $\Omega(x)$ 就是 $T^n x$ 的一切极限点的集合。

为了研究不变性,先考察极限集的性质。

定义 6.2.3 若 $T(H) \subset H (H \subset T(H))$,则称集合 H 为相对于方程(6.2-1)式是正(负)不变的,如果 $T(H) = H$,则称 H 为不变集。

定义 6.2.4 若闭不变集 H 不是两个非空的不相交的闭不变集之并,而称此 H 为不变连通的。

定义 6.2.5 若对某个 $k > 0$, $T^k x = x$,则称运动 $T^n x$ 是周期的(或循环的)。这种整数 k 中的最小者称为此运动的周期或循环阶,如果 $k = 1$,则 x 是 T 的一个不动点,或称此 x 为(6.2-1)式的一个平衡状态。

不变集有下列重要性质:

性质 1, 设 H 是有限个元素组成的不变集,则 H 为不变连通的充要条件是 H 为一周期运动。

证:必要性,由于 H 是有限个元素组成的不变集,故 H 中的

点只能有两种情况：一种是不动点；一种是周期运动点。前者可视为后者的特殊情况，故 H 必为周期运动。

充分性，用反证法，若 H 是不连通的，则

$$H = H_1 \cup H_2 \quad 且\ H_1 \cap H_2 = \varnothing \qquad (6.2\text{-}2)$$

这里 $\quad H_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots\cdots \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i\}, H_2 = \{\boldsymbol{x}_{i+1}, \cdots\cdots \boldsymbol{x}_n\} \quad (6.2\text{-}3)$

且 $\quad H_1$ 与 H_2 都是不变集。

因为 $\boldsymbol{x}_n$ 是周期运动中的一点，故可设

$$T^{n_i}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_n \qquad 但\ \boldsymbol{x}_n \overline{\in} H_1$$

故 H_1 不是不变的，矛盾，由此可得 H 是不变连通的。

性质 2，1) 正向不变集的闭包是正不变集；

2)有界不变集的闭包是不变集。

证：1)设 H 为正向的不变集，故 $T(H) \subset H$

今证 $\quad T(\overline{H}) \subset \overline{H}$

$\forall\, \boldsymbol{y} \in \overline{H}$ 故存在序列 $\boldsymbol{x}_n \in H$，使得 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{y}$，当 $n \to \infty$，由 T 的连续性有 $T(\boldsymbol{x}_n) \to T(\boldsymbol{y})$，故 $T(\boldsymbol{y}) \subset \overline{H}$，从而有 $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$，故正向不变集的闭包是正向不变的。

2)设 H 为有界不变集，则它们闭包 $\overline{H}$ 也有界，因 $\overline{H}$ 正不变，即 $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$。

往下只须证 $\overline{H} \subset T(\overline{H})$，因 H 是不变集，故 $H \subset T(H)$（即 H 是负向不变集），$\overline{H} \subset \overline{T(H)}$。

今证 $\quad \overline{T(H)} < T(\overline{H})$

当 $\boldsymbol{y} \in \overline{T(H)}$，则存在序列 $\boldsymbol{x}_n \in H$，$T(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{y}$，因序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 有界，故存在收敛子序列 $\{\boldsymbol{x}_{n_i}\}$ 使得

$$\boldsymbol{x}_{n_i} \to \boldsymbol{z} \in \overline{H}$$

再由 T 的连续性知

$T(\boldsymbol{x}_{n_i}) \to \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{z}) \in T(\overline{H}) \qquad$ 故最终得到

$$\overline{T(H)} \subset T(\overline{H})$$

而 $\overline{H} \subset \overline{T(H)}$，故 $\overline{H} \subset T(\overline{H})$，$T(\overline{H}) = \overline{H}$

进一步有定理 6.2.1。

定理 6.2.1 每个极限集 $\Omega(x)$都是闭的正不变集。

证:易知 $\Omega(x)$的余集是开的,因此 $\Omega(x)$是闭的,设 $y\in\Omega(x)$,则存在一整数序列 n_i 使得当$i\to\infty$,有 $n_i\to\infty$和 $T^{n_i}x\to y$,由 T 的连续性

$$T(T^{n_i}x) = T^{n_i+1}x \to Ty$$

从而 $Ty\in\Omega(x)$,因此 $T(\Omega(x))\in\Omega(x)$,故 $\Omega(x)$是正不变的。

我们感兴趣的是有界运动的渐近行为,如果运动 T^nx 对一切 $n\in J_+$有界,则通常称此运动是在 Lagrange (拉格朗日)意义下正稳定的。

定理 6.2.2 若 T^nx 对所有的$n\in J_+$是有界的,则 $\Omega(x)$是非空、紧、不变及不变连通集,且当 $n\to\infty$,$\Omega(x)$是 T^nx 所逼近的最小闭集。

证: 显然,T^nx 具有界性,由著名的 Weierstass 聚点定理可知,$\Omega(x)$是非空不变集,由定理6.2.1 可知 $\Omega(x)$是紧集。

令 $y\in\Omega(x)$,且为同定理 6.2.1 的证明中的作法一样选择 n_i,由 T^nx 的有界性,还可以假定 $T^{n_i-1}x$ 也收敛(如果必要,可选一子序列),即 $T^{n_i-1}x\to z$。

则 $z\in\Omega(x)$ $\quad T(T^{n_i-1}x)=T^{n_i}x\to Tz=y$ $\quad$ 故

$\Omega(x)\subset T(\Omega(x))$ 从而由定理6.2.1知 $\Omega(x)$不变。

下面证明,当 T^nx 有界时,$T^nx\to\Omega(x)$,因为 $\rho(T^n(x),\Omega(x))$是有界的,可以断定,如果 $T^n(x)$不逼近 $\Omega(x)$,则存在一序列 n_i 使得当$i\to\infty$时,$n_i\to\infty$,$T^{n_i}(x)$收敛,且 $\rho(T^{n_i}x,\Omega(x))\to 0$。矛盾,因为 $T^{n_i}x$ 的极限在$\Omega(x)$内,且当 $n\to\infty$,$T^nx\to\Omega(x)$。

如果当 $n\to\infty$,$T^nx\to E$,且 E 是闭的,则显然 $\Omega(x)\in E$,故 $\Omega(x)$是当 $n\to\infty$时 T^nx 所逼近的最小闭集。

最后证明 $\Omega(x)$是不变集连通的,假定 $\Omega(x)$是两个相交的,闭的非空不变集 Ω_1 和 Ω_2 的并集,因为 $\Omega(x)$是紧的,则 Ω_1 和 Ω_2 也是紧的,故存在不相交的空集 U_1 和 U_2,使 $\Omega_1\subset U_1$,$\Omega_2\subset$

U_2,还有因为 T 是连续的,因此在 Ω_1 上是一致连续的,从而存在一个空集 V_1 使得 $\Omega_1 \subset V_1, T(V_1) \subset V_1$, 因为 $\Omega(\boldsymbol{x})$是由$T^n(\boldsymbol{x})$所逼近的最小闭集,则 $T^n(\boldsymbol{x})$必与 V_1 和 U_2 相交无限多次,即存在一个收敛子序列 $T^{n_i}\boldsymbol{x}$,它既不在 V_1 内,也不在 U_2 内,可是 $\Omega(\boldsymbol{x})$包含在 V_1 与 U_2 的并集内,这就出现了矛盾,故 $\Omega(\boldsymbol{x})$是不变连通集。

下面来介绍 LaSalle 不变原理。

定理 6.2.3 (LaSalle 不变原理)若下列条件成立:

1) 存在一个函数 $V \in C[G \subset K^n, R]$,使得 V 沿(6.2-1)式的解

$$\Delta V(\boldsymbol{x}(n))|_{(6.2\text{-}1)} = V(\boldsymbol{x}(n+1)) - V(\boldsymbol{x}(n)) \leqslant 0 \quad (6.2\text{-}4)$$

2) $\boldsymbol{x}(n)$是(6.2-1)式的任一有界解,且对所有 $n \geqslant 0, \boldsymbol{x}(n) \subset G$,则存在一个数 c,使得当 $n \to \infty$时

$$\boldsymbol{x}(n) \to M \cap V^{-1}(c) \quad (6.2\text{-}5)$$

其中 M 表示 $E = \{\boldsymbol{x}, \Delta V(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in \overline{G}\}$中的最大不变集。

$$V^{-1} = \{\boldsymbol{x}:\ V(\boldsymbol{x}) = c \quad \boldsymbol{x} \in R^m\} \quad (6.2\text{-}6)$$

证:令 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$,故 $x(n) = T^n\boldsymbol{x}_0$, 假设蕴涵 $V(\boldsymbol{x}(n))$关于 Ω 是非增的且有下界,因此当 $n \to \infty$时, $V(\boldsymbol{x}(n)) \to c$。

令 $\boldsymbol{y} \in \Omega(\boldsymbol{x}^0)$,则存在一序列 n_i,使得 $n_i \to \infty, \boldsymbol{x}(n) \to \boldsymbol{y}$,因为 V 是连续的,故 $V(\boldsymbol{x}(n)) \to V(\boldsymbol{y}) = c$,从而 $\Omega(\boldsymbol{x}^0) \subset V^{-1}(c)$,因为 $\Omega(\boldsymbol{x}^0)$是不变的,故 $V(T\boldsymbol{y}) = c$,且 $V'(\boldsymbol{y}) = 0$,故 $\Omega(\boldsymbol{x}^0) \subset E$,从而也包含在 M 内,因 $\boldsymbol{x}(n) \to \Omega(\boldsymbol{x}^0)$,故 $\boldsymbol{x}(n) \to M \cap V^{-1}(c)$。

下面以一个二维非线性离散系统为例,说明定理 6.2.3 的应用。

例 1 考虑二维系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(n+1) = \dfrac{a\boldsymbol{y}(n)}{1 + \boldsymbol{x}^2(n)} \\ \boldsymbol{y}(n+1) = \dfrac{b\boldsymbol{x}(n)}{1 + \boldsymbol{y}^2(n)} \end{cases} \quad (6.2\text{-}7)$$

取 Ляпунов 函数

$$V(x,y)=x^2+y^2$$

则$\Delta V(x,y)\mid_{(6.2\text{-}7)}=(\frac{b^2}{(1+y^2)^2}-1)x^2+(\frac{a^2}{(1+x^2)^2}-1)y^2$

情况 1,当 $a^2<1$　$b^2<1$,则有

$$\Delta V\mid_{(6.2\text{-}7)}<(b^2-1)x^2+(a^2-1)y^2$$

且 V 是系统(6.2-7)在 R^2 上的 Ляпунов 函数,在此 $M=E=\{(0,0)\}$,可每一个解显然是有界的,从而由定理 6.2.3 得出,当 $n\to\infty$ 时,每个解收敛于原点(原点是全局吸引点)。这正是 Ляпунов 经典的情况,$V(x)$和$-\Delta V(x)$都是正定的。

情况 2,$a^2\leqslant 1,b^2\leqslant 1$,且 $a^2+b^2<2$,可以假设 $a^2<1,b^2=1$,$V(x)=x^2+y^2$ 仍然是(6.2-7)式在 R^2 上的一个 Ляпунов 函数,但$-\Delta V(x)\mid_{(6.2\text{-}7)}$不是正定的,因为 $\Delta V(x)\mid_{(6.2\text{-}7)}\leqslant(a^2-1)y^2$,且 $E=\{x\mid y=0\}$,不管怎样,由于 $T(x,0)=(0,b,x)$,M 恰好是原点 $x=y=0$,故原点是全局渐近稳定的。

这种情况的结论,已无法由 Ляпунов 的经典定理得到,而只能得到 $x=y=0$ 是稳定的较弱的结论,从而说明 LaSalle 不变原理推广了 Ляпунов 定理。

情况 3, $a^2=b^2=1$, $V=x^2+y^2$ 仍是(6.2-7)式的 Ляпунов 函数,且所有解有界,因此 $E=M$ 是两个坐标轴的并集,且由定理 6.2.3 知,对某 c,每个解都逼近于$\{(c,0),(0,c),(-c,0),(0-c)\}$,即 E 与圆 $x^2+y^2=c$ 的交集,这时又有两种情况。

(Ⅰ) $ab=1$

$$T(c,0)=\left\{\frac{ay}{1+x^2},\frac{bx}{1+y^2}\right\}\Big|_{\substack{x=c\\y=0}}=\{0,bc\}$$

$$T^2(c,0)=T,T(c,0)=T(0,bc)=\left\{\frac{ay}{1+x^2},\frac{bx}{1+y^2}\right\}\Big|_{\substack{x=0\\y=bc}}$$

$$=(abc,0)=(c,0)\qquad(\text{因 } ab=1)$$

即　$T^2(c,0)=(abc,0)=(c,0)$

故若 $c\neq 0$,则由点$(c,0)$出发的运动 $T^n(c,0)$是一个周期为 2 的

周期运动，因为极限集是不变连通的，由性质 1 可知每一个解趋于这些周期运动—原点或周期为 2 的周期运动。

（Ⅱ）$ab=-1$　则

$$T(c,0)=(0,bc)$$

$$T^2(c,0)=T(0,bc)=(abc,0)=(-c,0)\qquad \text{因 } ab=-0$$

$$T^3(c,0)=T(-c,0)=\left\{\frac{ay}{1+x^2}\ \frac{bx}{1+y^2}\right\}\Big|_{\substack{x=-c\\ y=0}}=(0,bc)$$

$$T^4(c,0)=T(0,-bc)=\left\{\frac{ay}{1^{-1}x^2}\ \frac{bx}{1+y^2}\right\}_{\substack{x=0\\ y=-bc}}$$

$$=(-abc,c)=(c,0)$$

如果 $c\neq0$，这些都是周期为 4 的周期运动，为同上述情况（Ⅰ），每一个解或逼近于原点，或逼近于周期为 4 的这些周期运动中的一个。

注　对于情况 3 的这种精细的结果，是 Ляпунов 经典定理所无能为力的，这就充分说明了 LaSalle 不变原理是对 Ляпунов 理论的发展。

目前，神经网络中所广泛采用的能量函数法来研究一个神经网络的动力学渐近行为，在很大程度上是受 LaSalle 不变原理的启迪。

情况 4，$a^2>1,b^2>1$，令 $B_\delta=\{(x,y),x^2+y^2<\delta^2\}$，对于 $0<\delta^2<a^2-1,\sigma<\delta^2<b^2-1,\forall x\in B\delta$，有

$$\Delta V\geqslant\left(\frac{b^2}{1+\delta^2}-1\right)x^2+\left(\frac{a^2}{1+\delta^2}-1\right)y^2$$

$$=\left(\frac{b^2-\delta^2-1}{1+\delta^2}\right)\boldsymbol{x}^2+\left(\frac{a^2-\delta^2-1}{1+\delta^2}\right)\boldsymbol{y}^2>0\quad \text{当 } \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\neq0$$

故　$\forall x(0),y(0)\qquad x^2(0)+y^2(0)\neq0$

$x^2(n)+y^2(0)$ 是从 $B\delta$ 内部走向 $B\delta$ 外的，从而

$x=y=0$ 是不稳定的。

下面，进一步利用 LaSalle 不变原理来给出一个集合相对于 T 的稳定性与不稳定性。

定义 6.2.6 若给定 H 的一个邻域 U(包含 $\overline{H}$ 的开集),必存在 H 的一个邻域 W,使得对所有的 $n\in J_+$,有 $T(W)\subset U$,则称 H 为稳定的。对于 $H\subset R^m$ 定义 $\hat{H}$,若存在序列 $\{x_i\}\in R$ 和 $n_i\in J_+$,使得 $x_i\to y\in\overline{H}$, $T^{n_i}(x_i)\to Z$,则称 $x\in\hat{H}$。

在拓扑动力学中,$\hat{H}$ 称为 H 的拓展,当 $i\to\infty$ 时,所有使 $n_i\to\infty$, $T^{n_i}(\boldsymbol{x}_i)\to Z$ 所有这样的 Z 的集合,称为 H 的拓展极限集,注意 $H\subset\hat{H}$。

引理6.2.1 1) 设 H 是一个紧的正不变集,则当且仅当 $\hat{H}=H$ 时,H 是稳定的。

2) 设 H 是一个闭不变集,且包含在一个开有界的正不变集 G 内,则 $\hat{H}$ 是不变的。

证:1)显然,若存在一个 $z\in\hat{H}$ 不在 H 内,则 H 是不稳定的,反之,设 H 不稳定,则对 H 的某邻域 U (可假设 U 是有界的) 必存在一序列 $\boldsymbol{x}^i\in U$,使得当 $i\to\infty$, $\boldsymbol{x}^i\to\boldsymbol{y}\in H$,且每个运动 $T^n\boldsymbol{x}^i$ 最终离开 U,设 n_i 是使 $T^{n_i}\boldsymbol{x}^i$ 不在 U 内的最小整数,则 $T^{n_i}\boldsymbol{x}^i\in T(U)$, 从而这个序列是有界的,因为它包含一个收敛子序列,它的极限不在 H 内,故 H 不稳定就蕴涵 $\hat{H}\neq H$。

2)设 $z\in\hat{H}$, 是存在序列 $\boldsymbol{x}_i\in G$ 和 $n_i\in J_+$,使得当 $i\to\infty$时,$\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{y}\in H$, $T^{n_i}\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{z}$, 因为 $T^{n_i+1}\boldsymbol{x}_i\to T\boldsymbol{z}$, 而有 $T\boldsymbol{z}\in\hat{H}$, 从而 $T(\hat{H})\subset\hat{H}$,如果 n 是有界的,则存在一个 $k\in J_+$,使得 $T^k\boldsymbol{x}_i\to z$,但这时因 H 是不变的,而有 $z=T^k\boldsymbol{y}\in H$,因此,存在一个 $w\in H\subset\hat{H}$,使得 $Tw=z$,如果 n_i 不是有界的,可以假定当 $i\to\infty$, $n_i\to\infty$,则 $T^{n_i-1}\boldsymbol{x}_i$ 在 G 内,因此是有界的,还可以假设 $T^{n_i-1}\boldsymbol{x}_i\to w$,于是 $w\in\hat{H}$,从而又一次得到存在 $w\in\hat{H}$,使得 $Tw=z$,这就证明了 $\hat{H}\subset T\hat{H}$,故 $\hat{H}$ 是不变的。

定义 6.2.7 如果存在 $\overline{H}$ 的一个邻域 U,使得 $\boldsymbol{x}\in U$,蕴含当 $n\to\infty$时,有 $T^n\boldsymbol{x}\to\overline{H}$,则称集合 H 是吸引集;如果 H 既稳定又吸引,则称 H 为渐近稳定,此外,若对一切 $\boldsymbol{x}\in R^m$,当 $n\to\infty$, $T^n\boldsymbol{x}\to\overline{H}$,则称 H 为全局渐近稳定,若 H 既不是稳定的,又不是吸引的

则称之为强不稳定的。

定理 6.2.4 集合的渐近稳定性

设 $G \subset R^n$ 是有界的正不变集,如果:

1) 存在 $V \in C[G,R]$,使得 $\Delta V(X)|_{(6.2\text{-}1)} \leqslant 0$。

2) $M \subset G$,则

M 是吸引集且 $\bar{G} \subset R(M)$ ($R(M)$表示 M 的吸引域)。

3) V 在 M 上是常数。

则 M 是渐近稳定的(相对于 G 是全局渐近稳定的)。

证:因为 V 和 T 是连续的,故 ΔV 是连续的,E 是闭的,于是 M 是 E 中的最大不变集,因此 M 是闭的(由不变集的性质 2))由引理 6.2.1 可知 M 是吸引集,又由不变集的性质 1)知 $\bar{G}$ 是正不变的,由引理 6.2.1 可知 $\bar{G} \subset R(M)$,注意到 $\hat{M} \subset \hat{G}$。

剩下要证的是:当 $V(x) = c$ 于 M 上时,M 是稳定的,现通过 $\hat{M} \subset E$ 来证实这一点。

因为 $\hat{M}$ 属于不变集(引理 6.2.1),而 M 是 z 中最大不变集,由此可知,$\hat{M} = M$,从而 M 是稳定的,令 $z \in \hat{M}$,则 $Tz \to M$,且 $V(z) \geqslant c$,现在存在 x_i 和 n_i 使得当 $i \to \infty$ 时,$x \to y \in M$ 和 $T^{n_i} x_i \to z$。

由 $V(x_i) \geqslant V(T^{n_i} x)$,即可看出 $c \geqslant V(z)$ 且对每个 $z \in \hat{M}$ 有 $V(z) = c$,故 $\hat{M}$ 是不变的,因此 $\hat{M} \subset E$。

定理 6.2.5 集合的不稳定性定理

设 y 是开集 U 的边界上的一平衡点,N 是 y 的一个邻域。假设:

1) $M \cap G = \Phi$(空集)。

2) 存在 $V \in C[G,R]$使得 $\Delta V|_{(6.2\text{-}1)} \leqslant 0$。

3) 在属于 N 内部的 U 的边界部分上 $V(x) = c$。

4) 对于 $x \in G$,有 $V(x) < 0$。

如果 $T(G) \subset U$, 则 y 是不稳定的;实际上如果 N_0 是 y 的任一点包含在 N 内的有界邻域,是从 $G_V \cap N_0$ 中出发的每个解最终离开 N_0,如果 U 是正不变的,则 y 是强不稳定的,事实上当 $n \to \infty$ 没有任何从 U 内出发的解能够趋于 y。

证： 由定理 6.2.3 从 G_0 出发的任意解最后必离开 G_0，因为它不可能逼近 U 的边界属于N 内的那部分，由于它从 G_0 的首次逸出点仍在 U 内，因此它必然离开 N_0；又由于 $\boldsymbol{y}$ 在G_0 边界上，故 $\boldsymbol{y}$ 是不稳定的，如果 U 是正不变的，则显然 $\boldsymbol{y}$ 不可能是一个吸引点。

推论 6.2.1 设 $V\in C[R^m,R]$ 且 $T(0)=0$，在原点的任意邻域内都存在一些点，使得 $V(\boldsymbol{x})>0$，$V(0)=0$，在原点邻域 N 内相对于方程(6.2-1)有

$$\Delta V(\boldsymbol{x})\mid_{(6.2\text{-}1)} = \beta V(\boldsymbol{x}) + W(\boldsymbol{x})$$

这里或者 $W(\boldsymbol{x})$非负，且 $\beta>0$ 或者 $\beta\geqslant 0$ 而 W 正定。
则原点不稳定。

证：设 U 对应于$V(\boldsymbol{x})>0$，则 $-V$ 是方程(6.2-1)在 $G=N\cap V$ 上的 Ляиунов 函数，因为 $\boldsymbol{x}\in G$ 蕴涵 $T(\boldsymbol{x})\subset V$，则原点的不稳定性可由定理 6.2.5 推出。

例 2　考虑

$$\begin{cases} x_1(n+1) = f_1(x_1(n),x_2(n)) \\ x_2(n+1) = f_2(x_1(n),x_2(n)) \end{cases}$$

$$f_1(0,0)=f_2(0,0)=0$$

令　$V=-x_1x_2$　　则

$\Delta V=x_1x_2-f_1(x)f_2(x)$，设

a) 对 $x_1x_2>0$　$f_1(x)f_2(x)>0$

b) 对 $x_1x_2>0$ 且 x 充分接近于原点时(在原点的一个充分小的邻域内)$f_1(x)f_2(x)>x_1x_2$，则对应 $x_1x_2>0$ 的 G，定理 6.2.5 的条件满足，因此原点是强不稳定的。

§3　比较原理在稳定性中的应用

本节介绍差分方程的比较原理，它在对解的估计及稳定性方面是很有用的[122]。

考虑离散动力系统

$$x(k+1)=f(k,x(k)) \tag{6.3-1}$$
$$w(k+1)=g(k,w(k)) \tag{6.3-2}$$
$$r(k+1)=h(k,r(k)) \tag{6.3-3}$$

$$k\in N_+,\quad x\in R^n,\quad w\in R^m,\quad r\in R_+$$

$$R_+^n=\{x,x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\}$$

$x\geqslant y$ 表示 $x_i\geqslant y_i$, $i=1,2,\cdots,n$ $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 表示 $a_{ij}\geqslant 0,i,j=1,\cdots,n$。

这里 $f\in C[N_+\times R^n,R^n]$ $g\in C[N_+\times R_+^m,R_+^m]$

$h\in C[N_+\times R_+,R_+]$

$g(u,v)$关于 V 不减。

定义 6.3.1 称向量函数 $l(r)=(l_1(r),\cdots,l_m(r))\in K_mR$，若 $l(r)\in C[R_+,R_+^m]$，$l_i(0)=0$，$l_i(r)>0$，$r>0$，$l_i(r)\to\infty$，当 $r\to+\infty$，$i=1,2,\cdots,m$。

$\forall x_0\in R^n$，$w_0\in R_+^m$，$r_0\in R_+$，简记

$x(k)\overset{\text{def}}{=}x(k,k_0,x_0)$，$w(k)\overset{\text{def}}{=}w(k,k_0,w_0)$，$r(k)\overset{\text{def}}{=}r(k,k_0,r_0)$。

定理 6.3.1 若(6.3-1),(6.3-2),(6.3-3)式满足下列条件：

1) 存在 $V(k,x)\in C[N_+\times R^n,R_+^m]$，使得沿(6.3-1)式之解有

$$V((k+1),x(k+1))\leqslant g(k,V(k,x(k)))$$

2) 存在函数 $l(r)\in K_mR$，使得

$$g(k,l(r))\leqslant l(h(k,r))\qquad r\in[0,r^*]$$

其中 $r^*>0$ 是某常数或 $+\infty$。

3) 当 $(k_0,r_0)\in N_+\times[0,r^*]$时有

$$r(k,k_0,r_0)\in[0,r^*]\qquad k\in N_+$$

则当 $0\leqslant V(k_0,x_0)\leqslant w_0\leqslant l(r_0)$时有

$$V(k,x(k,k_0,x_0))\leqslant w(k,k_0,w_0)\leqslant l(r(k,k_0,r_0))$$
$$k\in N_+$$

证：用归纳法证之，显然当 $k=k_0$ 时有

$$V(k_0,\boldsymbol{x}_0) \leqslant w_0 \leqslant l(r_0)$$

设 $V(k,\boldsymbol{x}(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant w(k,k_0,w_0) \leqslant l(r(k,k_0,r_0))$

$$(6.3\text{-}4)$$

由(6.3-4)式和条件1)～3)及 $g(u,V)$ 关于 V 的不减性知

$$V(k+1,\boldsymbol{x}(k+1,k_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant g(k,V(k,k_0,\boldsymbol{x}_0)) \leqslant g(k,w(k,k_0,w_0)) = w(k+1,k_0,w_0) \leqslant g(k,l(r(k,k_0,r_0))) \leqslant l(h(k,r(k,k_0,r_0))) = l(r(k+1,k_0,r_0))$$

故结论成立。

定理 6.3.2 若系统(6.3-1)～(6.3-3)式满足定理6.3.1的条件1)、2)且 $f(k,0)\equiv 0, g(k,0)\equiv 0, h(k,0)\equiv 0$，又存在函数 $\varphi_1(r),\varphi_2(r)\in K$ 使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant \|V(k,\boldsymbol{x})\| \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (6.3\text{-}5)$$

则(6.3-3)的零解一致稳定[一致渐近稳定]，蕴涵(6.3-1)式的零解一致稳定[一致渐近稳定]，又若比较原理中条件3)成立，则 $D^n(\boldsymbol{x})$ 是系统(6.3-1)式的吸引区域。

其中 $D^n(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}\in R^n \mid V(k,\boldsymbol{x}) < \sup\limits_{0\leqslant r<r^*} l(r) r \in N_+\}$

证：1)先证一致稳定性。

因 $l_i(0)=0, l_i(r)>0(r>0)$，连续，$\forall \varepsilon>0, \exists \varepsilon_1(\varepsilon)$，$\varepsilon_1(\varepsilon)<r^*$，使当 $0\leqslant r<\varepsilon_1(\varepsilon)$ 时有

$$\|l(r)\| < \varphi_1(\varepsilon) \qquad (6.3\text{-}6)$$

又因系统(6.3-3)的零解一致稳定，故对 $\varepsilon'_1(\varepsilon)$ 存在 $\delta_1(\varepsilon)$，$\delta_1(\varepsilon)\leqslant \varepsilon_1(\varepsilon)$，使当 $0\leqslant r_0<\delta_1(\varepsilon)$ 时有

$$r(k,k_0,r_0) < \varepsilon'_1(\varepsilon) \qquad k\in N_+ \qquad (6.3\text{-}7)$$

令 $\bar{\delta}_i(\varepsilon) = \sup\limits_{0\leqslant r<\varepsilon'_1(\varepsilon)} l_i(r) \qquad \delta_2(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\bar{\delta}_i(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) = \varphi_2^{-1}(\delta_2(\varepsilon))$

利用 $l(r)$ 连续性，由反证法易推知，存在某个 r_0，$0<r_0<\delta_1(\varepsilon)$，使得

$$\delta_2(\varepsilon) \leqslant l_i(r_0) \leqslant \bar{\delta}_i(\varepsilon) \qquad i=1,2,\cdots,m$$

取 $V(k_0, \boldsymbol{x}_0) \equiv w_0$,故当 $\| \boldsymbol{x}_0 \| \leqslant \delta(\varepsilon)$,必有

$$V(t_0, \boldsymbol{x}_0) = w_0 < l(r_0)$$

从而由(6.3-7)式和比较定理 6.3.1 可推知

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x}(k, k_0 \boldsymbol{x}_0) \| &\leqslant \varphi^{-1}(\| V(k, \boldsymbol{x}(k, k_0, \boldsymbol{x}_0) \|) \\ &\leqslant \varphi^{-1}(\| w(k, k_0, w_0) \|) \\ &\leqslant \varphi^{-1}(\| l(r(k, k_0, r_0)) \|) < \varepsilon \quad k \in N_+ \end{aligned}$$

即证得(6.3-1)式的零解一致稳定。

2)次证一致渐近稳定。

$\forall \varepsilon > 0$ 沿用(6.3-6)式,因系统(6.3-3)式的零解一致渐近稳定,故对 $\delta'(\varepsilon)$, $\exists \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_1(\varepsilon) \leqslant \varepsilon_1(\varepsilon)$ 和 $T_1(\varepsilon)$,使当 $0 \leqslant r_0 < \delta_1(\varepsilon)$时,有

$$r(k, k_0, r_0) < \varepsilon'(\varepsilon) \qquad k \in [k_0 + T_1(\varepsilon), +\infty] \tag{6.3-8}$$

$$r(k, k_0, r_0) < r^* \qquad k \in [k_0 + k_0 + T_1(\varepsilon)] \tag{6.3-9}$$

与 1)证一致稳定的证法同,由(6.3-6)、(6.3-8)、(6.3-9)式和比较定理 6.3.1 可推知,当 $\| \boldsymbol{x}_0 \| < \delta(\varepsilon)$时有

$$\| \boldsymbol{x}(k, k_0, r_0) \| < \varepsilon \qquad k \in [k_0 + T'(\varepsilon), +\infty]$$

故系统(6.3-1)的平凡解一致渐近稳定。

3)证 $D^n(\boldsymbol{x})$为吸收区域,$\forall \boldsymbol{x}_0 \in D^n(\boldsymbol{x})$,存在 r_0,$0 \leqslant r_0 < r^*$ 使得 $V(t_0, \boldsymbol{x}_0) \leqslant l(r_0)$可选取 $V(t_0, \boldsymbol{x}_0) = w_0$,由比较定理 6.3.1 知

$$\lim_{k \to \infty} \| \boldsymbol{x}(k, k_0, \boldsymbol{x}_0) \| \leqslant \varphi_1^{-1}(\lim_{k \to \infty} \| l(r(k, k_0, r_0)) \|) = 0$$

即证得 $D^n(\boldsymbol{x})$为系统(6.3-1)式的吸收区域。

定理 6.3.3 若系统(6.3-1)、(6.3-2)满足比较定理 6.3.1 的条件 1),$f(k,0) \equiv g(k,0) \equiv 0$,又满足:

1)存在常数 $b \geqslant 1$ 使得

$$\| \boldsymbol{x} \| \leqslant \| V(k, \boldsymbol{x}) \| \leqslant b \| \boldsymbol{x} \|$$

2)存在向量函数 $l(r) = \mathrm{col}(c_1 r, \cdots, c_m r)$使得

$$g(k, l(r)) \leqslant l(ar) r \in [0, r^*]$$

其中 $c_i > 0$, $0 < \alpha < 1$ 为常数,$r^* > 0$ 是某常数,则系统(6.3-

1)式的平凡解在 $D^n(x)$ 内指数稳定。其中

$$D^n(x)=\{x\in R \mid V_i(k,x)<c_i r^* \quad k\in N_+ \quad i=,2,\cdots,m\}$$

证:取系统(6.3-3)式中 $h(k,r)=\alpha r$，故(6.3-3)式的解满足比较定理条件3),且

$$r(k,t_0,r_0)=\alpha^k r_0 \qquad k\in N_+ \tag{6.3-10}$$

令 $\beta_1=l_n\frac{1}{2}/T_m \qquad k-k_0\leqslant kT_m$ 　　则由(6.3-10)知当 $r_0\geqslant 0$ 　有

$$r(k,k_0,r_0)\leqslant r_0 e^{-\beta_1(k-k_0)} \qquad k\in N_+$$

$\forall x_0\in D^n(x)$ 令 $w_0=V(t_0,x_0) \qquad r_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}V_i(t_0,x_0)/c_i$

则 　$0\leqslant r_0<r^*$

$$0\leqslant V(t_0,x_0)=w_0\leqslant l(r_0)$$

令 $M=[\sum\limits_{i=1}^{m}c_i b/\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}c_i]\geqslant 1$ 　故比较定理推得

$$\|x(k,k_0x_0)\|\leqslant\|V(k,x(k,k_0,x_0))\|\leqslant\|l(r(k,k_0,r_0))\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}c_i r_0 e^{-\beta_1(k-k_0)}\leqslant\sum_{j=1}^{m}c_i\sum_{i=1}^{m}V_i(t_0,x_0)/c_i e^{-\beta_1(k-k_0)}$$

$$\leqslant M\|x_0\|e^{-\beta_1(k-k_0)} \qquad M\text{ 为某正常数。}$$

即(6.3-1)的平凡解在 $D^n(x)$ 内指数稳定。

注 　若 $g(k,w)=AW$ 　(A 为 $m\times m$ 非负常数矩阵),则定理6.3.3的条件2),成立的充要条件是:A 的谱半径 $\rho(A)<1$ 且可取 $r^*=+\infty$。

如果在系统(6.3-2)中取 $g(k,w)=AW+\bar{g}(w)$,其中 $A=(a_{ij})_{m\times m}$ 为非负常数矩阵,$\bar{g}=\mathrm{col}(\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m)$,$w=\mathrm{col}(w_1,\cdots,w_m)$,$\bar{g}_i=\sum\limits_{j=i}^{p}b_{ij}(\prod\limits_{s=1}^{m}w_s^{a_{ij}^{(k)}})$,$b_{ij}\geqslant 0$,$a_{ij}^{(s)}\geqslant 0$ 是常数 　($i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,p$, $s=1,2,\cdots,m$)。

利用定理6.3.3可得推论6.3.1。

推论6.3.1 　若(6.3-1)式满足条件:

1) 存在函数 $V(k,\boldsymbol{x})\in C[N_+\times R^n, R_+^m]$,正数 $\eta\geqslant 1$ 使得

$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\|V(k,\boldsymbol{x})\|\leqslant\eta\|\boldsymbol{x}\|$

$V(k+1,\boldsymbol{x}(k+1))\leqslant AV(k,\boldsymbol{x}(k))+\bar{g}(V(k,\boldsymbol{x}(k)))$

2) 存在一组正数 $\mu_1,\cdots,\mu_m$,使得

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mu_j+\sum_{j=1}^{p}b_{ij}\left(\prod_{s=1}^{m}\mu_s^{a_{ij}^{(s)}}\right)<\mu_i\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

则有结论:

1)当 $\sum\limits_{s=1}^{m}a_{ij}^{(s)}=1\qquad i=1,2,\cdots,m\qquad j=1,2,\cdots,p$

则(6.3-1)式的平凡解全局指数稳定。

2)若 $\sum\limits_{s=1}^{m}a_{ij}^{(s)}\geqslant 1\qquad i=1,2,\cdots,m\qquad j=1,2,\cdots,p$

则(6.3-1)式的平凡解在 $D^n(\boldsymbol{x})$ 内指数稳定。

$D^n(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid V_i(k,\boldsymbol{x})<\mu_i, d\in N_+, i=1,2,\cdots,m\}$

§4 离散系统稳定性代数判据[129]

Ляпунов 函数法、LaSalle 不变原理、比较原理虽然是研究离散系统稳定性的一般方法,但构造 V 函数、技巧性强,无一般规律可言。

本节根据系统本身的参数,给出一系列简便实用的代数判据,且给出吸收区域、衰减速度估计、离散动力系统的渐近稳定性、衰减速度、吸收区域与数值分析中的 Jacobi 迭代的收敛性、收敛速度、收敛区域类似,从而这些结果可用于数值分析。

先考虑定常线性离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)\qquad k=1,2,\cdots,\in N(\text{自然数})\qquad(6.4\text{-}1)$$

$\boldsymbol{x}=\mathrm{col}(\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_n)\in R^n\qquad A=(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 为常数矩阵。

以 $\rho(A)$ 表示 A 的谱半径,即 A 的特征值的模的最大值。

显然 $\boldsymbol{x}=0$ 是(6.4-1)式的零解。

定理 6.4.1 若 $\rho(A)=1$,则(6.4-1)的零解稳定的充要条件

是 A 的模为 1 的特征值只对应于 A 的简单的初等因子。

证:充分性。

设 $S^{-1}AS=J=\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2),\cdots,J_r(\lambda_r))$,$J$ 为 A 的 Jordan 标准型,不妨设 $J_1(\lambda_1)=\lambda_1,J_2(\lambda_2)=\lambda_2,\cdots,J_{r0}(\lambda_{r0})=\lambda_{r0},|\lambda_j|=1,1\leqslant j\leqslant r_0<r$,而当 $r_0\leqslant i\leqslant r$,有

$$J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}\quad |\lambda_i|<1$$

易证

$$J_i^m(\lambda_i)=$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2!}\lambda_i^{m-2} & \cdots\frac{m(m-1)\cdots(m-n_i+2)}{(n_i-1)!}\lambda_i^{m-n_i+1}\\ 0 & \lambda_i^m & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & m\lambda_i^{m-1}\\ 0 & 0 & \cdots\quad\cdots & \lambda_i^m\end{pmatrix}$$

$$(m\geqslant n_i-1) \tag{6.4-2}$$

故

$$x(t_m+1)=A^{m+1}x(t_0)=SJ^{m+1}S^{-1}x(0)$$

$$=S\begin{pmatrix}\lambda_1^{m+1} & 0,0, & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \lambda_{r_0}^{m+1} & & & \\ & & J_{r_0+1}^{m+1}(\lambda_{r_0+1}) & & \vdots\\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \cdots & J_r^{m+1}(\lambda_r)\end{pmatrix}S^{-1}x(0) \tag{6.4-3}$$

显然 $\|J_i^{m+1}(\lambda_i)\|\,(i=1,2,\cdots,r)$ 均有界,故存在正数 M,使 $\|J^{m+1}\|\leqslant M$ 对一切自然数成立。

$\forall\varepsilon>0$,令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\|S\|\ \|S^{-1}\|M}$,则当 $\|x(t_0)\|<\delta$ 时,对一切 m 有

$$\begin{aligned}\|x(t_{m+1})\| &\leqslant \|S\|\ \|S^{-1}\|\ \|J^{m+1}\|\ \|x(0)\| \\ &< \frac{\|S\|\ \|S^{-1}\|\ \|J^{m+1}\|}{\|S\|\ \|S^{-1}\|M}\varepsilon\leqslant\varepsilon\end{aligned}\qquad(6.4\text{-}4)$$

故(6.4-1)式的零解稳定。

必要性。用反证法,设 $|\lambda_1|=1$,A 对应于 λ_1 不具有简单初等因子,即

$$J_1(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_1\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

从而由(6.4-2)式有

$$J_1^n(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & m\lambda_1^{m-1}\cdots & \dfrac{m(m-1)\cdots(m-m_1+2)}{(m_1-1)!}\lambda_1^{m-m_1+1}\\ 0 & \lambda_1^m & \vdots\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0\ \cdots & \lambda_1^m\end{pmatrix}\qquad(6.4\text{-}5)$$

显然 $\|J^m\|\geqslant\|J_1^m(\lambda_i)\|\geqslant m\underset{m\to\infty}{\to}\infty$,从而与(6.1-1)式的平凡解稳定矛盾。

上面的证明也可看出,(6.4-1)式的零解指数稳定的充要条件为 $\rho(A)<1$,但此条件一般验证困难,人们在不断寻找 $\rho(A)<1$ 的充分条件。

下面给出 $\rho(A)<1$,从而(6.1-1)式平凡解指数稳定的充分条件,它几乎可包含目前所见到的许多充分条件,且可推出一系列新的充分条件。

令 $\quad |A|\overset{\text{def}}{=}(|a_{ij}|)_{n\times n},\ |x|\overset{\text{def}}{=}(|x_1|,\cdots,|x_n|)^T$

$$\| A \|_m \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{ij} |, \| A \|_l \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | \alpha_{ij} |,$$

$$\| A \|_E = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2$$

E 为单位矩阵,$\rho(|A|)$表$|A|$的谱半径。

定理 6.4.2 若矩阵$(E-|A|)$为 M 矩阵,则有 $\rho(A)<1$,从而(6.4-1)的零解指数稳定,衰减速度有估计式

$$| x(t_k) | \leqslant (I - | A |)^{-1} | A |^k | x(t_1) - x(t_0) | \tag{6.4-6}$$

证:先证 $\rho(A) \leqslant \rho(|A|)$ (6.4-7)

$\forall \varepsilon > 0$,令 $G = \dfrac{A}{\rho(|A|)+\varepsilon}$,则$|G| = \dfrac{|A|}{\rho(|A|)+\varepsilon}$

显然 $\rho(|G|)<1$,且$|G^k| \leqslant |G|^k$,由 $\rho(|G|)<1$ 可知

$$\lim_{k \to \infty} |G|^k = 0$$

从而 $\lim\limits_{k \to \infty} G^k = 0$ 故 $\rho(G)<1$

从而 $\rho(A) < \rho(|A|) + \varepsilon$

由 ε 的任意性有 $\rho(A) \leqslant \rho(|A|)$

其次证 $\rho(|A|)<1$,因$(E-|A|)$为 M 矩阵,由 M 矩阵的等价性知$(E-|A|)$的主对角线上元素全为正,且$(E-|A|)^{-1} \geqslant 0$,令 $\lambda(|A|)$为$|A|$的任意特征值,$x \neq 0$ 为对应的特征向量,故有

$$| \lambda(| A |) | | x | \leqslant | A | | x | \tag{6.4-8}$$

从而有

$$(E - | A |) | x | \leqslant (1 - | \lambda(| A |) |) | x | \tag{6.4-9}$$

$$\begin{aligned} | x | &\leqslant (E - | A |)^{-1}(1 - | \lambda(| A |) |) | x | \\ &\leqslant (1 - | \lambda(| A |) |)(E - | A) |^{-1} | x | \end{aligned} \tag{6.4-10}$$

因 $x \neq 0$ 且$(E-|A|)^{-1} \geqslant 0$,故有$|\lambda(|A|)|<1$,由于 $\lambda(|A|)$是$|A|$的任意特征值,故有

$$\rho(|A|) < 1 \qquad (6.4\text{-}11)$$

综合(6.4-6)与(6.4-11)式有 $\rho(A) \leqslant \rho(|A|) < 1$

衰减速度估计:

因 $$(I - |A|)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} |A|^n \geqslant 0$$

故 $$\sum_{n=0}^{k} |A|^n \leqslant (I - |A|)^{-1} \qquad \forall k \geqslant 1$$

$$|x(2) - x(1)| = |Ax(1) - Ax(0)| \leqslant |A||x(1) - x(0)|$$

$$|x(k) - x(k-1)| \leqslant |A||x(k-1) - x(k-2)|$$
$$\leqslant \cdots \leqslant |A|^k |x(1) - x(0)|$$

故 $$|x(k+m) - x(k)| \sum_{j=1}^{m} |x(k+1) - x(k+j-1)|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} |A|^j |x(k) - x(k-1)|$$
$$\leqslant (I - |A|)^{-1} |A||x(k) - x(k-1)|$$
$$\leqslant (I - |A|)^{-1} |A|^k |x(1) - x(0)|$$
$$k, m \geqslant 0$$

因 $\rho(|A|) < 1$,故$\{x(k)\}$为 Cauchy 序列,在上式中令 $m \to \infty$,便有

$$\| x(k) - 0 \| \leqslant (I - |A|)^{-1} |A|^k |x(1) - x(0)|$$

即(6.4-6)式成立。

定理 6.4.2 的条件虽然是构造性的,但当 n 充分大时,计算量仍很大,如何简便地估计 $\rho(A)$,也是计算数学中有趣的问题,下面恒设:$1 - |\alpha_{ii}| > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,推广对角占优条件,得到一系列保证定理 6.4.2 成立的充分条件。

推论6.4.1 若 $1 - |\alpha_{ii}| > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$,则下列条件之一,均是定理 6.4.2 条件成立的充分条件。

1) $$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|\alpha_{jj}|}{1 - |\alpha_{ij}|} \mu_i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|\alpha_{ij}|}{1 - |\alpha_{ij}|} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_i < 1 \quad (\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1)$$

特别地 $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1 \qquad i = 1,2,\cdots,n,$

$$2)\ 1 - |\alpha_{ll}| - \sum_{j=1}^{l-1} |\alpha_{lj}| \overset{\text{def}}{=} h_l > 0 \qquad l = 2,3,\cdots,n$$

$$h_1 \overset{\text{def}}{=} |\alpha_{11}|$$

其中 $\alpha_1^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{2\leqslant i\leqslant l} \frac{|\alpha_{il}|}{1 - |\alpha_{11}|}, \alpha_2^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \frac{|\alpha_{12}|}{1 - |\alpha_{22}|} \alpha_1^{(l)} + \max\limits_{3\leqslant i\leqslant l} \frac{|\alpha_{i2}|}{1 - |\alpha_{22}|}$

$$\alpha_l^{(l)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{l-1} \frac{|\alpha_{il}|}{1 - |\alpha_{ll}| - h_l} \alpha_i^{(l)} \sum_{j=1}^{l} \alpha_j^{(l)} < 1 \quad l = n, n-1, \cdots, 2$$

$$3) \quad 1 - |\alpha_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{|\alpha_{ij}| + |\alpha_{ji}|}{2} > 0 \quad j = 1,2,\cdots,n$$

考虑非线性自治离散动力系统的稳定性、吸收区域、衰减速度。

设 $$x(k+1) = F(x(k)), F(0) = 0 \qquad (6.4\text{-}12)$$

$$x \in R^n, F \in C[R^n, R^n]$$

定理6.4.3 设(6.4-12)式右端在 $D: \| x \| < H$ 内[在整个 R^n 内]满足:

1) 存在 $n \times n$ 非负矩阵 $A(\alpha_{ij})_{n\times n}$ 使 $\forall x, y \in D[\in R^n]$ 有

$$|F(x) - F(y)| \leqslant A|x - y|$$

2) $\rho(A) < 1$

则当 $\rho(A) < 1$, 特别地 $\| A \| < 1$, (6.4-12)式的零解指数稳定[全局指数稳定]。

设 $A = SJS^{-1}$, $\| J^m \| \leqslant k$, 则吸收区域有估计式

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \left\{ x: | \ \| x \| \leqslant \frac{H}{\| S \| \ \| S^{-1} \| k} \right\}$$

衰减速度有估计式

$$|x(k)| \leqslant (I - A)^{-1} A^k |x(1) - x(0)|$$

当 $\rho(A) = 1$, 且对应 A 的模为 1 的特征值只有简单初等因子, 则(6.4-12)式的零解稳定。

证: 设 $\rho(A) < 1, A = SJS^{-1}$, 故对一切自然数 n, 存在常数

$k>0$,使 $\| J^m \| \leqslant k$。

$$|x(m+1)| \leqslant A|x(m)| \leqslant A^2|x(m+)| \leqslant \cdots \leqslant A^{m+1}|x(0)|$$
$$= SJ^{m+1}S^{-1}|x(0)|$$

$\forall \varepsilon>0, 0<\varepsilon<H$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\| S \| \| S^{-1} \| k}$,故当 $\| x(0) \| < \delta$ 有

$$\| x(n+1) \| \leqslant \| S \| \| J^{m+1} \| \| S^{-1} \| \| x(t_0) \| < \delta$$
$$\leqslant \| S \| \| J^{m+1} \| \| S^{-1} \| \frac{\varepsilon}{\| S \| \| S^{-1} \| k} = \varepsilon$$

故(6.4-12)式的零解稳定。

因 $\rho(A)<1$,故有

$$0 \leqslant \lim_{m \to \infty} | x(m+1) | \leqslant \lim_{m \to \infty} SJ^{m+1}S | x(0) = 0$$

且是指数型衰减的,故(6.4-12)的平凡解指数稳定。

吸收区域估计

$$\| x(m+1) \| \leqslant \| S \| \| J^{m+1} \| \| S^{-1} \| \| x(0) \|$$
$$\leqslant \| S \| \| S^{-1} \| kH(\| S \| \| S^{-1} \| k)^{-1} = H$$

故 $x(t_m)$对一切自然称 t_m,仍在基本区域 $D: \| x \| < H$ 内,当

$$\| x(0) \| \leqslant \frac{H}{\| S \| \| S^{-1} \| K}$$

$$\lim_{m \to \infty} | x(m+1) | \leqslant S \lim_{m \to \infty} J^m S^{-1} | x(0) | = 0$$

从而吸收区域为

$$\mathscr{D} \overset{\text{def}}{=} \left\{ x | : \| x \| \leqslant \frac{H}{\| S \| \| S^{-1} \| k} \right\}$$

关于衰减速度估计可仿定理6.4.2进行。

当 $\rho(A)=1$,且对应 A 的模为1的特征值只有简单初等因子,则(6.4-12)式平凡解稳定的证明可仿定理6.4.1进行,略。

在(6.4-6)或(6.4-12)中,当 n 充分大,称为离散大系统,此时,计算 $\rho(A)$便很困难,故可考虑用分块矩阵的度量性质对大系统进行分块降维处理,例如在(6.4-12)式中,令

$$x_i = \text{col}(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}), \ | x_i | = \text{col}(x_1^{(i)}, \cdots, | x_{n_i}^{(i)} |)$$

$$i = 1,2,\cdots,r$$

$$F_i = \mathrm{col}(f_1^{(i)},\cdots,f_{n_i}^{(i)})$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_r \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & \vdots & A_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1}, & \vdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

$\| \boldsymbol{x} \| = \mathrm{col}(\| \boldsymbol{x}_1 \|,\cdots,\| \boldsymbol{x}_r \|)$　　　　表示 $\| \boldsymbol{x} \|$ 的范数。

定理 6.4.4　设(6.4-12)式在 $D:\| \boldsymbol{x} \| < H$ 内[在 R_n]满足:

1) 存在 $n \times n$ 非负矩阵 $A(a_{ij})$ 使　$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in D[\in R^n]$

$$| F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y}) | \leqslant A | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} |$$

2) $A_{ij} \leqslant q_{ij}(i,j=1\cdots r)$

则当 $\rho(Q(q_{ij}))<1$[特别 $\| Q \| < 1$],(6.4-12)式的零解指数稳定[全局指数稳定]。

设 $Q = SJS^{-1}$, $\| J^n \| \leqslant M$(J 为 Q 的 Jordan 标准型),则有吸收区域

$$\mathscr{D}_1 \overset{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{x} \mid \| \boldsymbol{x} \| \leqslant \frac{H}{\| S \| \| S^{-1} \| M} \right\}$$

衰减速度估计

$$\| \boldsymbol{x}(k) \| \leqslant (I - Q)^{-1} Q^k \| \boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{x}(0) \| \quad (6.4\text{-}13)$$

当 $\rho(Q(q_{ij}))=1$ 且 Q 的模为 1 的特征值只对应简单初等因子,则(6.4-13)式零解稳定。

证:　设 $\rho(Q)<1$,则有

$$|\boldsymbol{x}(k+1)| \leqslant A |\boldsymbol{x}(k)| \leqslant A^2 |\boldsymbol{x}(k-1)| \leqslant \cdots \leqslant A^k |\boldsymbol{x}(0)|$$

$$\| \boldsymbol{x}(k+1) \| \leqslant Q^k \| \boldsymbol{x}(0) \| = SJ^kJ^{-1} \| \boldsymbol{x}(0) \|$$

$\forall \varepsilon < 0;0 < \varepsilon < H$,取 $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{\| S \| \| S^{-1} \| M}$,故当 $\| \boldsymbol{x}(0) \| < \varepsilon$ 时,有

$$\| \boldsymbol{x}(k+1) \| \leqslant \| S \| \| J_k \| \| \boldsymbol{x}(0) \|$$

$$\leqslant \|S\| \|J^k\| \|S^{-1}\| \frac{\varepsilon}{\|S\| \|S^{-1}\| M} \leqslant \varepsilon$$

故(6.4-13)式的零解稳定。

$$\lim_{n\to\infty} \|x(n+1)\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|S\| \|J^n\| \|S^{-1}\| \|x(0)\| = 0$$

且是指数型衰减的,故(6.4-13)式平凡解指数稳定。

吸收区域

$$\|x(m+1)\| \leqslant \|S\| \|J^{m+1}\| \|S^{-1}\| \|x(0)\|$$

$$\leqslant \|S\| \|S^{-1}\| \frac{MH}{\|S\|} (\|S^{-1}\| M)^{-1} = H$$

故 $x(t_{m+1})$仍在基本区域 $\|x\| \leqslant H$ 内,且对一切 m,$x(m)\to 0$。

故吸收区域为 $\mathscr{D}_1 : x < \dfrac{H}{\|S\| \|S^{-1}\| M}$

衰减速度估计可仿定理 6.4.2 证得。

$$\|x(k+m) - x(k)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|x(k+j) - x(k+j-1)\|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|Q^j\| \|x(k) - x(k-1)\|$$

$$\leqslant (I - \|Q\|)^{-1} \|Q\| \|x(k) - x(k-1)\|$$

$$\leqslant (I - \|Q\|)^{-1} \|Q^k\| \|x(1) - x(0)\| \qquad k, m \geqslant 0$$

令 $m\to\infty$便有

$$\|x(k)\| \leqslant (I - Q)^{-1} Q^k \|x(1) - x(0)\|$$

当 $\rho(Q)=1$,模为 1 的特征值只对应简单的初等因子。

设 $Q = SJS^{-1}$,故对一切 n 存在 $M_1 > 0$,使 $\|J^n\| \leqslant M$。

$\forall \varepsilon > 0$,令 $\delta = \dfrac{\delta}{\|S\| \|S^{-1}\| M_1}$ 则当 $\|x(0)\| < \delta$ 时,

有

$$x(m+1) \leqslant \|S\| \|J^{m+1}\| \|S^{-1}\| \|x(0)\|$$

$$< \frac{\|S\| \|J^{m+1}\| \|S^{-1}\|}{\|S\| \|S^{-1}\| M_1} \varepsilon = \varepsilon$$

故(6.4-13)式的零解稳定。

例 考虑自治系统

$$x_1(n+1)=\sin\frac{x_1(n)}{2}+\cos\frac{x_2(n)}{2}-1\stackrel{\text{def}}{=}f_1(x_1(n),x_2(n))$$

$$x_2(n+1)=\frac{1}{3}\sin x_1(n)+\frac{1}{2}\cos x_2(n)-\frac{1}{2}\stackrel{\text{def}}{=}f_2(x_1(n),x_2(n))$$

(6.4-14)

显然 $$f_1(0,0)=f_2(0,0)=0$$

$$\left|\sin\frac{x_1(n)}{2}+\cos\frac{x_2(n)}{3}-\sin\frac{y_1(n)}{2}-\cos\frac{y_2(n)}{3}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left|x_1(n)-y_1(n)\right|+\frac{1}{3}\left|x_2(n)-y_2(n)\right|$$

$$\left|\frac{1}{3}\sin x_1(n)+\frac{1}{2}\cos x_2(n)-\frac{1}{3}\sin y_1(n)-\frac{1}{2}\cos y_2(n)\right|$$

$$<\frac{1}{3}\left|x_1(n)-y_1(n)\right|+\frac{1}{2}\left|x_2(n)-y_2(n)\right|$$

而 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad\|A\|_m=\|A\|_l=\frac{5}{6}<1\quad\|A\|_E=\frac{13}{18}<1$

故 $\rho(A)<1$

故(6.4-14)式零解全局指数稳定。

§5 实方阵 Schur 稳定的几何充要条件

从上面各节可以看出,在离散动力系统中,判定矩阵 A 的谱半径$\rho(A)<1$ 极为重要,若 $\rho(A)<1$,则称 $A(a_{ij})_{n\times n}$是 Schur 稳定的。

通常是对 A 的特征多项式

$$f_n(z)=\det(A-zE)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

(6.5-1)

进行双线性变换

$$z = \frac{w+1}{w-1} \tag{6.5-2}$$

化(6.5-1)式为

$$F_n(w) = w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n \tag{6.5-3}$$

熟知变换(6.5-2)式把 z 复平面上的单位圆内映射成 w 复平面的左半平面,因而把验证 $f_n(z)$ 的 Schur 稳定性变为验证 $F_n(w)$ 的 Hurwitz 稳定(即 $F_n(w)$ 仅有负实部零点),而判定 $F_n(w)$ 的 Hurwitz 稳定性有 Hurwitz 代数充要条件及 Михойлов、Niquist 几何充要条件,然而将(6.5-1)式代为(6.5-3)式本身就相当复杂,传统的几何充要条件要验证多项式(6.5-3)式的自变量 w 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化引起 $F_n(w)$ 的幅角变换情况,证明很繁,验证不便。

这里介绍直接根据(6.5-1)式判定 $f_n(z)$ 的 Schur 稳定的十分简洁的几何充要条件。

先在复平面上作单位半圆 $A(1,0)$, $B(0,i)$, $C(-1.0)$,(图 6-1)以 $\Phi \overset{\text{def}}{=} \underset{ABC}{\triangle} \operatorname{Arg} f_n(z)$ 表 $f_n(z)$ 当 z 沿 $\overset{\frown}{ABC}$ 从 A 点经 B 点到 C 点时幅角的增量(见图 6-1),则有如下定理。

定理 6.5.1 设 $f_n(z)$ 在单位圆上没有零点,则

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \underset{ABC}{\triangle} \operatorname{Arg} f_n(z) = k\pi$$

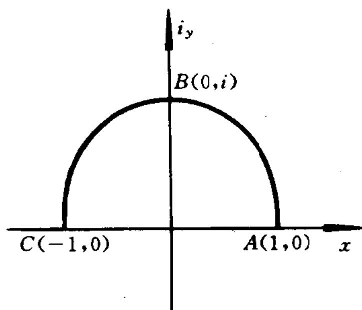


图 6-1

当且仅当 $k=n$，$f_n(z)$的有零点在单位圆 $\| z \| < 1$ 内，从而 A 为 Schur 稳定的；当且仅当 $0 \leqslant k < n$，$f_n(z)$有 $n-k$ 个零点在单位圆 $\| z \| < 1$ 外。

证：设 $f_n(z)$有 $2p$ 个复零点 $z_j, \overline{z}_j (j=1,2,\cdots,p)$，$q$ 个实零点 $r_k (k=1,2,\cdots,q)$，每个零点按重数计算，则

$$2p + q = n$$

将 $f_n(z)$分解为线性因子乘积，即

$$f_n(z) = \prod_{j=1}^{p} (z - z_j)(z - \overline{z_j}) \prod_{s=1}^{q} (z - r_s)$$

因此

$$\begin{aligned}\Phi = \underset{ABC}{\triangle} \operatorname{Arg} f_n(z) &= \sum_{j=1}^{p} \underset{ABC}{\triangle} [\operatorname{Arg}(z - z_j)] \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \underset{ABC}{\triangle} [\operatorname{Arg}(z - \overline{z_j})] \\ &+ \sum_{s=1}^{q} \underset{ABC}{\triangle} [\operatorname{Arg}(z - r_s)]\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2m\pi \quad (m=1,2,\cdots)$为多值连续函数 $\arg z + 2m\pi, \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi)$的分枝。为确定计，当 $z=1$，上式各项的幅角都取它们的主值。

设 r_{s_0}为 $f_n(z)$的任意实零点，且 $|r_{s_0}| < 1$，如图 6-2 所示，无论 r_{s_0}为正为负，恒有 $\underset{\widehat{ABC}}{\triangle} \operatorname{Arg}(z - r_{s_0}) = \pi - 0 = \pi$。

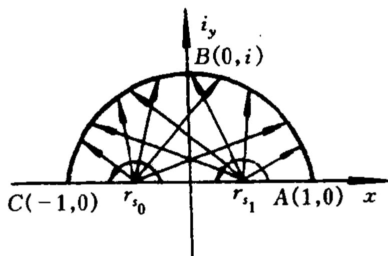


图 6-2

设 z_{j0}，$\overline{z}_{j0}$为单位圆内的任意两共轭零点，考查因子 $z - z_{j_0}$，

$z-\overline{z_{j_0}}$沿$\overset{\frown}{ABC}$幅角的增量,如图 6-3 所示,利用对称性及三角形$\triangle Az_jC$,与$\triangle A\,\overline{z_j}C$ 全等,可证:

$$\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-z_{j0})+\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-\overline{z_{j0}})=2\pi-\theta+\theta=2\pi$$

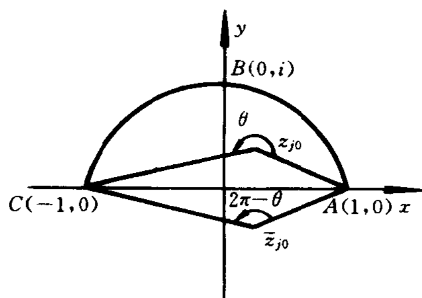


图 6-3

设 r_{s_1}为 $f_n(z)$的单位圆外的任意实零点,考查因子$(\lambda-r_{s_1})$沿$\overset{\frown}{ABC}$幅角的变化,如图 6-4 所示,无论 $r_{s_1}>1$ 或 $r_{s_1}<-1$ 都有

$$\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-r_{s_1})=0$$

设 $z_1,\overline{z_1}$为 $f_n(z)$在单位圆外的任意两共轭零点,考查因子$(z-z_1)$、$(z-\overline{z_1})$沿$\overset{\frown}{ABC}$的幅角的变化,如图 6-5(a)、(b)所示,利用对称性及$\triangle Az_1c\cong\triangle A\,\overline{z_1}c$ 可证:

$$\triangle\text{Arg}(z-z_1)+\triangle\text{Arg}(z-\overline{z_1})=-\theta+\theta=0$$

由于这些零点的任意性,故有结论

$$\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-z_j)+\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-\overset{\frown}{z_j})=\begin{cases}2\pi & |z_j|<1\\ 0 & |z_j|>1\end{cases}$$

$$\underset{\overset{\frown}{ABC}}{\triangle}\text{Arg}(z-z_{s_0})=\begin{cases}\pi & |z_{s_0}|<1\\ 0 & |z_{s_0}|>1\end{cases}$$

从而定理 6.5.1 的结论成立。

有时,不仅希望得到 A 的 Schur 稳定性,还希望进一步知道其稳定度,即不满足仅知道 $\rho(A)<1$,还希望有更精确的估计

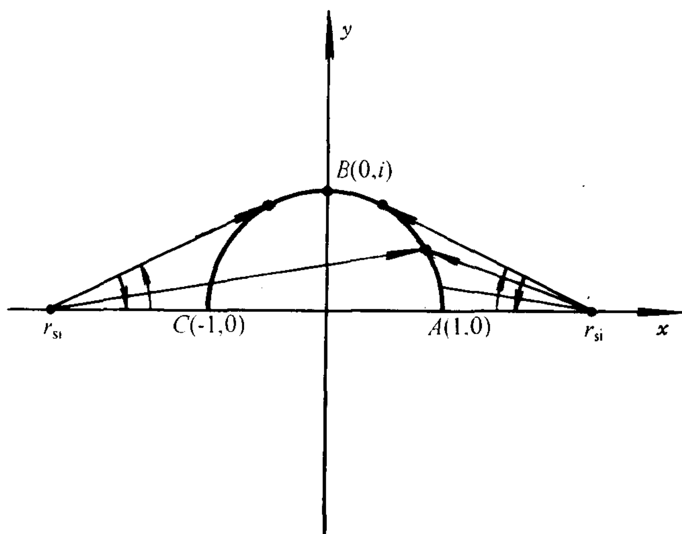


图 6-4

$\rho(A) \leqslant \lambda < 1$。

为此，在(6.5-1)式作变换 $z = \lambda\xi$，则(6.5-1)式变为

$$g_n(\xi) = \lambda^n \xi^n + a_1 \lambda^{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + a_n$$

故 $f_n(z)$的零点在圆 $\| z \| < \lambda$ 内，当且仅当 $g_n(\xi)$的零点在单位圆内，因而有定理 6.5.2。

定理 6.5.2 设 $f_n(z)$在圆 $\| \xi \| = \lambda$ 上没有零点，则 $f_n(z)$的零点在 $\| z \| \leqslant \lambda < 1$ 内，当且仅当

$$\overline{\Phi} \overset{\text{def}}{=} \underset{\widehat{ABC}}{\triangle} \operatorname{Arg} g_n(\xi) = n\pi$$

证：可仿定理 6.5.1 证之，略。

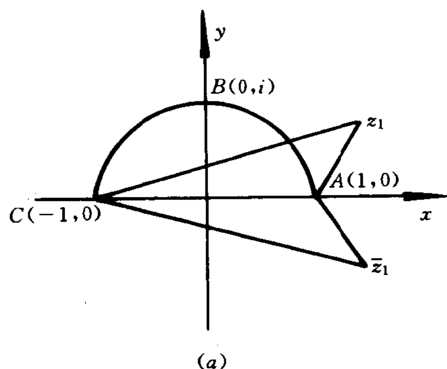
下面看两个实例。

例 1　已知一离散线性控制系统，其闭环特征方程为

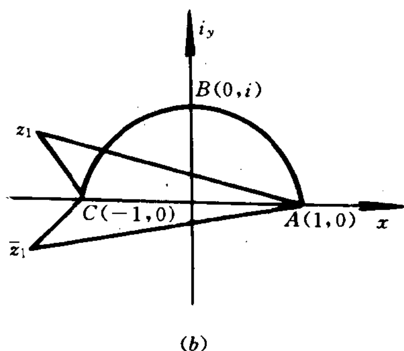
$$f_4(z) = z^4 - 1.368z^3 + 0.4z^2 + 0.08z + 0.002 = 0$$

试判定 $f_4(z)$的 Schur 稳定性。

证：
$$\begin{aligned} f_4(e^{i\theta}) &= e^{i4\theta} - 1.368e^{i3\theta} + 0.4e^{i2\theta} + 0.08e^{i\theta} + 0.002 \\ &= \cos 4\theta - 1.368\cos 3\theta + 0.4\cos 2\theta + 0.08\cos\theta \end{aligned}$$



(a)



(b)

图 6-5

$$+0.002+i(\sin 4\theta-1.368\sin 3\theta+0.4\sin 2\theta$$

$$+0.08\sin\theta)\overset{\text{def}}{=}u(\theta)+iv(\theta)$$

列表如下(查三角函数表):

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$u_{(\theta)}$	0.114	0.038	0.126	−0.233	−0.125	0.229	0.71	1.081	1.09	0.602
$v_{(\theta)}$	0	0.109	0.085	−0.116	−0.397	−0.571	−0.450	0.031	0.757	1.448
θ	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	
$u_{(\theta)}$	−0.306	−1.589	−2.106	−2.24	−1.614	−0.367	−1.091	−2.249	2.69	
$v_{(\theta)}$	1.769	1.487	0.589	−0.693	−1.852	−2.540	−2.424	−1.449	0	

在 u、v 平面上 $f_4(e^{i\theta})$的轨迹示意如图 6-6 所示。

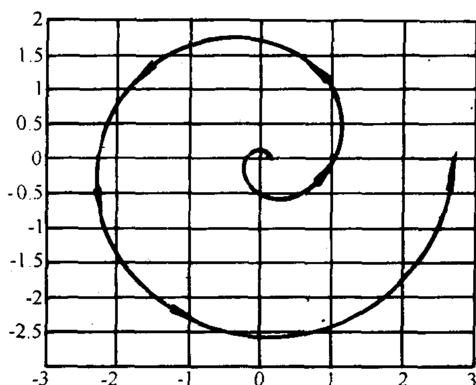


图 6-6

$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \underset{ABC}{\triangle}\text{Arg}\ f_4(z)=4\pi$　　　故 $f_4(z)$Schur 稳定。

例 2　设某离散线性控制系统,闭环特征方程为

$$f_4(z) = z^4 - 0.1z^3 - 0.03z^2 - 0.009z - 0.0108$$

试证　　$f_4(z)$的零点全在 $\| z \| < \frac{1}{2}$内。

证:令　$g_4(\xi) = (0.5)^4\xi^4 - 0.1 \times (0.5)^3\xi^3$

$$- 0.03 \times (0.5)^2\xi^2 - 0.009 \times 0.5\xi - 0.0108$$

$$= 0.0625\xi^4 - 0.0125\xi^3 - 0.0075\xi^2$$

$$- 0.0045\xi - 0.0108 g_4(e^{i\theta})$$

$$g_4(i\theta) = 0.0625\cos4\theta - 0.0125\cos3\theta - 0.0075\cos2\theta$$

$$- 0.0045\cos\theta - 0.0108 + i(0.0625\sin4\theta$$

$$- 0.0125\sin3\theta - 0.0075\sin2\theta - 0.0045\sin\theta)$$

$$= \hat{u}(\theta) + i\hat{v}(\theta)$$

在(u,v)平面上参数曲线 $g_4(e^{i\theta})$如图 6-7 所示。

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \underset{ABC}{\triangle}\text{Arg}\ g_4(\xi)=4\pi$$

故 $f_4(z)$的零点在 $\| z \| \leqslant \frac{1}{2}$内。

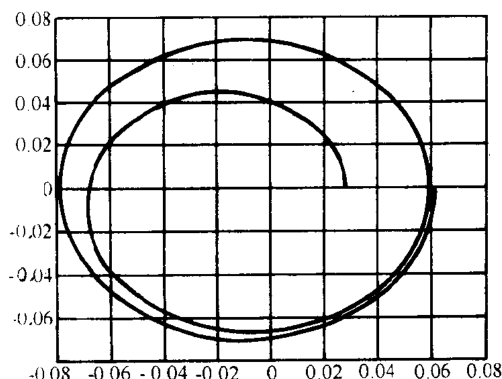


图 6-7

§6 离散型 Лурье 控制系统绝对稳定性[128]

众所周知,用常微分方程描述的 Лурье 控制系统绝对稳定性的研究,已有 40 余年的历史,用微分差分方程、泛函微分方程描述的 Лурье 控制系统的绝对稳定性,也有不少研究,得到了绝对稳定的充分条件,但对于离散型 Лурье 控制系统的研究很少。

本节考虑下列离散型 Лурье 控制系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + hf(\sigma(k)) \\ \sigma = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(k) \end{cases} \tag{6.6-1}$$

的绝对稳定性。

这里 $\boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n)$, $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{h} = \mathrm{col}(h_1, \cdots, h_n)$。分别为常矩阵和常向量。

令 $F \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{f}(\sigma): (\boldsymbol{f}(0) = 0, \sigma\boldsymbol{f}(\sigma) > 0, \sigma \neq 0, \boldsymbol{f}(\sigma) \in C(-\infty, +\infty))\}$

$F^* \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{f}(\sigma): (\boldsymbol{f}(0) = 0; 0 \leqslant k_1 \leqslant \frac{\boldsymbol{f}(\sigma)}{\sigma} \leqslant k_2 < \infty)\}$

$\sigma \neq 0, \boldsymbol{f}(\sigma) \in C(-\infty, +\infty)$

其中 k_1、k_2 为非负常数，$N=\{1,2,\cdots\}$。

我们先将(6.6-1)式通过满秩线性变换变为变量分离的非线性系统，引进部分变元绝对稳定的概念，得到(6.6-1)式绝对稳定的充要条件，进而得到一些绝对稳定的简便充分条件。

为不失一般性，不妨设 $c_n\neq0$，有

$$Q \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ c_1, & c_2, & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix} \tag{6.6-2}$$

对(6.6-1)式作非奇异线性变换

$$\xi = Qx$$

这里 $\quad \boldsymbol{\xi} = \operatorname{col}(\xi_1,\cdots,\xi_n) \qquad \boldsymbol{x} = \operatorname{col}(x_1,\cdots,x_n) \quad (6.6\text{-}3)$

则(6.6-1)式变为

$$\xi(k+1)=QAQ^{-1}\xi(k)+Qhf(\xi_n(k))\overset{\text{def}}{=}\widetilde{A}\xi(k)+\tilde{h}f(\xi_n(k)) \tag{6.6-4}$$

这里 $\widetilde{A}=(\tilde{\alpha}_{ij})_{n\times n} \qquad \tilde{h}=Qh$

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \left(\alpha_{ij}-\frac{\tilde{\alpha}_{ij}}{c_n}c_j\right) \quad (i,j=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\tilde{\alpha}_{in} = \frac{\alpha_{in}}{c_n} \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\tilde{\alpha}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_{ij} - \sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\alpha_{in}}{c_n}c_j \quad (j=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\tilde{\alpha}_{nn} = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_{in}/c_n \quad \tilde{h}_i = h_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1)\ \tilde{h}_n = \sum_{i=1}^{n} c_ih_i$$

定义6.6.1 若 $\forall f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$，(6.6-1)式的零解全局稳定，则称(6.6-1)式的零解相对于 $F[F^*]$ 绝对稳定。

定义 6.6.2 若 $f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$，(6.6-4)式的零解关于部分变元 $\xi_j,\cdots,\xi_n(1<j\leqslant n)$ 全局稳定，则称(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 关于部分变元 $\xi_j,\cdots\xi_n(1<j\leqslant n)$ 为绝对稳定。

显然,(6.6-1)式与(6.6-4)式的绝对稳定性等价,而(6.6-4)式中的每个 ξ_i 是独立的,变量是分离的。

定理 6.6.1 (6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$绝对稳定的充要条件是:1)矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$的谱半径$\rho(B)<1[B^*(b_{ij}^*)_{n\times n}$的谱半径$\rho(B^*)<1]$;2) (6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于部分变元 ξ_n 绝对稳定。

这里 $b_{ij}=\begin{cases}\tilde{\alpha}_{ij} & 1\leqslant i\leqslant n \quad 2\leqslant j\leqslant n-1\\ \tilde{\alpha}_{in}+\theta\tilde{h}_i & 1\leqslant i\leqslant n \quad j=n \quad \theta=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$

$$b_{ij}^*=\begin{cases}b_{ij}^* & 1\leqslant i\leqslant n \quad 1\leqslant j\leqslant n-1\\ \tilde{\alpha}_{in}+\tilde{h}_ik & 1\leqslant i\leqslant n \quad j=n \quad k\in[k_1,k_2]\end{cases}$$

证:仅仅证明相对于 F 的绝对稳定的充要条件,至于相对于 F^* 绝对稳定的充要条件的证明方法是类似的。

必要性:因为(6.6-4)式的零解相对于 F 绝对稳定,特别地相对于 F 关于部分变元ξ_n 绝对稳定,令 $f(\xi_n)=\xi_n$,则(6.6-4)式变为

$$\xi(k+1)=B\xi(k) \tag{6.6-5}$$

因(6.6-4)式的零解相对于 F 绝对稳定,故 $\rho(B)<1$,必要性获证。

充分性:$\forall f(\sigma)\in F$ 由常数变易法公式知(6.6-4)的任意非零解

$$\xi(k+1)\overset{\text{def}}{=}\xi(k+1,k_0,\xi_0)$$

满足

$$\xi(k+1)=B^{k+1}\xi(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k}B^{k-i}[\tilde{h}f(\xi_n(i))-\theta\tilde{h}\xi_n(i)] \tag{6.6-6}$$

$\forall\varepsilon>0$,因为 B^{k+1}有界,故可设

$$\|B^{k+1}\|\leqslant M=\text{const}$$

取 $\delta_1(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{3M}$,当 $\|\xi(k_0)\|<\delta_1$ 时,有

$$\| B^{k+1}\xi(k_0) \| \leqslant M\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad (6.6\text{-}7)$$

因为 $\xi_n(k) \to 0(k \to \infty)$，且 $f(\xi_n(k)) \to 0(k \to \infty)$，故存在 $k_1 > k_0$，使得

$$\| \sum_{i=k_1+1}^{p} B^{k-i}[\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta h\tilde{\xi}_n(i)] \| < \varepsilon/3 \qquad (6.6\text{-}8)$$

因(6.6-4)式的平凡解关于 ξ_n 绝对稳定，又易证非平凡解连续依赖于始值 $\xi(k_0)$，且 $f(\xi_n(k))$连续，故存在 $\delta_2(\varepsilon)$，当 $\| \xi(k_0) \| < \delta_2$，有

$$\| \sum_{i=k_0}^{k_1} B^{k_1-i}[\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta\tilde{h}\xi_n(i)] \| < \varepsilon/3$$

取 $\delta = \min(\delta_1(\delta), \delta_2(\delta))$ 当 $\| \xi(k_0) \| < \delta$ (6.6-9)

从(6.6-8)、(6.6-9)、(6.6-10)式，有

$$\| \xi(k+1) \| \leqslant \| B^{k+1}\xi(k_0) \| + \sum_{i=k_0}^{k_1} \| B^{k-i}\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta\tilde{h}\xi_n(i) \| + \sum_{i=k_1+1}^{k} \| B^{k-i}[\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta\tilde{h}\xi_n(i)] \| < \varepsilon$$

从而(6.6-4)式的零解相对于 F 稳定。

$\forall \xi(k_0) = \xi_0 \in R^n$，因为 $f(\xi_n(k)) \to 0(k \to \infty)$，故存在 $M_1 = \text{const} > 0$，使得

$$\| \tilde{h}f(\xi_n(k)) - \theta\tilde{h}\xi_n(k)) \| \leqslant M_1$$

由于 $\rho(B) < 1$，知存在 $M_2 = \text{const} > 0$，使得

$$\sum_{i=[k/2]}^{k} \| B^{k-i} \| \leqslant M_2$$

从而有

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \| \xi(k) \| \leqslant \lim_{k\to\infty} \| B^k\xi(k_0) \| + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{[k/2]} \| B^{k-i} \| \| [\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta\tilde{h}\xi_n(i)] \| + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=[k/2]+1}^{k} \| B^{k-i} \| \| [\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \theta\tilde{h}\xi_n(i)] \|$$

$$= 0 + M_1 \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k_0}^{k/2} \| B^{k-i} \|$$

$$+ M_2 \lim_{k\to\infty} \max_{[k/2]+1\leqslant i\leqslant k} \| \tilde{h} f(\xi_n(i) - \theta \tilde{h} \xi_n(i) \| = 0$$

故(6.6-4)式的零解是相对于 F 绝对稳定。

定理 6.6.2 (6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$绝对稳定的充要条件是:

1) 存在一个常向量 $\eta=\mathrm{col}(\eta_1,\cdots,\eta_n)$,使 $B_1(k_{ij_{n\times n}})$的谱半径 $\rho(B_1)<1$,这里

$$b_{ij} = \begin{cases} \tilde{\alpha}_{ij} & 1\leqslant i\leqslant n \quad 1\leqslant j\leqslant n-1 \\ \tilde{\alpha}_{in}+\eta_i & 1\leqslant i\leqslant n \quad j=n \end{cases}$$

2) (6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于 ξ_n 绝对稳定。

证:仅证相对于 F^* 绝对稳定的充要条件,因为相对于 F 的绝对稳定性的证明是类似的。

必要性:1) η 的存在性是显然的,例如:取 $\eta_i = k\tilde{h}_i(i=1,2,\cdots,n),k\in[k_1,k_2]$),即定理 6.6.1 的条件 1)成立。

3)(6.6-4)式的平凡解相对于 F^* 绝对稳定显然蕴涵关于 ξ_n 相对于 F^* 绝对稳定。

充分性: $\forall f(\sigma)\in F^*$,改写(6.6-4)式为

$$\xi(k+1) = B_1\xi(k) + [\tilde{h}f(\xi_n(k)) - \mathrm{diag}(\eta_1,\cdots,\eta_n)\mathrm{col}(\xi_n(k),\cdots,\xi_n(k))]$$

$$\xi(k+1) = B_1^{k+1}\xi(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k} B_1^{k-i}[\tilde{h}f(\xi_n(i)) - \mathrm{diag}(\eta_1,\cdots,\eta_n)\mathrm{col}(\xi_n(k),\cdots,\xi_n(k))]$$

仿定理 6.6.1 可证明定理 6.6.2。

注 定理 6.6.1 条件 1)是验证一个特定矩阵 B 是否 $\rho(B)<1$,当 $\rho(B)\geqslant1$,则(6.6-4)式的零解不是绝对稳定的;定理 6.6.2 是验证一个选择矩阵 B_1 是否 $\rho(B_1)<1$,但当 $\rho(B_1)\geqslant1$,一般不能断定(6.6-4)式的零解非绝对稳定,除非 $\eta=\alpha\tilde{h},\alpha\neq0$ 为纯量,希望适当选取 η,使验证 $\rho(B_1)<1$ 比验证 $\rho(B)<1$ 容易。

定理 6.6.3 (6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 绝对稳定的充要条件是：

1) (6.6-4)式的零解相对于 $[F^*]$ 关于 $\xi_n(1<j\leqslant n)$ 绝对稳定；

2) 定理 6.6.1 的条件 1)或定理 6.6.2 的条件 1)满足。

证:因为当条件 2)成立时,(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 绝对稳定,蕴涵零解相对于 $F[F^*]$ 关于 $\xi_{j0},\cdots,\xi_n$ 绝对稳定,特别地蕴涵零解相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ_n 绝对稳定;而由定理 6.6.1、6.6.2 知相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ_n 的绝对稳定性蕴涵关于全体变元 $\xi_j,\cdots,\xi_n$,特别是部分变元 $\xi_j,\cdots,\xi_n$ 相应的绝对稳定性。

从上可看出:绝对稳定性的问题焦点转化为关于部分变元,特别是一个变元的绝对稳定性,下面给出若干简便判据,令

$$\frac{f(\xi_n)}{\xi_n} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} g(\xi_n) & \xi_n \neq 0 \\ 0 & \xi_n = 0 \end{cases} \tag{6.6-10}$$

则(6.6-4)式可以改写为

$$\begin{aligned} \xi_i(k+1) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ij}\xi_j(k) + \tilde{h}_i g(\xi_n(k))\xi_n(k) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}\xi_j(k) + (\tilde{\alpha}_{in} + \tilde{h}_i g(\xi_n(k)))\xi_n(k), \end{aligned} \tag{6.6-11}$$

定理6.6.4 $\forall f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$,若存在常数 $\tilde{c}_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{\tilde{c}_j}\mid\tilde{\alpha}_{ij}\mid\right\}\leqslant 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{\tilde{c}_n}(\mid\tilde{\alpha}_{in}+\tilde{h}_i g(\xi_n)\mid)\leqslant\mu<1 \tag{6.6-12}$$

则(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ_n 绝对稳定。

证:作 Ляпунов 函数

$$V(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i\mid\xi_i\mid \tag{6.6-13}$$

则

$$
\begin{aligned}
V(\xi(k+1)) - V(\xi(k)) &= \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i\Big[\Big|\sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_{ij}\xi_j(k) \\
&\quad + \tilde{h}_i f(\xi_n(k))\Big|\Big] - \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i|\xi_i(k)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i\Big[\Big|\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{\alpha}_{ij}\xi_j(k) + \tilde{\alpha}_{in}\xi_n(k) \\
&\quad + \tilde{h}_i f(\xi_n(k))\Big|\Big] - \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i|\xi_i(k)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i|\tilde{\alpha}_{ij}||\xi_j(k)| + \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i| \\
&\quad + \tilde{h}_i f(\xi_n(k))| - \sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i|\xi_i(k)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{\tilde{c}_j}|\tilde{\alpha}_{ij}|\tilde{c}_j|\xi_i(k)| + \sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{c_n}|\tilde{\alpha}_{in} \\
&\quad + \tilde{h}_i g_i(\xi_n(k))|\tilde{c}_n|\xi_n(k)| - \sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_n|\xi_j(k)| \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{c_j}|\tilde{\alpha}_{ij}| - 1\right]\tilde{c}_j|\xi_j(k)| \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{c}_i}{c_n}|\tilde{\alpha}_{in} + \tilde{h}g_i(\xi_n(k))| - 1\right]\tilde{c}_n|\xi_n(k)| \\
&\leqslant (\mu - 1)\tilde{c}_n|\xi_n(k)| \overset{\text{def}}{=} -\delta\tilde{c}_n|\xi_n(k)|
\end{aligned}
\tag{6.6-14}
$$

由于(6.6-14)式对于任意一自然数 k 成立，从而有递推关系式

$$
\tilde{c}_n|\xi_n(k+1)| \leqslant V(k+1) < V(k) < V(k-1) < \cdots < V(k_0)
\tag{6.6-15}
$$

从(6.6-15)式可看出(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ^n 稳定。

从(6.6-15)式，有

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_n|\xi_n(k+1)| &\leqslant V(k+1) < V(k) - \delta\tilde{c}_n|\xi_n(k)| \\
&\leqslant V(k-1) - \delta_n\tilde{c}_n|\xi_n(k)| - \delta_n\tilde{c}_n|\xi_n(k-1)|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \cdots \leqslant V(k_0) - \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k)|$$

$$- \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k-1)| - \cdots - \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k_0)| \qquad (6.6\text{-}16)$$

下面证 $\xi_n \equiv 0$ 相对于 $F[F^*]$是全局吸引的。即

$$\lim_{k \to \infty} \xi_n(k+1) = 0 \qquad 对于\ \forall \xi(k_0) \in R^n\ 都成立。$$

反证:若不然,则 $\exists \varepsilon > 0$, $\exists$ 序列 $\{k_i\}$,使 $|\xi_n(k_i)| \geqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$,设 $k_0 < k_1 < \cdots < k_i < k+1$,故从(6.6-16)式有

$$0 \leqslant \tilde{c}_n |\xi_n(k+1)| \leqslant V(k_0) - \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k_1)|$$

$$- \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k_2)| - \cdots - \delta \tilde{c}_n |\xi_n(k_j)| \leqslant V(k_0)$$

$$- \delta \tilde{c}_{n_i} \varepsilon \to - \infty (i \to \infty, 从而\ k \to \infty) \qquad (6.6\text{-}17)$$

(6.6-17)式显然是一个矛盾不等式,故 $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_n(k+1) = 0$。

从而(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于 ξ_n 是绝对稳定的。

特别地取 $\tilde{c}_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$,便有推论 6.6.1。

推论 6.6.1 若 $\forall f(\sigma) \in F[\forall f(\sigma) \in F^*]$,有

$$\lim_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\tilde{\alpha}_{ij}| \right\} \leqslant 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \{ |\tilde{\alpha}_{in} + \tilde{h}_i g(\xi_n)| \} \leqslant \mu < 1 \qquad (6.6\text{-}18)$$

则(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于 ξ_n 绝对稳定。

仿定理 6.6.4 可证,略。

定理 6.6.5 若 $\forall f(\sigma) \in F[\forall f(\sigma) \in F^*]$,存在常数 $\tilde{c}_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,使得

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant j_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{c}_i}{c_j} |\tilde{\alpha}_{ij}| \right\} \leqslant 1$$

$$\max_{j_0+1 \leqslant j \leqslant n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{c}_i}{c_j} |\tilde{\alpha}_{ij}| \right\} < 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\alpha}_{in} + \tilde{h}_i g(\xi_n)| \leqslant v < 1 \qquad (6.6\text{-}19)$$

则(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于 $\xi_{j_0+1}, \cdots, \xi_n$ 绝对稳定。

取 $\tilde{c}_i = 1 (c_i = 1, 2, \cdots, n)$便有推论 6.6.2。

推论 6.6.2 若 $\forall f(\sigma) \in F[\forall f(\sigma) \in F^*]$有

$$\max_{1\leqslant j\leqslant j_0}\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{\alpha}_{ij}\ |\right\}\leqslant 1$$

$$\max_{j_0+1\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}|\ \tilde{\alpha}_{ij}\ |\right\}< 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\ \tilde{\alpha}_{in}+\tilde{h}_{i}g(\xi_n)\ |\leqslant v<1 \tag{6.6-20}$$

则(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$关于 $\xi_{j0+1},\cdots,\xi_n$ 绝对稳定。

下面用二次型 Ляпунов 函数来讨论绝对稳定性。

给定常数 $\varepsilon>0$，令 $D\overset{\text{def}}{=}(d_{ij})_{n\times n}$

$$d_{ij}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\tilde{\alpha}_{ij} & i=1,2,\cdots n \qquad j=1,2,\cdots,n-1\\ \tilde{\alpha}_{in}+\tilde{h}_{i}g_i(\xi_n) & i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

$$G_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}0 & \cdots\cdots\cdots & 0\\ \vdots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots\cdots 0 & \varepsilon\end{pmatrix}_{n\times n}$$

定理6.6.6　若$\forall f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$,存在对称正定矩阵 $B(b_{ij})_{n\times n}$使$D^TBD-B+G_\varepsilon$ 半负定。

则(6.6-4)式的平凡解相对于 $F[F^*]$关于 ξ_n 绝对稳定

证:作 Ляпунов 函数 $V=\xi^TB\xi$,则

$$\begin{aligned}V(k+1)-V(k)&=\xi^T(k+1)B\xi(k+1)-\xi^T(k)B\xi(k)\\&=(D\xi(k))^TBD\xi(k)-\xi^T(k)B\xi(k)\\&=\xi^T(k)D^TBD\xi(k)-\xi^T(k)B\xi(k)\\&=\xi^T(k)(D^TBD-B+G_\varepsilon)\xi(k)\\&\quad-\xi^T(k)G_\varepsilon\xi(k)\\&\leqslant-\varepsilon\xi_n^2(k)\end{aligned}\tag{6.6-21}$$

从而由(6.6-21)式知存在常数 $c>0$,使

$$\begin{aligned}\xi_n^2(k)&\leqslant cV(k)\leqslant cV(k-1)-\varepsilon c\xi_n^2(k-1)\\&\leqslant\cdots\leqslant cV(k_0)-\varepsilon c[\xi_n^2(k-1)+\xi_n^2(k-2)\\&\quad+\cdots+\xi_n^2(k_0)]\end{aligned}\tag{6.6-22}$$

由(6.6-21)式仿定理6.6.4可证(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ_n 绝对稳定。

取 $B=E$(E 为单位矩阵),则有推论6.6.3。

推论6.6.3 若 $\forall f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$,矩阵 $(D^TD-E+G_\varepsilon)_{n\times n}$ 半负定,

则(6.6-4)式的零解相对于 $F[F^*]$ 关于 ξ_n 绝对稳定。

定理6.6.7 若 $\forall f(\sigma)\in F[\forall f(\sigma)\in F^*]$,存在对称正定矩阵 B,使 $(D^TBD-B+\widetilde{G}_\varepsilon)$ 半负定,特别地取 $B=D^TD-E+\widetilde{G}_\varepsilon$ 半负定,则(6.6-4)式的零解相对于 $\mu[\mu^*]$ 关于 $\xi_{j_0+1},\cdots,\xi_n$ 绝对稳定。

这里 $\widetilde{G}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} O_{j_0\times j_0} & O_{j_0\times(n-j_0)} \\ O_{(n-j_0)\times j_0} & \varepsilon E_{(n-j_0)\times(n-j_0)} \end{bmatrix}$,其中 $\varepsilon>0$ 为纯量。

其中 $O_{j_0\times j_0},O_{j_0\times(n-j_0)},O_{(n-j_0)\times j_0}$,分别为相应阶的零矩阵,$E_{(n-j_0)\times(n-j_0)}$ 为单位矩阵。

证:可仿定理6.6.5进行,略。

例1 考虑系统

$$
\begin{cases}
x_1(k+1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1(k)-\dfrac{1}{2}x_2(k)+\dfrac{1}{3}f(x_2(k)) \\
x_2(k+1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1(k)+\dfrac{1}{2}x_2(k)-\dfrac{1}{3}f(x_2(k))
\end{cases}
\tag{6.6-23}
$$

其中 $f(x_2)\in F^*=\{f(x_2):f(0)=0,0\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant1.4,$
$f(x_2)\in c(-\infty,+\infty)\}$,

下面分析它的零解相对于 F^* 的绝对稳定性。

1) 令 $f(x_2(k))=x_2(k)$ 代入,则(6.6-23)变为线性系统

$$
\begin{cases}
x_1(k+1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1(k)-\dfrac{1}{6}x_2(k) \\
x_2(k+1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2(k)+\dfrac{1}{6}x_2(k)
\end{cases}
\tag{6.6-24}
$$

它的系数矩阵为

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \rho(B_1) \leqslant \| B_1 \| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} < 1.$$

故定理 6.6.2 的条件 1)满足。

2) 令 $g(x_2) = \begin{cases} \frac{f(x_2)}{x_2} & x_2 \neq 0 \\ 0 & x_2 = 0 \end{cases}$

作 Ляпунов 函数

$V = x_1^2 + x_2^2$,则

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{4}x_2^2(k) + \frac{1}{9}x_2^2(k)g^2(x_2(k)) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}x_1(k)x_2(k) + \frac{2}{3\sqrt{2}}x_1(k)x_2(k)g(x_2(k)) \\ &\quad - \frac{1}{3}x_2^2(k)g(x_2(k)) + \frac{1}{2}x_1^2(k) + \frac{1}{4}x_2^2(k) \\ &\quad + \frac{1}{9}x_2^2(k)g^2(x_2(k)) + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1(k)x_2(k) \\ &\quad - \frac{2}{3\sqrt{2}}x_1(k)x_2(k)g(x_2(k)) \\ &\quad - \frac{1}{3}x_2^2(k)g(x_2(k)) - x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= -\frac{1}{2}x_2^2(k) + \frac{2}{9}x_2^2(k)g^2(x_2(k)) - \frac{2}{3}x_2^2(k)g(x_2(k)) \\ &\leqslant -\frac{1}{2}x_2^2(k) + \left[\frac{2}{9} \times (1.4)^2\right]x_2^2(k) \\ &\leqslant -0.5x_2^2(k) + 0.44x_2^2(k) = -0.06x_2^2(k) \end{aligned}$$

故由推论 6.6.3 知此例的零解相对于 F^* 关于 $\boldsymbol{x}_2$ 是绝对稳定的,从而定理 6.6.2 的条件 2)满足。

综合 1)、2)可知此满足定理 6.6.2 条件,故它的零解相对于 F^* 是绝对稳定的。

§7 具有时滞的差分方程

本节介绍具有时滞的如下形式的线性差分系统[123]

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N_1}A_k(t)x(t-r_k^{(1)}(t))+$$
$$\sum_{k=1}^{N_2}\int_{-r_k^{(2)}(t)}^{0}B_k(t,\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta \tag{6.7-1}$$

其中 $x=\mathrm{col}(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$ $\quad A_k(t)\overset{\mathrm{def}}{=}(\alpha_{ij}^{(k)}(t))_{n\times n}$

$$B_\iota(t,\theta)\overset{\mathrm{def}}{=}(b_{ij}^{\iota}(t,\theta))_{n\times n}$$

是 $n\times n$ 阶连续矩阵；$r_k^{(1)}(t)$、$r_\iota^{(2)}(t)$连续；且 $0\leqslant r_k^{(1)}(t)\leqslant r_1$，$0\leqslant r_\iota^{(2)}(t)\leqslant r_2$，$|\alpha_{ij}^{(k)}(t)|\leqslant \alpha\alpha_{ij}^{(k)}$，$|b_{ij}^{(\iota)}(t,\theta)|\leqslant b_{ij}^{(\iota)}$（$r_1$、$r_2$、$\alpha_{ij}^{(k)}$、$\alpha_{ij}^{(\iota)}$是非负常数，$t\geqslant t_0$，$-r_2\leqslant\theta\leqslant 0$；$i,j=1,2,\cdots,n$；$k=1,2,\cdots,N_1$；$\iota=1,2,\cdots,N_2$）。

并考虑如下具有变时滞的离散非线性系统

$$x_i(k+1)=f_i(k,x_1(k),\cdots x_n(k)$$
$$x_1(k-m_{i1}(k))\cdots,x_n(k-m_{in}(k))$$
$$i=1,2,\cdots,n \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{6.7-2}$$

其中 $f_i\in\subset[N\times R^n\times R^n,R]$且满足

$$|f_i(k,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}|x_j|+b_{ij}|y_j|)$$

$\alpha_{ij}\geqslant 0,b_{ij}\geqslant 0$ 是常数，时滞 $m_{ij}(k)$是整数，满足

$$0\leqslant m_{ij}(k)\leqslant m$$

定义6.7.1 称系统(6.7-1)的零解是指数稳定的，如果对任意

$$(t_0,\varphi)\in R\times C([-r,0],R^n)$$

存在两个和(t_0,φ)无关的正数 $M\geqslant 1$、α，使系统(6.7-1)过(t_0,φ)之解 $x(t,t_0,\varphi)$满足

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i(t,t_0,\varphi) | \leqslant$$

$$M\sum_{i=1}^{n} \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0} \sum \cdot | \varphi_i(t_0+\theta) | e^{-\alpha(t-t_0,t_0+\tau r)} \quad (t \geqslant t_0)$$

(6.7-3)

其中 $\boldsymbol{\varphi}=\mathrm{col}(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$

对(6.7-2)式可类似地定义零解的指数稳定性。

引理 6.7.1 若非负向量函数 $V(k)=\mathrm{col}(V_1(k),\cdots,V_r(k)):R\to R_+^r$ 满足线性差分不等式

$$V(k+1)\leqslant \eta V(k,m) \tag{6.7-4}$$

且矩阵 $\eta=(\eta_{pq})_{r\times r}$ 非负，谱半径 $\rho(\eta)<1$，则存在二正数 $\Pi_1\geqslant1$、π_1 满足估计

$$\sum_{p=1}^{r} V_p(k)\leqslant \Pi_1\sum_{p=1}^{r}\sum_{j=-m}^{0} V_p(j)e^{-\pi_1 k} \quad (k\geqslant0) \tag{6.7-5}$$

其中 $V(k,m)=\mathrm{col}(V_1(k,m),\cdots,V_r(k,m))$, $V_p(k,m)=\max\limits_{0\leqslant\iota\leqslant m} V_p(k-\iota) \quad (p=1,2,\cdots,r)$。

证：由矩阵理论和 $\rho(\eta)<1$ 推知，存在一组正数 $d_p(p=1,2,\cdots r)$，满足 $\sum\limits_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{r}\eta_{pq}d_q d_p^{-1}<1(p=1,2,\cdots,r)$，故可选取正数 π_1 使得

$$\sum_{q=1}^{r}(\eta_{pq}d_q d_p^{-1})e^{\pi_1(m+1)}<1 \ (p=1,2,\cdots,r) \tag{6.7-6}$$

作非奇异线性变换

$$V_p(k)=d_pY_p(k),\ Y_p:R\to R_+(p=1,2,\cdots,r) \tag{6.7-7}$$

则(6.7-4)式可化为

$$Y_p(k+1)\leqslant \sum_{q=1}^{r}(\eta_{rq}d_q d_p^{-1})Y_q(k,m)$$
$$(p=1,2,\cdots,r,k\geqslant0) \tag{6.7-8}$$

这里 $Y_q(k,m)$ 之定义类同于 $V_q(k,m)$。

现证：对任意的 $\varepsilon>0$，恒有

$$Y_p(k) < \Big(\varepsilon + \sum_{p=1}^{r}\sum_{j=-m}^{0} Y_p(j)\Big)e^{-\pi_1 k} \stackrel{\text{def}}{=} W_\varepsilon(k)$$

$$(p = 1,2,\cdots,r,k \geqslant 0) \qquad (6.7\text{-}9)$$

如若不然,则必存在某正整数 p_0 和 k_0 使得满足

$$Y_{p_0}(k_0) \geqslant W_\varepsilon(k_0) \qquad Y_p(k) < W_\varepsilon(k)$$

$$(-m \leqslant k \leqslant k_0 - 1, q = 1,2,\cdots,r) \qquad (6.7\text{-}10)$$

从而,可由(6.7-6)~(6.7-10)推得

$$\begin{aligned} V_{p_0}(k_0) &\leqslant \sum_{q=1}^{r}(\eta_{p_0q}d_qd_{p_0}^{-1})Y_q(k_0-1,m) \\ &\leqslant \sum_{q=1}^{r}(\eta_{p_0q}d_qd_{p_0}^{-1})W_\varepsilon(k_0-1-m) \\ &= W_\varepsilon(k_0)\sum_{q=1}^{r}(\eta_{p_0q}d_qd_{p_0}^{-1})e^{\pi_1(m+1)} < W_\varepsilon(k_0) \end{aligned}$$

这显然与(6.7-10)相矛盾,故说明(6.7-9)成立。

令 $\Pi_1 = r(\max d_p)(\min d_p)^{-1} \geqslant 1$、$\varepsilon \to 0$,则由(6.7-7),(6.7-9)便可推得引理结论(6.7.1)。

定理 6.7.1 若存在一组正数 $d_1,\cdots,d_n$,使得矩阵

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N_1} A_k^* + r_2\sum_{k=1}^{N_2} B_k^*$$

的谱半径 $\rho(W)<1$,则系统(6.7-1)的平凡解指数稳定。

其中 $A_k^* \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{pq}^{*(k)})_{m\times m} \qquad B_\iota^* \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{pq}^{*(\iota)})_{m\times m}$

$$\alpha_{pq}^{*(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_q} a_{ij}^{(k)}d_id_j^{-1}$$

$$b_{pq}^{*(\iota)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{ij}^{(\iota)}d_id_j^{-1}$$

$$(0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_m = n: p,q = 1,2,\cdots, m; k = 1,2,\cdots,N_1; \iota = 1,2,\cdots,N_2)$$

证:选取一次型的 Ляпунов 函数 $V_p(t)$

$$V_p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} d_i \mid x_i(t) \mid \quad (p=1,2,\cdots,m; t \geqslant t_0 - r)$$

(6.7-11)

故由(6.7-1)、(6.7-11)推得

$$V_p(t) \leqslant \sum_{q=1}^{m} \sum^{j=n_{q-1}+1} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_n} \mid \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_{ij}^{(k)}(t) d_i x_j(t - r_k^{(1)}(t))$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_2} d_i \int_{-r_k^{(2)}(t)}^{0} b_{ij}^{(k)}(t,\theta) x_j(t+\theta) \mathrm{d}\theta \mid$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=n_{q-1}+1}^{n_q} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} \sum_{k=1}^{N_1} \left[(\alpha_{ij}^{(k)} d_j^{-1} d_i)(d_j \mid x_j(t - r_k^{(1)}(t)) \mid) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N_2} (d_{ij}^{(k)} d_i d_j^{-1}) \int_{-r_2}^{0} (d_j \mid x_j(t+\theta) \mid) \mathrm{d}\theta \right]$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{N_1} \alpha_{pq}^{*(k)} + r_2 \sum_{k=1}^{N_2} b_{pq}^{*(k)} \Big) \overline{V}_q(t,r) \qquad (6.7\text{-}12)$$

其中 $\overline{V}_\varepsilon(t,r) = \sup\limits_{r \leqslant s \leqslant 0} V_p(t-s)$ $(p=1,2,\cdots,m; t \geqslant t_0)$

于是,由(6.7-11)、(6.7-12)和引理可推得定理 6.7.1。

若在定理 6.7.1 中取 $m=n, d_i=1(i=1,2,\cdots,n)$,则得:

推论 6.7.1　若矩阵

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N_1} A_k + r_2 \sum_{k=1}^{N_2} B_k$$

的谱半径 $\rho(W)<1$,则系统(6.7-1)零解指数稳定,其中
$A_k \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{ij}^{(k)})_{n\times n}, B_l \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{ij}^{(l)})_{n\times n}$, $(k=1,2,\cdots,N_1; l=1,2,\cdots, N_2)$

定理 6.7.2　若存在一组正数 $d_1,\cdots,d_n$ 使得矩阵

$$\overline{W} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N_1} \overline{A}_k + r_2^2 \sum_{k=1}^{N_2} \overline{B}_k$$

的谱半径

$$\rho(\overline{W}) < \frac{1}{n(N_1 + N_2)},$$

则系统(6.7-1)之零解指数稳定。其中

$$\overline{A}_k \overset{\text{def}}{=} (\overline{\alpha}_{pq}^{(k)})_{m\times m}, \overline{B}_\iota \overset{\text{def}}{=} (\overline{b}_{pq}^{(\iota)})_{m\times m}$$

$$\overline{\alpha}_{pq}^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} (\alpha_{ij}^{(k)})^2 d_i d_j^{-1}$$

$$b_{pq}^{(\iota)} \overset{\text{def}}{=} \max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} (\alpha_{ij}^{(\iota)})^2 d_i d_j^{-1}$$

$$(0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_m = n; p, q = 1,2,\cdots, m; k = 1,2,\cdots,N_1; \iota = 1,2,\cdots,N_2)$$

证:选取二次型的 Ляпунов 函数 $V_p(t)$

$$V_p(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} d_i x_i^2(t) \quad (p = 1,2,\cdots,m; t \geqslant t_0 - r) \tag{6.7-13}$$

故由(6.7-1)、(6.7-13)推得

$$\begin{aligned} V_p(t) &= \sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} d_i\Big[\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(k)}(t) x_j(t - r_k^{(1)}(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}\int_{-r_k^{(2)}(t)}^{0} b_{ij}^{(k)}(t,\theta) x_j(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Big]^2 \\ &\leqslant n(N_1+N_2)\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} d_i\Big[\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^{(k)})^2 x_j^2(t - r_k^{(1)}(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}^{(k)})^2 r_2\int_{-r_2}^{0} x_j^2(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Big] \\ &= n(N_1+N_2)\sum_{q=1}^{m}\sum_{j=n_q+1}^{n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p} \\ &\quad \Big[\sum_{k=1}^{N_1}(\alpha_{ij}^{(k)})^2 d_i d_j^{-1}(d_j x_j^2(t - r_k^{(1)}(t))) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_2}(b_{ij}^{(k)})^2 d_i d_j^{-1} r_2\int_{-r_2}^{0}(d_j x_j^2(t+\theta))\mathrm{d}\theta\Big] \end{aligned}$$

$$\leqslant n(N_1+N_2)\sum_{q=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{N_1}\bar{\alpha}_{pq}^{(k)}+r_2^2\sum_{k=1}^{N_2}\bar{b}_{pq}^{(k)}\Big)\bar{V}_q(t,r)$$

(6.7-14)

$(P=1,2,\cdots,m;t\geqslant t_0)$，同样，由(6.7-13)、(6.7-14)和引理可推得定理6.7.2

若在定理6.7.2中取 $m=n,d_i=1(i=1,2,\cdots,n)$，则可得：

推论6.7.2　若矩阵

$$\overline{W}\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{N_1}\overline{A}_k+r_2^2\sum_{k=1}^{N_2}\overline{B}_k$$

的谱半径

$$\rho(\overline{W})<\frac{1}{n(N_1+N_2)},$$

则系统(6.7-1)的零解指数稳定。其中

$\overline{A}_k\overset{\text{def}}{=}((\bar{\alpha}_{ij}^{(k)})^2)_{n\times n},\overline{B}_\iota\overset{\text{def}}{=}((\bar{\alpha}_{(\iota)ij})^2)_{n\times n}$

$(k=1,2,\cdots,N_1;\iota=1,2,\cdots,N_2)$

例1　考虑一维线性差分系统

$$x(t)=\alpha(t)x(t-\tau_1)+b(t)\int_{-\tau_2}^{0}x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\qquad(t\geqslant t_0)$$

(6.7-15)

其中$|\alpha(t)|\leqslant\alpha,|b(t)|\geqslant b,\alpha$、$b$、$\tau_1$、$\tau_2$是非负常数，根据推论6.7.1知当

$$\alpha+\tau_2 b<1$$

时，系统(6.7-15)式的零解指数稳定。

注　若令

$$f_n(\lambda)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Det}\left(\begin{aligned}&I-\sum_{k=1}^{N_1}A_k\mathrm{e}^{-\lambda_k^{(1)}}\\&-\sum_{k=1}^{N_2}\int_{-r_k^{(2)}}^{0}B_k(\theta)\mathrm{e}^{\lambda\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}\right)$$

其中 I 是 n 阶单位阵，A_k 是 $n\times n$ 阶常阵，$B_\tau(\theta)$是 $n\times n$ 阶连续

阵，$r_k^{(1)}$、$r_\iota^{(2)}$ 是非负常数（$k=1,2,\cdots,N_1;\iota=1,2,\cdots,N_2$），则由本文定理可给出判定超越函数 $f_n(\lambda)$ 的根均具负实部的简单代数准则。

定理 6.7.3 若存在一组正数 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $\rho(a_{pq}^*+b_{pq}^*)_{r\times r}<1$，且时滞 $m_{ij}(k)$ 满足 $m_{ij}(k)=m_{pq}(k)$ $(n_{p-1}+1\leqslant i\leqslant n_p;n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q;p,q=1,2,\cdots,r;0=n_0<n_1<\cdots<n_r=n)$。

则系统(6.7-2)之零解全局指数稳定，其中

$$\alpha_{pq}^*=\max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}\alpha_{ij}d_id_j^{-1}b_{pq}^*$$

$$=\max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}b_{ij}b_{ij}d_id_j^{-1}\qquad(p,q=1,2,\cdots,r)$$

证：选取一次型的 Ляпунов 函数 $V_p(k)=\sum\limits_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}d_i\mid x_i(k)\mid$ $(p=1,2,\cdots,r)$，故由(6.7-2)推得

$$V_p(k+1)=\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}d_i\mid x_i(k+1)\mid$$

$$\leqslant\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}d_i\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}\mid x_i(k)\mid+b_{ij}\mid x_i(k-m_{ij}(k))\mid)$$

$$\leqslant\sum_{q=1}^{r}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}(\alpha_{ij}d_id_j^{-1}(d_j\mid x_i(k)\mid)$$

$$+b_{ij}d_id_j^{-1}(d_jx_j(k-m_{pq}(k))))$$

$$\leqslant\sum_{q=1}^{r}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}(\alpha_{kq}^*(d_ix_i(k))$$

$$+b_{pq}^*d_j\mid x_j(k-m_{pq}(k))\mid)$$

$$=\sum_{q=1}^{r}(\alpha_{pq}^*V_q(k)+b_{pq}^*V_q(k-m_{pq}(k)))$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{r}(\alpha_{pq}^{*}+b_{pq}^{*})V_{q}(k,m)\ (p=1,2,\cdots,r\ k\geqslant 0)$$

(6.7-16)

于是,由(6.7-16)和引理可推得定理 6.7.3。

推论 6.7.3 若 $\rho(\alpha_{ij}+b_{ij})_{n\times n}<1$(特别 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+b_{ij})<1$ 或 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}+b_{ij}<1)$,则系统(6.7-2)式的零解全局指数稳定。

定理 6.7.4 若存在一组正数 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$,使得 $\rho(\bar{\alpha}_{pq}+\bar{b}_{pq})_{r\times r}<\frac{1}{2n}$,且时滞 $m_{ij}(k)$满足定理 6.7.3 中条件,则系统(6.7-2)的零解全局指数稳定,其中

$$\bar{\alpha}_{pq}=\max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_q}(\alpha_{ij}^{2}d_id_j^{-1},\bar{b}_{pq})$$

$$=\max_{n_{q-1}+1\leqslant j\leqslant n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_q}(b_{ij}^{2}d_id_j^{-1})$$

$(p,q=1,2,\cdots,r)$

证:选取二次型的 Ляпунов 函数

$$V_p(k)=\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_q}d_i\boldsymbol{x}_i^2(k)(p=1,2,\cdots,r)$$

从而

$$V_p(k+1)\leqslant 2n\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_q}d_i\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^2x_j^2(k)+b_{ij}^2x_j^2(k-m_{ij}(k))$$

$$=2n\sum_{q=1}^{r}\sum_{j=n_{p-1}+1}^{n_q}\sum_{i=n_{p-1}+1}^{n_p}(\alpha_{ij}^2d_id_j^{-1}(d_jx_j^2(k))$$

$$+b_{ij}^2d_id_j^{-1}(d_ix_j^2(k-m_{ij}(k))))$$

$$\leqslant 2n\sum_{q=1}^{r}\prod_{p=n_{q-1}+1}^{n_q}(\bar{\alpha}_{pq}(d_i\boldsymbol{x}_j^2(k))$$

$$+\bar{b}_{pq}(d_i x_j^2(k-m_{pq}(k))))$$

$$=2n\sum_{q=1}^{r}(\bar{\alpha}_{pq}V_q(k)+\bar{b}_{pq}V_q(k-m_{pq}(k)))$$

$$\leqslant 2n\sum_{q=1}^{r}(\bar{\alpha}_{pq}+\bar{b}_{pq})V_q(k,m)$$

$$(p=1,2,\cdots,r,k\geqslant 0) \qquad (6.7\text{-}17)$$

同样,由(6.7-17)和引理便可推得定理6.7.4。

推论6.7.4 若 $\rho(\bar{\alpha}_{ij}^2+\bar{b}_{ij}^2)<\frac{1}{2n}$(特别$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}(\bar{\alpha}_{ij}^2+\bar{b}_{ij}^2)<\frac{1}{2n}$或$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}_{ij}^2+\bar{b}_{ij}^2)<\frac{1}{2n}$),则系统(6.7-2)式的零解全局指数稳定。

§8 非线性泛函差分方程[126]

近年来,人们已从具有时滞的差分方程的研究推广到更一般的泛函差分方程。

考虑下列的泛函差分方程[126]

$$\boldsymbol{x}(m+1)=f(m,\boldsymbol{x}_m) \qquad m\in N \qquad (6.8\text{-}1)$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n$,$f\in C[N\times C,R^n]$,$f(m,0)\equiv 0$, 故(6.8-1)恒有零解 $x(m)\equiv 0$, $\forall m\in N$,N,N^+ N^{-1}分别表示整数集、非负整数集、非正整数集,C 表$\varphi\in[N^-,R^n]$的函数全体,对 $m\in N^+$,$\boldsymbol{x}_m$ 是C 中一元素,记为 $\boldsymbol{x}_m(s)=\boldsymbol{x}(m+s)$ $\quad -r\leqslant s\leqslant 0$, s 是整数,对于 $m_0\in N^+$和任何 $\varphi\in C$,(6.8-1)式的解是一个函数 $\boldsymbol{x}\in[N,R^n]$,对 $m\geqslant m_0$ 满足(6.8-1),且 $\boldsymbol{x}(m)=\varphi(m)$,当 $m\leqslant m_0$。

以 $\boldsymbol{x}(m)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(m,m_0\ \varphi)$表示(6.8-1)的解。

定义$[\cdot]^+$是一个向量(或矩阵),是将[ ]的元素取绝对值后代之。

令 $\boldsymbol{x}_m=[\boldsymbol{x}_{1m},\cdots,\boldsymbol{x}_{nm}]^T$ $\quad |\boldsymbol{x}_m|_r^+=[\|\boldsymbol{x}_{1m}\|_r,\cdots\|\boldsymbol{x}_{nm}\|_r]^T$

这里 $\|x_{im}\|_r=\sup\limits_{-r\leqslant s\leqslant 0}|x_i(m+s)|$ $i=1,2,\cdots n$

且 $r=r(m)\geqslant 0$ 当 $r=\infty$ $|x_{m0}|_r^+=|\varphi|_\infty^+$

定义 6.8.1 若存在一个集合 $D\subset R^n\{D-\{0\}$非空$\}$ 使得$\forall m_0\in N^+$, $\varphi\in C$,且$|\varphi|_\infty^+\in D^+$有

$$[x(m,m_0,\varphi)]^+\leqslant|\varphi|_\infty^+ \quad \forall m\geqslant m_0 \tag{6.8-2}$$

则称集合 D 为(6.8-1)式的一个稳定区域。

如果 D 是一个稳定域,且加上

$$\lim_{m\to\infty}x(m,m_0,\varphi)=0 \tag{6.8-3}$$

则称 D 为一个渐近稳定区域。

如果 D 是一个稳定域,且存在 $\alpha>0,\forall\varphi\in[N^{[-r,0]},D]$ 且$|\varphi^+|_r\in D^+$,有

$$|x(m,m_0\varphi)|\leqslant k\|\varphi\|_r e^{-\alpha(m-m_0)}\forall m\geqslant m_0 \tag{6.8-4}$$

则称 D 为一个指数稳定域。其中 $N^{[-r,0]}=\{-r,-r+1,\cdots 1,0\}$

如果 $D=R^n$上述的稳定域便是全局的。

如果 $A\geqslant 0$,则 $\rho(A)$ 是 A 的一个特征值,且存在一个非负向量 $x\geqslant 0,x\neq 0$ 使得 $Ax=\rho(A)x$。

$W_\rho(A)$表具有特征值 $\rho(A)$的特征空间,即

$$W_\rho(A):=\{x\in R^n\mid Ax=\rho(A)x,\}$$

$$W_\rho^t(A)=W_\rho(A)\cap R_+^n$$

定理6.8.1 若存在一个轴对称凸集 $\Omega\subset R^n$ 使得

$$|f(m,x_m)|^+\leqslant A(|x_m|_r^+)|x_m|_r^+ \quad \forall x\in\Omega \tag{6.8-5}$$

这里 $A(s)\in[\Omega^+,R^{n\times n}]$在 Ω^+ 内是单调不减的,若集合 $D-\{0\}$非空。这里

$$D=\{x\in\Omega\mid[x]^+\leqslant k\in\Omega$$

$$[x]^+\in W_\rho^+(A(k)),\rho(A(k))<1\} \tag{6.8-6}$$

则 $\bar{D}$ 是一个 (6.8-1)式的一个稳定区域,其中 $\bar{D}$ 是D 中的所有严格不等号$<$代之以$\leqslant$。若上述条件加上条件 $\lim\limits_{m\to\infty}(m-r$

$(m))=\infty$,则 D 是一个渐近稳定区域。

证: 首先证 $\forall\varphi\in C$ 且 $|\varphi|_\infty^+\in\bar{D}^+$

$$[\boldsymbol{x}(m)]^+\leqslant|\varphi|_\infty^+ \qquad \forall m\geqslant m_0 \tag{6.8-7}$$

若(6.8-7)式不真,必存在 $m^*\geqslant m_0$ 和某些 i,使得

$$|\boldsymbol{x}_i(m^*+1)|>\|\varphi_i\|_\infty \quad [\boldsymbol{x}(m)]^+\leqslant|\varphi|_\infty^+ \quad \forall m\leqslant m^* \tag{6.8-8}$$

则 由 Ω 的轴对称性和凸性,有

$$|\boldsymbol{x}_m|_r^+\in\Omega^+,\forall m\leqslant m^*$$

利用$[\cdot]^+$和条件(6.8-5)式,由(6.8-1)式便有

$$[\boldsymbol{x}(m+1)]^+\leqslant A(|\boldsymbol{x}_m|_r^+)|\boldsymbol{x}_m|_r^+ \quad \forall m\leqslant m^* \tag{6.8-9}$$

计及 A 在Ω^+中的单调性,便有

$$[\boldsymbol{x}(m+1)]^+\leqslant A(|\varphi|_\infty^+)|\varphi|_\infty^+\leqslant A(k)|\varphi|_\infty^+ \tag{6.8-10}$$

因为$|\varphi|_\infty^+\in W_\rho^+[A(k)]$ 和 $\rho[A(k)]\leqslant1$

$$[\boldsymbol{x}(m^*+1)]^+\leqslant\rho(A(k))|\varphi|_\infty^+\leqslant|\varphi|_\infty^+ \tag{6.8-11}$$

与不等式(6.8-8) 矛盾,故(6.8-7)式成立,从而 $\bar{D}$ 是(6.8-1)式的一个稳定域。

次证 D 是(6.8-1)式的渐近稳定区域,从(6.8-5)和(6.8-7)式,知 $\forall\varphi\in C$ 和$|\varphi|_\infty^+\in D^+$,有

$$[\boldsymbol{x}(m+1)]^+\leqslant A(k)|\boldsymbol{x}_m|_r^+ \qquad \forall m\in N \tag{6.8-12}$$

在(6.8-7)式 存在一个常量 $c\geqslant0$,使得

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}[\boldsymbol{x}(m)]^+=c\leqslant k$$

因为当 $m\to\infty$时,$m-r(m)\to\infty$,故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M_1$使得对所有的 $m\geqslant M_1$,有

$$[\boldsymbol{x}_m]_r^+\leqslant c+e\varepsilon \quad e=[1,\cdots1]^T$$

和 $M_2\geqslant M_1$,使得

$$[\boldsymbol{x}(M_2+1)]^+\geqslant c-e\varepsilon$$

结合(6.8-12)式便有

$$c-e\varepsilon\leqslant[\boldsymbol{x}(M_2+1)]^+\leqslant A(k)[\boldsymbol{x}_{M_2}]_r^+\leqslant A(k)(c+e\varepsilon) \tag{6.8-13}$$

因为在 D 内，$\rho(A(k))<1$，故$[I-A(k)]^{-1}\geqslant 0$

(6.8-13)式蕴涵

$$c \leqslant [I-A(k)]^{-1}(I+A(k))e\varepsilon \qquad (6.8\text{-}14)$$

即 $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}(m)=0$，故结论真。

例1 考虑具有时滞的非线性差分方程

$$x(m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sin x(m-r) + \cos x(m-r)]x(m) \qquad x\in R \qquad (6.8\text{-}15)$$

r 是非负整数。

取 $D=(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，故 $\forall x\in D$，有 $|\sin x|=\sin|x|$ $|\cos x|=\cos|x|$ 且

$$|f(x_m)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin|x_m|_r+\cos|x_m|_r)|x_m|_r \overset{\text{def}}{=} A(|x_m|_r)|x_m|_r, \qquad (6.8\text{-}16)$$

$A(s)$在 D^+ 内是单调不减的，且 $A(k)<1, k\in D^+$，因此从定理6.8.1知，$D=(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$是(6.8-15)式的一个渐近稳定区域。

例2 考虑无界时滞非线性离散系统

$$x_1(m+1)=\frac{1}{4}x_1^3(m)+\frac{1}{9}x_1(m-\frac{2m}{3})x_2^2(m-\frac{m}{2})\overset{\text{def}}{=}f_1(x_m)$$

$$x_2(m+1)=\frac{1}{4}x_1^2(m)x_2(m-\frac{2m}{3})+\frac{1}{9}x_2^2(m-\frac{m}{2})\overset{\text{def}}{=}f_2(x_m) \qquad (6.8\text{-}17)$$

取 $r=r(m)=m/2$，显然 $m-r(m)\to\infty$，当 $m\to\infty$ 且 $\forall \boldsymbol{x}\in R^2$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^+ \leqslant \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}_{1m}\|_r^2 & \frac{1}{9}\|\boldsymbol{x}_{1m}\|_r\|\boldsymbol{x}_{2m}\|_r \\ \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}_{1m}\|_r\|\boldsymbol{x}_{2m}\|_r & \frac{1}{9}\|\boldsymbol{x}_{2m}\|_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{x}_{1m}\|_r \\ \|\boldsymbol{x}_{2m}\|_r \end{bmatrix} \qquad (6.8\text{-}18)$$

则 $A(k)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}k_1^2 & \frac{1}{9}k_1k_2\\ \frac{1}{4}k_1k_2 & \frac{1}{9}k_2^2\end{bmatrix}\qquad \rho(A(k))=\frac{k_1^2}{4}+\frac{k_2^2}{9}$

$$W_\rho^+(A(k))=\{x,\in R^2,\mid k_1\mid x_1\mid=k_1\mid x_2\mid\}$$

因为 $W_\rho^+(A(k))$ 和在点(k_1,k_2)的梯度是 k_2/k_1,故易得(6.8-17)式的渐近稳定区域

$$\begin{aligned}D&=\{x\in R^2[x]^+\leqslant k,\frac{k_1^2}{4}+\frac{k_2^2}{9}<1\}\\&=\{x\in R^2\mid\frac{k_1^2}{4}+\frac{k_2^2}{9}<1\}\end{aligned}\tag{6.8-19}$$

故(6.8-17)式的稳定区域为

$$\bar{D}=\{x\in R^2\Big|\frac{k_1^2}{4}+\frac{k_2^2}{9}\leqslant 1\}\tag{6.8-20}$$

下面进一步考虑指数稳定区域的估计问题。

令 $\mid x\mid_\infty:=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mid x_i\mid\qquad \|A\|_\infty:=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n\mid\alpha_{ij}\mid$

显然$\mid x\mid_\infty\leqslant k$ 等价于$[x]^+\leqslant \mathrm{col}(k_1,\cdots k)$。

引理 6.8.1 $\forall\varphi\in C$,有

$$\mid[\varphi]_r^+\mid_\infty\leqslant n\|\varphi\|r\tag{6.8-21}$$

证:设 $E_i=[\overbrace{0,\cdots,01}^{i},0,\cdots,0]^T$ 则

$$[E_i\varphi_i]^+\leqslant[\varphi]^+\text{且}\mid\varphi\mid_r^+=\sum_{i=1}^n E_i\|\varphi_i\|_r\tag{6.8-22}$$

进而有

$$\mid E_i\varphi_i\mid_\infty\leqslant\mid\varphi\mid_\infty\quad\text{且}\ \|E_i\varphi_i\|_r\leqslant\|\varphi\|_r\quad i=1,2,\cdots,n$$

由模的齐性,有

$$\sum_{i=1}^n\mid E_i\mid_\infty\|\varphi_i\|_r=\sum_{i=1}^n\|E_i\varphi_i\|_r\quad\text{故有}$$

$$\mid\|\varphi\|_r^+\mid_\infty\leqslant\sum_{i=1}^n\mid E_i\mid_\infty\|\varphi_i\|_r=\sum_{i=1}^n\|E_i\varphi_i\|_r\leqslant n\|\varphi\|_r$$

定理6.8.2 假设存在一个轴对称凸集 $\Omega \subset R^n$ 使得

$$[f(m,x_m)]^+ \leqslant P(|x_m|_r^+)|x_m|_r^+ \quad \forall x \in \Omega \tag{6.8-23}$$

这里 $P(s) \in C[\Omega^+, R_+^{n\times m}]$ 在 Ω^+ 单调不增。若 $D-\{0\} \neq \varnothing$，这里 $D = D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 = \{x \in \Omega \mid [x]^+ \leqslant k \in \Omega^+ \mid [x]^+ W_\rho^+(P(k)), \rho(P(k)) < 1\} \tag{6.8-24}$$

$$D_2 = \{x \in \Omega \mid \|x\|_\infty \leqslant k \cdot \|P(kE)\|_\infty < 1,\ E = [1,\cdots,1]^T\} \tag{6.8-25}$$

则集合 D 是(6.8-1)式的一个指数稳定区域，D 中的一切严格不等号 $<$ 以不等号 $\leqslant$ 而得到的 $\bar{D}$ 是(6.8-1)式的一个稳定区域。

证：首先证明 $\forall \varphi(s) \in \bar{D}_1(\forall s \in N^{[-r,0]})$ 且 $|\varphi|_r^+ \in \bar{D}_1^+$ 有

$$|x(m)|^+ \leqslant [\varphi]_r^+ \quad \forall m \geqslant m_0 \tag{6.8-26}$$

$|\varphi|_r^+ \in \bar{D}_1^+$ 意味着存在一个非负向量 $k \in \overline{\Omega}^+$ 使得 $|\varphi|_r^+ \leqslant k$，$[\varphi]_r^+ \in W_\rho^+(P(k))$ 且 $\rho(P(k)) \leqslant 1$。

若(6.8-26)不真，必存在 $m^* \geqslant m$，和某些 i 使得

$$|x_i(m^*+1)| > \|\varphi_i\|_r \quad [x(m)]^+ \leqslant |\varphi|_r^+ \quad \forall m \leqslant m^* \tag{6.8-27}$$

这样，由 Ω 的轴对称性和凸性 $|x_m|_r^+ \in \Omega^+(\forall m \leqslant m^*)$ 计及 P 在 Ω^+ 的单调性，有

$$|x(m^*+1)]^+ \leqslant P(|\varphi|_r^+)|\varphi|_r^+ \leqslant P(k)|\varphi|_r^+ \tag{6.8-28}$$

因为 $|\varphi|_r^+ \in W_e^+(P(k))$ 和 $\rho(P(k)) \leqslant 1$

$$[x(m^*+1)]^+ \leqslant \rho(P(k))|\varphi|_r^+ \leqslant |\varphi|_r^+ \tag{6.8-29}$$

与(6.8-27)式矛盾，故(6.8-26)式成立，对(8-26)式两边取绝对值模，且应用引理6.8.1，就有

$$|x(m)| \leqslant n\|\varphi\|_r \quad \forall m \geqslant m_0$$

说明 $\bar{D}_1$ 是(6.8-1)式的一个稳定区域。

当 $\varphi(s)\in\bar{D}_2(\forall s\in N^{[-r,0]}$,且 $|\varphi|_r^+\in\bar{D}_2$ 存在一个常数 $k>0$ 使得

$[\varphi]_r^+\leqslant Ek\in\bar{D}_2^{+1}$ 　　且 $\|P(Ek)\|_\infty\leqslant 1$ 　则

$$|x(m)|^+\leqslant Ek \qquad \forall m\geqslant m_0 \tag{6.8-30}$$

若(6.8-30)不真,必存在一个 $m^*\geqslant m_0$ 和某些 i 使得

$$|x_i(m^*+1)|>k \qquad [x(m)]^+\leqslant Ek \qquad \forall m\leqslant m^* \tag{6.8-31}$$

则 $|x_m|_r^+\subset\Omega^+(\forall m\leqslant m^*)$ 　　计及 P 在 Ω^+ 单调,故有

$$[x(m^*+1)]^+\leqslant P(Ek)Ek \tag{6.8-32}$$

赋(6.8-32)两边以 $|\cdot|_\infty$ 模,且用 $\|P(Ek)\|_\infty\leqslant 1$ 便得到

$$|x(m^*+1)|_\infty<\|P(Ek)\|_\infty\|Ek\|_\infty\leqslant k \tag{6.8-33}$$

与(6.8-31)式矛盾,故(6.8-30)式成立,因而 $\bar{D}_2$ 也是(6.8-1)式的稳定域,故 $\bar{D}=\bar{D}_1\cup\bar{D}_2$ 是稳定域。

最后证 D 是(6.8-1)式的一个指数稳定域,从(6.8-23)式和(6.8-26)式对 $\forall\varphi\in[N^{[-r,0]},D]$ 和 $[\varphi]_r^+\in D_1^+$,有

$$[x(m+1)]^+\leqslant P(k)[x_m]_r^+ \tag{6.8-34}$$

对任何 m,有整数 j 使得 $m\in N^{[m_j,m_j+1]}$,这里 $m_j=m_0+jr$,从(6.8-26)式能令

$$\sup_{m_j\leqslant m<\infty}[x(m)]^+=\eta_i\in\Omega^+$$

则从(6.8-34)式有

$$\begin{aligned}[x(m+1)]^+&\leqslant\eta_i\leqslant P(k)\sup_{m_j\leqslant m<\infty}|x_m|_r^+\\&\leqslant P(k)\sup_{m_j-1\leqslant m<\infty}[x(m)]^+\\&\leqslant P(k)\eta_{j-1}\leqslant P^j(k)\eta_0\end{aligned} \tag{6.8-35}$$

因为 $\rho(P(K))<1$,故存在正数 $\hat{k}\geqslant 1$,使得

$$\|P^j(k)\|\leqslant\hat{k}\lambda_m^{j-n} \tag{6.8-36}$$

这里 λ_m 是　P 的所有特征值的最大模,且 $\lambda_m<1$

计及 $m_j=m_0+jr$ 　且 $m_j\geqslant m-r$ 　　有

$$j=(m_j-m_0)/r\geqslant\frac{1}{r}(m-m_0)-1$$

且

$$|x(m+1)|\leqslant \bar{k}\lambda_m^{j-n}|\eta_0|\leqslant \hat{k}|\eta_0|\lambda_m^{-(n+1+1/r)}\lambda_m^{(m+1-m_0)/r}$$

(6.8-37)

令 $k=\hat{k}\lambda_m^{-(n+1+1/r)}$ $\alpha=\frac{-1}{r}\ln\lambda_m$ 则

$$|x(m)|\leqslant k|\eta_0|e^{-\alpha(m-m_0)}\leqslant k\|\varphi\|_r e^{-\alpha(m-m_0)} \qquad \forall m\geqslant m_0$$

(6.8-38)

从(6.8-23) (6.8-30)式可知,

对 $\forall\varphi\in[N^{[-r,0]},D]$ 和 $|\varphi|_r^+\in D_2^+$ 有

$$|x(m+1)|_\infty\leqslant\|P(Ek)\|_\infty|x_m|_\infty \quad (6.8\text{-}39)$$

余下的证明完全类似于从(6.8-34)式到(6.8-38)的证明。略。

推论 6.8.1 设存在一个非负矩阵 $P=(p_{ij})$使得

$$[f(m,x_m)]^+\leqslant P|x_m|_r^+ \quad \forall x\in R^n \quad (6.8\text{-}40)$$

若 $\rho(A)<1$,则(6.8-1)零解是全局指数稳定的。

证:因为 $\rho(A)<1$,故存在常数 $w_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,使得

$$\sum_{j=1}^n w_i^{-1}w_jp_{ij}<1 \qquad 或\ \|p_w\|_\infty<1$$

$$P_w=(w_i^{-1}w_jp_{ij}) \quad (6.8\text{-}41)$$

令 $y=[y_1,\cdots,y_m]^T=\text{diag}\{w_i^{-1}\}x$,即 $y_i=w_i^{-1}x_i$和$x=\text{diag}\{w_i\}y$,这里 $\text{diag}\{w_i\}$是对角矩阵,对角元素为 $w_i(i=1,2,\cdots,n)$。

则从(6.8-40)和(6.8-41)有

$$|y_i|\leqslant\sum_{j=1}^n w_i^{-1}w_jp_{ij}|y_i| \qquad [y]^+\leqslant P_w|y_m|_r^+$$

(6.8-42)

假设保证了(6.8-25)式中的 $D_2=R^n$ 中,应用定理 6.8.2 便得到

$$|y(m,m_0,\varphi)|\leqslant\hat{k}\|\text{diag}\{w_i^{-1}\}\varphi\|_r e^{-2(m-m_0)}$$

推论 6.8.1 得证。

例 3 考虑一个不确定闭环控制系统

$$x(k+1)=(A+BFC)x(k)+[\Delta A(k)+\Delta B(k)FC]x(k) \qquad (6.8\text{-}43)$$

这里 $x \in R^n$, A, B, F 和 C 是相应维数的矩阵,其结构扰动满足

$$\{\Delta A(k):[\Delta A(k)]^+ \leqslant \bar{A}\},\{\Delta B(k):[\Delta B(k)]^+ \leqslant \bar{B}\} \qquad (6.8\text{-}44)$$

若$(A+BFC)$稳定,即它的特征值$|\lambda_i|<1(i=1,\cdots,n)$,且

$$\rho[\mathrm{diag}\{|\lambda_i|\}+(M^{-1})^+(A+\bar{A}+(B+\bar{B}(FC)^+)+M^+]<1 \qquad (6.8\text{-}45)$$

这里 M 满足

$$M^{-1}(A+BFC)M=\mathrm{diag}\{\lambda_i\} \qquad (6.8\text{-}46)$$

则(6.8-43)的零解是全局指数稳定的。

证:令 $x(k)=Mz(k)$, 则(6.8-43) 变为

$$z(k+1)=\mathrm{diag}\{\lambda_i\}z(k)+M^{-1}(A+BFC)Mz(k)+M^{-1}[\Delta A+\Delta BFC]Mz(k) \qquad (6.8\text{-}47)$$

对(6.8-47)两边取$[\cdot]^+$得到

$$[z(k+1)]^+ \leqslant \mathrm{diag}\{|\lambda_i|+(M^{-1})^+(A+B(FC)^+M^+)[z(k)]^+ + [M^{-1}]^+[\bar{A}+\bar{B}[FC]^+][M]^+[Z]^{-1}$$

由推论 6.8.1 可知(6.8-43)式的零解是全局指数稳定的。

第七章　微分差分方程

本章介绍由微分差分方程(也称时滞微分方程)所描述的动力系统的稳定性的基本理论及若干应用。§1　叙述了微分差分方程的基本概念,稳定性的定义;§2、§3　分别给出了一般常系数线性滞后型和中立型系统稳定性的代数充分条件;§4　介绍了研究非线性滞后型微分差分方程稳定性的 Ляпунов 函数法及 Ляпунов 泛函方法;§5　对于一类非线性变量分离的非线性系统,用一类典型的 Ляпунов 泛函来研究稳定性的代数判据。因为时滞神经网络系统,非线性时滞控制系统都可化为这类系统,故这类 Ляпунов 泛函具有某种普适性;§6　研究了不确定的区间 Lotka-Vollterra 生态时滞系统的 Robust 稳定性、Robust 共存性;§7　介绍微分差分不等式及对变时滞系统稳定性(特别是时滞神经网络)的应用;§8　介绍了一类时变中立型的稳定性;§9、§10　讨论了中立型大系统的稳定性及在 $C^{(1)}$空间的稳定性。

§1　微分差分方程的基本概念[165~167]

在自然和社会现象中,许多系统的发展趋势或未来状态不仅与现状有关,而且或多或少与过去的发展趋势有关。这类现象称为滞后现象,或遗传效应,从工程技术、物理、力学、控制论、化学反应、生物医学等中提出的数学模型带有明显的滞后量。例如医学中的传染病的潜伏期,弹性力学中的滞后效应,特别是自动控制中任何一个含有反馈的系统,大体上总有时滞,这类时滞的出现,是因为需要有限的时间接受信息,作出反应,这类时滞系统无法用常微分方程来描述,需要用微分差分方程,也称为具有偏差变元的微

分方程。

例如:船舶的摆动方程,考虑船舶运动,设 $\theta(t)$表示在时刻 t 时与法向垂直位置的倾斜角,则 $\theta(t)$满足微分方程

$$m\ddot{\theta}(t)+c\dot{\theta}(t)+k\theta(t)=f(t) \qquad (7.1\text{-}1)$$

为减少摇摆,除设法增大阻尼 c 外,有的船舶两侧还设有水泵,由水泵把水从一舱输入另一舱,增加阻尼 $q\dot{\theta}(t)$,但由于控制系统的伺服作出响应总有滞后量,故(7.1-1)变为

$$m\ddot{\theta}(t)+C\dot{\theta}(t)+q\dot{\theta}(t-\tau)+k\theta(t)=f(t) \qquad (7.1\text{-}2)$$

$\tau>0$ 是滞后量,这是典型的滞后型微分方程。

虽然,个别的偏差变元微分方程早在 1750 年欧拉(Eulern)的几何问题中已出现,但系统研究则从 20 世纪才开始,这种研究与应用科学,首先是与自动控制有关。

若微分方程之中的未知函数 $\boldsymbol{x}(t)$的自变量 t 引入不同的值,则称之为偏元微分方程。例如

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t))) \qquad (7.1\text{-}3)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\boldsymbol{x}(t-\tau_2)) \qquad (7.1\text{-}4)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau(t)) \qquad (7.1\text{-}5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(\frac{t}{2}),\dot{\boldsymbol{x}}(\frac{t}{2}),\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t)) \qquad (7.1\text{-}6)$$

若最高阶导数的自变量不小于其它各阶导数及未知函数的自变量 t,则称为滞后型微分差分方程,例如(7.1-3)和(7.1-5)式中,$\tau(t)\geqslant0$, 在(7.1-4)式中 $\tau_1>0$, $\tau_2>0$,在(7.1-6)式中 $t\geqslant0$,则 (7.1-3)~(7.1-6)式皆为滞后型微分差分方程。

还有一类称之为中立型微分差分方程,例如

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(t).\boldsymbol{x}(t-\tau),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)) \qquad \tau>0 \qquad (7.1\text{-}7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=g(t,\boldsymbol{x}(t).\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau(t)),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau(t))\ddot{\boldsymbol{x}}(t-\tau(t))) \qquad (7.1\text{-}8)$$

最高阶导数的自变量取不同值。

一般的滞后型微分差分方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=g(t,\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{y}(t-\tau_1(t)),\cdots,\boldsymbol{y}(t-\tau_m(t))\qquad \tau_i(t)\geqslant 0 \tag{7.1-9}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\widetilde{\Psi}(t)\in E_{t_0}=\{t_0-\sup_{t\geqslant t_0}\tau_i(t),i=1,\cdots,m\}$$

设它的右端足够光滑,保证 Cauhy 问题的解存在唯一性。

要研究任意解 $\hat{y}(t)$的稳定性,只要作代换 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\hat{y}(t)$就等价地化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m(t)) \tag{7.1-10}$$

的零解的稳定性。

设 $\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{f}\in[I\times\overbrace{R^n\times R^n\times,\cdots,R^n}^{m个},R^n]$

下面仅就滞后型微分差分方程(7.1-10)式给出稳定性的各种定义,至于中立型方程,读者不难给出类似定义。

定义 7.1.1 称系统(7.1-10)式的零解稳定,若$\forall t_0\in I,\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon,t_0)>0,\forall\xi(t)\in E_{t_0}$当$\|\xi(t)\|<\delta$,就有

$\|\boldsymbol{x}(t,t_0\ \xi)\|<\varepsilon$ 对一切$t\geqslant t_0$成立。

其中 $\delta(\varepsilon,t_0)$与 t_0 无关,则称(7.1-10)式零解一致稳定。

若系统(7.1-10)式的零解是稳定的,且$\exists\sigma(t_0)>0,\ \forall\xi(t)\in E_{t_0}$,当$\|\xi(t)\|<\sigma$ 有

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\xi)\|=0$$

则称(7.1-10)式的零解渐近稳定。

定义 7.1.2 称系统(7.1-10)的零解一致渐近稳定,若它一致稳定,且存在 $\sigma>0$(δ 不依赖于 t_1),对于$\forall\varepsilon>0,\exists T(\varepsilon)>0$(不依赖于 t_1),当 $t>t_1+T(\varepsilon)$, $\|\boldsymbol{\xi}(t)\|<\sigma$,有$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{\xi})\|<\varepsilon$。其中 $\boldsymbol{\xi}(t)$是定义在 E_{t_1}上的任意函数,$t_1\geqslant t_0$。

定义 7.1.3 称系统(7.1-10)的零解指数稳定,若存在 $\delta>0,a>0,B\geqslant 1$ 使得当

$$\|\boldsymbol{\xi}\|<\delta,\ t>T\text{时}\qquad\text{有}$$

$$\| \boldsymbol{x}(t,t_0,\xi) \| \leqslant B(\max_{t\in E_{t_0}} \| \boldsymbol{\xi} \|)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)} \quad (7.1\text{-}11)$$

定义7.1.4 称系统(7.1-10)的零解为全局渐近稳定,若它是稳定的,且对任意始值函数 $\boldsymbol{\xi}(t)$成立。

$$\lim_{t\to\infty} \| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{\xi}) \| = 0$$

对于中立型方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = f(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m(t)), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_1(t)),\cdots,\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau_m(t))) \\ \boldsymbol{x}(t) = \xi(t) \quad t\in E_{t_0} \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\xi} \qquad t\in E_{t_0} \end{cases} \quad (7.1\text{-}12)$$

只需在定义7.1.1～7.1.4中将初始条件 $\| \varphi(t) \| < \delta$,改为 $\| \boldsymbol{\xi}(t) \| < \delta$, $\| \dot{\xi}(t) \| < \delta$,便可得到(7.1-12)式的零解类似于定义7.1.1～定义7.1.4的各种稳定性定义。

对于时滞系统,有以下几种稳定性的提法。

1)具有小时滞 τ(即 $0<\tau\ll 1$)的动力系统,略去小时滞后,变微分差分动力系统为常微分方程动力系统,问两者稳定性是否等价;

2)确定时滞 τ 的扰动范围,使 τ 在此范围内变化,其系统的稳定性保持不变;

3)有些问题,τ 的大小难以确定,则允许 $\tau\in R_+$,不加任何限制,此时的稳定性称为全时滞稳定性,或无条件(绝对)稳定性,也有书上称为时滞无关稳定性。

本章重点介绍第3)类稳定性,至于第1)类稳定性,在专著[166、172]中都有详细介绍,这里就略去了。

§2 常系数线性时滞系统[130、132]

考虑一般的常系数线性时滞系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - \gamma_k \cdot r) \qquad (7.2\text{-}1)$$

这里　　$x \in R^n$,每个 A_k 是 $n \times n$ 实的常数矩阵,$r = (r_1, \cdots, r_m)$,$\gamma_k = (\gamma_{k_1}, \cdots, \gamma_{k_m})\gamma_{k_j} > 0$ 是已知非负整数。

$$\gamma_k \cdot r = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{k_j} \cdot r_j \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

(7.2-1)式的特征方程为

$$f(\lambda, r, A) = \det\left[\lambda I - A_0 - \sum_{k=1}^{N} A_k \mathrm{e}^{-\lambda \gamma_k \cdot r}\right] = 0 \; (7.2\text{-}2)$$

这里　　$A = (A_0, A_1, \cdots, A_N) \in R^{n^2(n+1)}$

如同常微分方程常系数线性方程组,特征方程(7.2-2)式的根的分布对(7.2-1)式的零解的稳定性起决定性作用。

引理 7.2.1　(7.2-1)式的零解是全时滞渐近稳定的充要条件是

1)在(7.2-2)式中当时滞为零时,

$$f(\lambda, 0, A) = \det\left[\lambda I - \sum_{k=0}^{N} A_k\right] = 0$$

的根全在复平面左半部,即 $Re\lambda < 0$。

2) $f(iy, r, A) = \det\left[iyI - A_0 - \sum_{k=1}^{N} A_k \mathrm{e}^{-\lambda \gamma_k \cdot r}\right] \neq 0 \quad \forall y \in R$

这个引理的思想实质很简单,条件 1)表明(7.2-2)式的特征根在 $r = 0$ 时,全分布在复平面左半部,利用根对系数的连续依赖性,如果特征根到复平面右半边或虚轴上,则必在某一个 $\tau_0 > 0$ 时刻达到虚轴,但条件 2)排除了这种可能,从而结论成立。

若(7.2-2)式有正实部特征值,则(7.2-1)式的零解是不稳定的,但判定(7.2-2)式的特征值的分布极难,本节,我们将给出判定稳定性的一些简便的充分条件。

定义 7.2.1　系统(7.2-1)式被称为关于(r, A)是渐近稳定的,若特征方程(7.2-2)式仅有负实部特征值,即 $Re\lambda < 0$ 。

对于给定的 $r \in (R^+)^m$,通过 r 的射线 Γ_r 定义为

$$\Gamma_r \overset{\text{def}}{=} \{\alpha r \in (R^+)^m \ \alpha \geqslant 0\} \tag{7.2-3}$$

定义 7.2.2 对于给定的 $r^{\circ} \in (R^+)^M$ 关于 r 的**渐近稳定锥** $S_{r^{\circ}}$ 定义为

$$S_{r^{\circ}} \overset{\text{def}}{=} \{A \in R^{n^2(N+1)} \mid \text{方程(7.2-1)对每个 } r \in \Gamma_{r^{\circ}} \text{是关于}(r, A)\text{渐近稳定的}\} \tag{7.2-4}$$

渐近稳定锥 S 被定义为[132]

$$S = \bigcap_r (S_r : r \in (R^+)^m) \tag{7.2-5}$$

以 $Re\lambda(A)$表示矩阵 A 的特征值的实部。需要以下引理。

引理 7.2.2 设 $G(g_{ij})_{n\times n}$是一个复矩阵,且 $H(h_{ij})_{n\times n}$是一个 M 矩阵,这里

$$h_{ij} = \begin{cases} |g_{ij}| & i = j = 1,2,\cdots,n \\ -|g_{ij}| & i \neq j \quad i,j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

则 $\det G(g_{ij}) \neq 0$

证:因为 H 是一个 M 矩阵,故存在常数 $\beta_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 使得

$$|g_{ii}|\beta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \beta_j |g_{ij}| > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{7.2-6}$$

从 Gershgoring 圆盘定理知零不是矩阵 $G\text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$的特征值,故

$$\det(G\text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)) = \det G \det(\text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)) \neq 0$$

但 $$\det \text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n) = \prod_{i=1}^{n} \beta_i \neq 0$$

故有 $$\det G \neq 0,\text{引理得证。}$$

引理 7.2.3[130] 给定两个矩阵 $H(h_{ij})$,$\tilde{H}(\tilde{h}_{ij})$若

1) H 为一个 M 矩阵。

2) $h_{ij} \leqslant \tilde{h}_{ij} \quad i,j = 1,2,\cdots,n, \tilde{h}_{ij} \leqslant 0 \qquad i \neq j \qquad i,j = 1,2,\cdots,n$,则 $\tilde{H}$ 也是一个 M 矩阵。

证:由 M 矩阵的性质知,H 是一个 M 矩阵当且仅当存在 n

$$-\sum_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(k)}|=b_{ii}>0 \qquad (7.2\text{-}7)$$

由引理 7.2.3 知 $B(b_{ij})_{n\times n}$是一个 M 矩阵。

由引理 7.2.2 有

$$\det_{\substack{s_j\in C\\|s_j|=1}}[iyI-A_0-\sum_{k=1}^{N}A_k s_{r_{k_1}}\cdots s_{r_{k_m}})]\neq 0$$

又由条件有　　$Re\left(\sum_{k=1}^{N}A_k\right)<0$

根据引理 7.2.1,知系统(7.2-1)式的零解渐近稳定。

推论 7.2.1　若 $b_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$,且下列条件中的任何一个满足

1) $b_{jj}>\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}|b_{ij}| \qquad j=1,2,\cdots,n$

2) $b_{ii}>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_{ij}| \qquad i=1,2,\cdots,n$

3) $b_{ii}>\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|b_{ij}|+|b_{ji}|) \qquad i=1,2,\cdots,n$

4) $\sum_{\substack{ij=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{|b_{ij}|}{|b_{ii}|}\right)^2<1$

5) $b_{ii}^2>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{2}(|b_{ii}b_{ij}|+|b_{ji}b_{jj}|)$

且 $Re\lambda\left(\sum_{k=1}^{N}A_k\right)<0$　　(特别地　$a_{ii}^{(0)}<0,i=1,2,\cdots,n$),则 $A\in S$ 即系统(7.2-1)的零解渐近稳定。

证:根据 M 矩阵的性质,可知上述条件中的任何一个蕴涵 $B(b_{ij})_{n\times n}$是一个 M 矩阵,故定理 7.2.1 的条件成立。

例 1　考虑一个系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} \tag{7.2-8}$$

假设 1) $a_{11}^{(0)} + a_{22}^{(0)} + a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} < 0$ 且

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(0)} + a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(0)} + a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(0)} + a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} > 0$$

2) $|a_{ii}^{(0)}| - |a_{ii}^{(1)}| > 0 \quad i = 1,2$ 且

$$(|a_{11}^{(0)}| - |a_{11}^{(1)}|)(|a_{22}^{(0)}| - |a_{22}^{(1)}|) - (|a_{12}^{(0)}| + |a_{12}^{(1)}|)(|a_{21}^{(0)}| + |a_{21}^{(1)}|) > 0$$

则 $(A_0, A_1) \in S$

因为 $(A_0, A_1) \in S$ 当且仅当

1°) $Re\lambda(A_0 + A_1) < 0$

2°) $\forall \tau > 0, \forall y \in R$

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(1)} e^{-iy\tau} - iy & a_{12}^{(0)} + a_{12}^{(1)} e^{-iy\tau} \\ a_{21}^{(0)} + a_{21}^{(1)} e^{-iy\tau} & a_{22}^{(0)} + a_{22}^{(1)} e^{-iy\tau} - iy \end{vmatrix} \neq 0$$

显然 1°)与 1)等价，现证 2°)蕴涵 2)成立。

事实上

$$\begin{aligned} |\Delta| &\geqslant |(a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(1)} e^{-iy\tau} - iy)(a_{22}^{(0)} + a_{22}^{(1)} e^{-iy\tau} - iy)| \\ &\quad - |(a_{12}^{(0)} + a_{12}^{(1)} e^{-iy\tau})(a_{21}^{(0)} + a_{21}^{(1)} e^{-iy\tau})| \\ &\geqslant |a_{11}^{(0)} + a_{11}^{(1)} \cos\tau y| \, |a_{22}^{(0)} + a_{22}^{(1)} \cos\tau y| \\ &\quad - (|a_{12}^{(0)}| + |a_{12}^{(1)}|)(|a_{21}^{(0)}| + |a_{21}^{(0)}|) \\ &\geqslant (|a_{11}^{(0)}| - |a_{11}^{(1)}|)(|a_{22}^{(0)}| - |a_{22}^{(1)}|) \\ &\quad - (|a_{12}^{(0)}| + |a_{12}^{(1)}|)(|a_{21}^{(0)}| + |a_{21}^{(1)}|) > 0 \end{aligned}$$

故 $\Delta \neq 0$，从而 $(A_0, A_1) \in S$，即系统(7.2-8)的零解渐近稳定。

例 2 对于标量方程

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k x(t - \tau_k) \tag{7.2-9}$$

从定理 7.2.1 可知,若

若 $|a_0| > \sum_{k=1}^{N} |a_k|$ 且 $a < 0$

则 $a \in S$,即系统(7.2-9)的零解渐近稳定。

J.H.Hale 曾提出了如下问题,系统(7.2-1)的渐近稳定锥是否具有凸性,即若 $A \in S, \hat{A} \in S$,问 $\alpha A + (1-\alpha)\tilde{A}$ 是否也属于 S, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,这个问题的意义在于,如 S 是凸的,则可由两个稳定的系统进行凸组合,可以派生出无穷多个稳定系统。

一般地,答案是否定的,除了纯量系统和系数是对称的系统[132]。

下面给出了系统(7.2-1)的稳定锥是凸的充分条件。

定理 7.2.2[130] 假设系统(7.2-1)满足

1) $a_{ii}^{(0)} < 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$

2)$_1$ $b_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{\alpha} |b_{ij} + b_{ji}| > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$ 或

2)$_2$ $b_{ii} - \sqrt{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (b_{ii}b_{ij} + b_{jj}b_{ji})/2} > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$ 或

2)$_3$ $B(b_{ij})_{n\times n}$ 是一个 M 矩阵。

其中 b_{ij} 如定理 7.2.1 中所定义,满足条件 1)和 2),$q(q=1,2,3)$ 的系统记为 $S_{(q)}$

则 $S_{(q)} \subset S$ 且 $S_{(q)}$ 是凸的。

证:$\forall A, \hat{A} \in S_1, \forall \alpha \in [0\ 1]$,有

$$\alpha A + (1-\alpha)\hat{A} = \left(\alpha \sum_{k=0}^{N} a_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{N} \hat{a}_{ij}^{(k)}\right)$$

因为 $\qquad a_{ii}^{(0)} < 0, \quad \tilde{a}_{ii}^{(0)} < 0,$ 则

$$\alpha a_{ii}^{(0)} + (1-\alpha)\hat{a}_{ii}^{(0)} < 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\alpha b_{ii} + (1-\alpha)\tilde{b}_{ii} > \alpha \frac{|b_{ij} + b_{ji}|}{2} + (1-\alpha)\frac{|\tilde{b}_{ij} + \bar{b}_{ji}|}{2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} |\alpha b_{ij} + (1-\alpha)\tilde{b}_{ij} + \alpha b_{ji} + (1-\alpha)\tilde{b}_{ji}|$$

即 $\alpha b_{ii}+(1-\alpha)\hat{b}_{ii}-\frac{1}{2}|\alpha b_{ij}+(1-\alpha)\tilde{b}_{ij}+\alpha b_{ji}+(1-\alpha)\hat{b}_{ji}|>0$

且 $\alpha A+(1-\alpha)\hat{A}\in S_1$　　故 S_1 是凸的。

$S_1\subset S$ 在定理 7.2.1 中已证。

类似地,能证明 $S_2\subset S$ 是凸的。

$S_3\subset S$ 已在定理 7.2.1 中证明了,现证 S_3 是凸的。

$\forall A,\hat{A}\in S_3,\forall\alpha\in[0,1],a_{ii}^{(0)}<0,\ \tilde{a}_{ii}^{(0)}<0$,有

$$\alpha a_{ii}^{(0)}+(1-\alpha)a_{ii}^{(0)}<0,\ \alpha\in[0,1]$$

因为 $B,\tilde{B}$ 是对称的,则 $\alpha B+(1-\alpha)\hat{B}$ 也是对称的,也是一个 M 矩阵,故 $\alpha A+(1-\alpha)\hat{A}\in S_3$, 因而 S_3 是凸的。

§3　常系数线性中立型系统[130、132]

考虑一般常系数线性中立型系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\boldsymbol{x}(t)-\sum_{k=1}^{N}B_k\boldsymbol{x}(t-\gamma_k,r)\Big]=A_0\boldsymbol{x}(t)+\sum_{k=1}^{N}A_k\boldsymbol{x}(t-\gamma_k r)\tag{7.3-1}$$

其中 B_k 是 $n\times n$ 实数矩阵,其它记号与(7.2-1)式中相同。

为了研究(7.3-1)式的稳定性,首先研究差分系统

$$\boldsymbol{x}(t)-\sum_{k=1}^{N}B_k\boldsymbol{x}(t-\gamma_k r)=0\tag{7.3-2}$$

(7.3-2)式的特征方程为

$$e(\lambda,r,B)\overset{\text{def}}{=}\det\Big[I-\sum_{k=1}^{N}B_ke^{-\lambda\gamma_k r}\Big]=0$$

定义 7.3.1[132]　称系统(7.3-2)式是关于(r,B)一致渐近稳定的,若

$$\{Re\lambda:e(\lambda,r,B)=0\}\cap[-\delta,+\infty]=\varnothing\tag{7.3-3}$$

定义7.3.2　称系统(7.3-2)式关于(r°,B)是局部渐近稳定,若存在 r°的一个邻域$U(r^\circ)$使得$\forall r\in U(r^\circ)$系统(7.3-2)式关于 B 是渐近稳定的,若对每个 $r\in(R^+)^M$, (7.3-2)式关于$(r,$

B)是渐近稳定的,称为(7.3-2)式关于 B 全局渐近稳定。

注意:请读者注意这里与 Ляпунов 意义下的渐近稳定,全局渐近稳定是有区别的。

下面来介绍如何判定这种稳定性。

令
$$\eta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=1}^{N} | b_{ij}^{(k)} & i = j, i, j = 1,2,\cdots,n \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{N} | b_{ij}^{(k)} | & i \neq j, i, j = 1,2,\cdots n \end{cases} \tag{7.3-4}$$

定理7.3.1 [130] 若 $(\eta_{ij})_{n\times n}$ 是一个 M 矩阵,则(7.3-2)式是关于 B 全局渐近稳定的。

证:$\forall \mu(\theta), |\mu(\theta)| \geqslant 1$

$$| \mu(\theta) - \sum_{k=1}^{N} b_{ii} e^{i\gamma_k\theta} | \geqslant | \mu(\theta) | - \sum_{k=1}^{N} | b_{ii}^{(k)} |$$

$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{N} | b_{ii}^{(k)} | > 0 \quad | - \sum_{k=1}^{N} b_{ij} e^{i\gamma_k\theta} |$$

$$\geqslant - \sum_{k=1}^{N} | b_{ij}^{(k)} |$$

根据引理 7.2.2、7.2.3 可知

$$\det\left[\mu(\theta) I - \sum_{k=1}^{N} B_k e^{i\gamma_k\theta}\right] \neq 0$$

即(7.3-2)式关于 B 是全局渐近稳定的。

推论 7.3.1 若

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} | b_{ij}^{(k)} | < 1 \qquad i = 1,2,\cdots n$$

或
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} | b_{ij}^{(k)} | < 1 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

则(7.3-2)式是关于 B 为全局渐近稳定。

在讨论中立型方程(7.3-1)式的稳定性时,恒设(7.3-2)式是一致渐近稳定的。

下面来研究中立型系统(7.3-1)式的稳定性,(7.3-1)式的特征方程为

$$g(\lambda,r,A,B)\overset{\text{def}}{=}\det\{\lambda\left(I-\sum_{k=1}^{N}B_k e^{-\lambda\gamma_k r}\right)-A_0-\sum_{k=1}^{N}A_k e^{-\lambda\gamma_k r}\}\tag{7.3-5}$$

这里 $A=(A_0,A_1,\cdots,A_N)\quad B=(B_1,\cdots,B_N)$

定义7.3.3 称系统(7.3-1)式关于(r,A,B)一致渐近稳定,若

$$\{Re\lambda,g(\lambda,r,A\,B)=0\}\cap[-\delta,+\infty]=\phi\tag{7.3-6}$$

定义7.3.4 对于给定的 $r^\circ\in(R^+)^M$,称

$S_{r^\circ}=\{(A,B)\in R^{n^2(N+1)}\times R^{n^2(N+1)}$,方程(7.3-1)关于$(r,A,B)$对每个 $r=\alpha r^\circ,\alpha\geqslant0$ 是渐近稳定的$\}$为关于 r°的渐近稳定锥。

令 $S=\bigcap\limits_{r}\{S_r:\in(R^+)^M\}$ 为渐近稳定锥。 (7.3-7)

引理 7.3.1 对于(7.3-1)式,$(A,B)\in S_r$ 的充要条件是

1) $Re\left[\left(I-\sum\limits_{k=1}^{N}B_k\right)^{-1}\sum\limits_{k=0}^{N}A_k\right]<0$ (7.3-8)

2) $g(iy,\alpha,r,A,B)\neq0$ 对所有 $y\in R,y\neq0,\alpha\geqslant0$, (7.3-9)

这个引理如同引理 7.2.1 思想是简单的,故略去证明。

令

$$\sigma_{ij}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}|a_{ij}^{(0)}+iy|-\sum\limits_{k=1}^{N}|b_{ii}^{(k)}iy|-\sum\limits_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(k)}| \\ i=j=1,2,\cdots,n \\ -\sum\limits_{k=1}^{N}|iyb_{ij}^{(k)}|-\sum\limits_{k=1}^{N}|a_{ij}^{(k)}| \\ i\neq j\;i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{7.3-10}$$

$$\eta(\eta_{ij}) \overset{\text{def}}{=} \left[\left(I - \sum_{k=1}^{N} B_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} A_k \right] \tag{7.3-11}$$

$$\tilde{\eta}_{ii} = \begin{cases} -\delta_{ij} & i = j = 1,2,\cdots,n \\ -|\delta_{ij}| & i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{7.3-12}$$

定理7.3.2[130] 若对所有 $y \in R, \alpha \geqslant 0, \sigma(\sigma_{ij})_{n\times n}$是一个$M$矩阵,且$(\tilde{\eta}_{ij})_{n\times n}$也是一个$M$矩阵,则$(A,B)\in S_r$,即(7.3-1)式是全局渐近稳定的。

证:根据定理条件及引理7.2.2引理7.2.3我们易证

$$g(iy, \alpha\gamma, A, B)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \det\left[iy\left(I - \sum_{k=1}^{N} B_k e^{-iy_k \alpha r}\right) - A_0 - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-iY r_k \alpha r} \right] \neq 0$$

对所有的 $\alpha \geqslant 0$ 和 $y \in R$,从而引理7.3.1的条件2)成立。

又由 $\tilde{\eta}(\tilde{\eta}_{ij})_{n\times n}$是一个$M$矩阵可知,$\eta(\eta_{ij})$是稳定的,即

$$Re\lambda\left[\left(I - \sum_{k=1}^{N} B_k\right)^{-1} \sum_{k=0}^{N} A_k \right] < 0 \tag{7.3-13}$$

引理7.3.1的条件1)成立,这样$(A,B)\in S_r$。

推论7.3.2 若下列条件满足

$$1)\ |-a_{ii}^{(0)} - iy| > \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} |b_{ij}^{(k)} iy| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} |a_{ij}^{(k)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^{(0)}|$$

2) $-\eta_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \eta_{ij} \quad i = 1,2,\cdots,n$,则 $(A,B)\in S_r$ 即(7.3-1)是全局渐近稳定的。

证:易于验证引理7.3.1的条件满足。

推论7.3.3 若下列条件成立

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}|a_{ii}^{(0)}| > \sum_{j=1}^{n} \sum_{k-1}^{N} |a_{ij}^{(k)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(0)}|$与

$\frac{1}{\sqrt{2}} > \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} |a_{ij}^{(k)}|$同时成立;

2) 推论7.3.2的条件2)满足。

则$(A,B)\in S_r$,即(7.3-1)是全局稳定的。

证:因为

$$|-a_{ii}^{(0)}+iy|=\sqrt{(a_{ii}^{(0)})^2+y^2}\geqslant\frac{|a_{ii}^{(0)}|}{\sqrt{2}}+\frac{|iy|}{\sqrt{2}}$$

$$>\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}|b_{ij}^{(k)}iy|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}|a_{ij}^{(k)}|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}^{(0)}|$$

故推论 7.3.2 的条件全满足,从面推论 7.3.3 结论成立。

下面令

$$(\xi_{ij})_{n\times n}\overset{\text{def}}{=}-\left(I-\sum_{k=1}^{N}B_k s_1^{\gamma_{k1}},\cdots,s_m^{\gamma_{km}}\right)^{-1}\times\left(A_0+\sum_{k=1}^{N}A_k s_1^{\gamma_{k1}},\cdots,s_m^{\gamma_{km}}\right)$$

$$\bar{\xi}_{ij}=\begin{cases}|\xi_{ij}| & i=j=1,2,\cdots,n\\ -|\xi_{ij}| & i\neq j,j,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

仿定理 7.3.24 可证。

定理 7.3.3 若(7.3-1)式满足:

1) 定理 7.3.1 的条件;

2) $(\bar{\xi}_{jj})_{n\times n}$是一个$M$矩阵;

3) $(\tilde{\eta}_{ij})_{n\times n}$是一个$M$矩阵。

则 $(A,B)\in S$, 即(7.3-1)式是全局稳定的。

J.K,Hale 曾提出中立型(7.1-2)式的渐近稳定锥是否为凸集,回答是否定的,反例如下[130]:

例 1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-\tau))=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

$$N=1,n=2\quad \boldsymbol{x}\in R^2 \tag{7.3-14}$$

取

$$B^{(1)}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\qquad A_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}\qquad A_1^{(1)}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$$

$$B^{(2)}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/3\end{bmatrix}\qquad A_0^{(2)}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}\qquad A_1^{(2)}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

可以验证$(A_0^{(1)},A_1^{(1)},B^{(1)})\in S$, $(A_0^{(2)},A_1^{(2)},B^{(2)})\in S$

取 $r=\dfrac{1}{2}$

$$B = rB^{(1)} + (1-r)B^{(2)} = \frac{5}{12}I$$

$$A_0 = rA_0^{(1)} + (1-r)A_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = rA_1^{(1)} + (1-r)A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Re\lambda\left[(I-B)^{-1}(A_0+A_1)\right] = Re\lambda\begin{bmatrix} \frac{-60}{7} & \frac{75}{7} \\ \frac{75}{7} & \frac{-60}{7} \end{bmatrix} \nless 0$$

故 $(A\ B)\overline{\in} S$,从而 S 不是凸集。

故为使中立型渐近稳定锥是凸的,尚需加条件。

定理 7.3.4[130] 对于纯量中立型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t) - \sum_{k=1}^{N} b_k x(t-\gamma_k)\right] = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{N} a_k x(t-\gamma_k) \tag{7.3-15}$$

S 是凸集。

证:根据文献[132]可知$(a,b)\in S$,当且仅当下列条件成立。

1) $\sum_{k=1}^{N} |b_k| < 1$

2) $\sum_{k=1}^{N} a_k < 0$,且 $\sum_{k=0}^{N} |a_k| \leqslant |a_0|$

今选取 $a_i^{(j)}, b_i^{(j)}$ $(i=1,2,\cdots,N, j=1,2)$ 使满足条件 1)、2),于是有 $a_0^{(j)} < 0$,对于 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 有

$$\sum_{k=1}^{N} \left| rb_k^{(1)} + (1-r)b_k^{(2)} \right| \leqslant r\sum_{k=1}^{N} \left| b_k^{(1)} \right| + (1-r)\sum_{k=1}^{N} \left| b_k^{(2)} \right|$$

$$\leqslant \max\left[\sum_{k=1}^{N} \left| b_k^{(1)} \right|, \sum_{k=1}^{N} \left| b_k^{(2)} \right|\right] < 1$$

$$\sum_{k=0}^{N} ra_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{N} (1-r)a_k^{(2)} = r\sum_{k=1}^{N} a_k^{(1)} + (1-r)\sum_{k=1}^{N} a_k^{(2)} < 0$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left|ra_k^{(1)}+(1-r)a_k^{(2)}\right|\leqslant r\sum_{k=1}^{N}\left|a_k^{(1)}\right|+(1-r)\sum_{k=1}^{N}\left|a_k^{(1)}\right|$$
$$\leqslant r\left|a_0^{(1)}\right|+(1-r)\left|a_0^{(2)}\right|$$
$$=\left|ra_0^{(1)}+(1-r)a_0^{(2)}\right|$$

这意味着 S 是凸的。

定理 7.3.5[130] 在(7.3-1)式中设 $B_k \overset{\text{def}}{=} \text{diag}(b_{11}^{(k)},\cdots,b_{nn}^{(k)})$,且满足

1) $\sum_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(k)}\right|<1 \qquad i=1,2,\cdots n$

2) $a_{ii}^{(0)}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$

$$\left|a_{ii}^{(0)}\right|>\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ii}^{(k)}\right|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(0)}\right| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

即 S_1 为满足 1)、2)的(A,B)全体,则

$(A,B)\in S_1\subset S$, S_1 是凸的。

证:令

$$\mu_{ij}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(k)}\right|}\left(\left|a_{ii}^{(0)}\right|-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|a_{ii}^{(k)}\right|\right)\\ \qquad i=j=1,2,\cdots,n\\ -\dfrac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(k)}\right|}\left(\sum\limits_{k=0}^{N}\left|a_{ij}^{(k)}\right|\right)\\ \qquad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{7.3-16}$$

由条件 1)、2)及引理 7.2.2,引理 7.2.3 易证 $S_1\subset S$。

现只证 S_1 是凸的。

对于$(A^{(1)},B^{(1)})\in S_1$, $(A^{(2)},B^{(2)})\in S_1$ 令

$$(A,B)\overset{\text{def}}{=}(\gamma A^{(1)}+(1-\lambda)A^{(2)},\gamma B^{(1)}+(1-\gamma)B^{(2)})$$
$$0\leqslant\gamma\leqslant 1$$

$\tilde{\mu}_{ij}\overset{\text{def}}{=}$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\left(\left|\gamma a_{ii}^{(1.0)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.0)}\right|-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|\gamma a_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.k)}\right|\right)}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|\gamma b_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}\right|} \\
\qquad i,j=1,2,\cdots,n \\
\dfrac{-\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\left|\gamma a_{ij}^{(1.k)}+(1-\gamma)a_{ij}^{(2.k)}\right|\right)}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}\left|\gamma b_{ii}^{(2.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}\right|} \\
\qquad i\neq j \qquad i,j=1,2,\cdots,n
\end{cases}
\tag{7.3-17}
$$

$$
\sum_{k=1}^{N}\left|\gamma b_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}\right|\leqslant\gamma\sum_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(1.k)}\right|+(1-\gamma)
$$

$$
\sum_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(2.k)}\right|\leqslant\max\left(\sum_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(1.k)}\right|,\sum_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(2.k)}\right|\right)<1 \tag{7.3-18}
$$

因为 $a_{ii}^{(j,0)}<0 \quad j=1,2,\cdots,n$ 则

$$
\gamma a_{ii}^{(1,0)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2,0)}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\gamma a_{ii}^{(1.0)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.0)}\right| &= \gamma\left|a_{ii}^{(1.0)}\right|+(1-\gamma)\left|a_{ii}^{(2.0)}\right| \\
&> \gamma\left[\sum_{k=1}^{N}\left|a_{ii}^{(1,k)}\right|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left|a_{ij}^{(1,k)}\right|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(1.0)}\right|\right] \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{N}\left|\gamma a_{ii}^{(1,k)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2,k)}\right| \\
&\quad+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\gamma a_{ij}^{(1,0)}+(1-\gamma)a_{ij}^{(2,0)}\right|
\end{aligned}
$$

故定理 7.3.3 的条件满足,从而 S_1 是凸的。

定理 7.3.6[130] 设 $B_k=\mathrm{diag}(b_{11}^{(k)},\cdots b_{nn}^{(k)}) \quad k=1,2,\cdots,N$,且

1) $\sum\limits_{k=1}^{N}\left|b_{ii}^{(k)}\right|<1 \qquad i=1,2,\cdots,n$

2) $a_{ii}^{(0)}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$, 且$(\mu_{ij})_{n\times n}$是一个对称正定

矩阵。

则 $(A,B)\subset S_2\subset S$，且 S_2 是凸的。

证:用定理 7.3.5 类似的方法可证 $S_2\subset S$，今证 S_2 是凸的。

$\forall (A^{(1)},B^{(1)})\in S_2,(A^{(2)},B^{(2)})\in S_2$，考虑

$$(A,B)=(\gamma A^{(1)}+(1-\gamma)A^{(2)},\gamma B^{(1)}+(1-\gamma)B^{(2)})$$

取(7.3-17)式,故(7.3-18)式成立,故定理 7.3.5 的条件 1)成立。

因为 $a_{ii}^{(j,0)}<0$，则有

$$\begin{aligned}
&|\gamma a_{ii}^{(1.0)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.0)}|\\
&\quad-\left(|\gamma a_{ii}^{(1.0)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.0)}|\right.\\
&\quad\left.-\sum_{k=1}^{N}|\gamma a_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)a_{ii}^{(2.k)}|\right)\\
&\geqslant\gamma|a_{ii}^{(1.0)}|+(1-\gamma)|a_{ii}^{(2.0)}|\\
&\quad-\gamma\sum_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(1.k)}|-(1-\gamma)\sum_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(2.k)}|
\end{aligned}$$

$$\gamma\mu_{ij}^{(1)}\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\left(\gamma|a_{ii}^{(1.0)}|-\gamma\sum_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(1.k)}|\right)}{1-\sum_{k=1}^{N}|\gamma b_{i}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}|} & i=j=1,2,\cdots,n\\[2ex]
\dfrac{-\gamma\sum_{k=0}^{N}|a_{ij}^{(1.k)}|}{1-\sum_{k=1}^{N}|\gamma b_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}|} & i\neq j\quad i,j=1,2,\cdots,n
\end{cases}$$

$$(1-\gamma)\mu_{ij}^{(2)}\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\left((1-\gamma)|a_{ii}^{(2.0)}|-(1-\gamma)\sum_{k=1}^{N}|a_{ii}^{(2.k)}\right)}{1-\sum_{k=1}^{N}|\gamma b_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}|} & i=j=1,2,\cdots,n\\[2ex]
\dfrac{(1-\gamma)\sum_{k=0}^{N}|a_{ij}^{(2.k)}|}{1-\sum_{k=1}^{N}|\gamma b_{ii}^{(1.k)}+(1-\gamma)b_{ii}^{(2.k)}|} & i\neq j\quad i,j=1,2,\cdots,n
\end{cases}$$

因为$(\mu_{ij}^{(1)})$、$(\mu_{ij}^{(2)})$是对称正定的，对于$\gamma\in[0,1]$，则

$(\gamma\mu_{ij}^{(1)})$，$((1-\gamma)\mu_{ij}^{(2)})$、$(\gamma\mu_{ij}^{(1)}+(1-\gamma)(\mu_{ij}^{(2)}))$也是对称正定的，故$S_2$是凸的。

§4 Ляпунов 函数与泛函法[165~167]

对于非线性时滞型微分差分方程组解的稳定性，Ляпунов 函数法、Ляпунов 泛函方法是一般的方法。

为了不使符号的繁杂而掩盖了主要的思想，宁可考虑比(7.1-10)式更简洁的系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\tag{7.4-1}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n$　　$\boldsymbol{f}\in C[I\times R^n\times R^n,R^n]$　　$\boldsymbol{f}(t,0,0)\equiv 0$

$$0\leqslant\tau(t)<\infty$$

对于(7.4-1)式，可以完全仿照前面关于常微分方程的稳定性基本定理证明以下定理(详细证明留给读者作为练习)。

定理 7.4.1　若在某区域 $G_H\overset{\mathrm{def}}{=}\{(t,\boldsymbol{x}),t\geqslant t_0\,\|\boldsymbol{x}\|<H\}$上存在正定的函数 $V(t,\boldsymbol{x})$使得

$$D^+V|_{(7.4\text{-}1)}\leqslant 0$$

特别地 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}f_i(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\leqslant 0$

则(7.4-1)式的零解稳定。

定理 7.4.2　若在某区域 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$使得

$$D^+V|_{(7.4\text{-}1)}\leqslant 0$$

特别地 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i}f_i(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\leqslant 0$

则(7.4-1)式的零解一致稳定。

定理 7.4.3　若在某区域 G_H 上存在具有无穷小上界的正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$使得

$$D^{+} V|_{(7.4\text{-}1)} \leqslant 0 \text{ 负定}$$

特别地 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau(t)))$负定，则(7.4-1)式的零解一致渐近稳定。

若 $G_H = R^n$，则定理 7.4.3 的结论为全局一致渐近稳定。

定理 7.4.4 若在 G_H 上存在函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C[I \times G_H, R]$ 满足

1) $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant k(H)\|\boldsymbol{x}\| \qquad \boldsymbol{x} \in G_H$

2) $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}1)} \leqslant -cV(t, \boldsymbol{x}) \quad c>0$，则(7.4-1)式的零解指数稳定。

若 $G_H = R^n$，则定理 7.4.4 的结论便为全局指数稳定。

定理 7.4.5 若存在函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C[G_H, R^1]$使得 $V(t, 0)=0$，且

1) 对 $t \geqslant t_0$ 在原点任意邻域内有 $V>0$ 的区域存在；

2) 在区域 $V>0$ 中，$V(t, \boldsymbol{x})$有界；

3) 在 $V>0$ 中$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}1)}$正定。

则(7.4-1)式的零解不稳定。

例 1 考虑一个非线性时滞系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1(1+x_2^2(t-\tau)) + 2x_2(t)x_1(t-\tau)x_2(t-\tau) \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -3x_2(t)x_1(t-\tau)x_2(t-\tau) - x_2(2+\sin x_1(t-\tau)) \end{cases} \tag{7.4-2}$$

的零解的稳定性。

作 $V(\boldsymbol{x}) = (3x_1^2 + 2x_2^2)/2$ 则它是无穷大正定的。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.4\text{-}2)} = 3x_1^2(1+x_2^2(t-\tau)) - 2x_2^2(2+\sin x_1(t-\tau))$$

$$\leqslant -3x_1^2 - 2x_2^2 < 0 \quad \text{当 } \boldsymbol{x} \neq 0$$

故(7.4-2)式的零解是全局指数稳定的。

一般地，V 函数的导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的表达式中既含有状况变量 x_1，$x_2,\cdots,x_n$，又含有时滞的状况变量 $x_1(t-\tau(t))\cdots x_n(t-\tau(t))$，判定$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的负定，往往相当困难，一种克服这个困难的方法是判定$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$关于 $2n$ 个变元$\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)\boldsymbol{x}_1(t-\tau(t))\cdots\boldsymbol{x}_n(t-\tau(t))$的负定，然后由全体变元的负定，推出关于部分变元 $\boldsymbol{x}_1(t)\cdots\boldsymbol{x}_n(t)$的负定；另一种克服这个困难的方法是后面要介绍的 Разумихин 型定理。

定理 7.4.6

1)若存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C[G_H,R^*]$及 $\varphi_1,\varphi_2\in K$，使得在 G_H 上成立。

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

2) $V(t,\boldsymbol{x})$沿(7.4-1)式的解的 Dini 导数满足

$$\begin{aligned}D^+V(t,\boldsymbol{x})\mid_{(7.4\text{-}1)}&\overset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}[V(t+h,\boldsymbol{x}(t+h,\boldsymbol{x}_0))\\&\quad-V(t,\boldsymbol{x}_0)]\\&\leqslant g(t)F(V(t,\boldsymbol{x}(t)))\end{aligned}$$

当 $\quad V(t_{+1}\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(t)) \qquad (7.4\text{-}3)$

其中 $\quad F(V)>0$，当 $V>0,F(0)=0$

3)

$$\lim_{h\to0^+}\int_b^a\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}=+\infty \qquad (7.4\text{-}4)$$

$a>b,\ g(t)\geqslant0,\ \int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=M>0$

则(7.4-1)式的零解一致稳定。

证：作方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\bar{g}(t)F(y)\qquad\bar{g}(t)=g(t)+\frac{1}{t^2+1}\qquad(7.4\text{-}5)$$

由条件 3)可知存在 $y_0>0$，使得

$$\int_{y_0}^{\varepsilon_1}\frac{\mathrm{d}y}{F(y)}=\overline{M}=\int_0^{+\infty}\bar{g}(t)\mathrm{d}t\qquad(7.4\text{-}6)$$

设 $y(t)$ 为(7.4-5)式之解，$y(t_0)=y_0>0$，则

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{F(y)} = \int_{t_0}^{t} \bar{g}(s)\mathrm{d}s < \int_{0}^{+\infty} \bar{g}(s)\mathrm{d}s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{M} = \int_{y_0}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{F(y)} \quad (7.4\text{-}7)$$

故 $\quad 0 < y(t) < \varepsilon_1 \qquad t \geqslant t_0$

今取 $0 < \delta < y_0$，及 $\varphi_2(\delta) < y_0$ $\quad (7.4\text{-}8)$

设所取初始函数 $\xi(t)$ 满足

$$\|\xi\| < \delta$$

下面证(7.4-1)式满足初始函数 $\|\xi\|\leqslant\delta$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{x}(t, t_0,\xi)$ 使得

$$V(t,\boldsymbol{x}(t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} V(t) \leqslant y(t) \qquad t \geqslant t_0 \qquad (7.4\text{-}9)$$

若不然，则存在 $t_1>t_0$，使

$$V(t)\leqslant y(t) \qquad t\leqslant t_1$$

$$V(t_1) = y(t_1)$$

及存在 $0<r\ll1$，有无穷多个 $\overline{t_i}(i=1,2,\cdots)$，使 $\overline{t_i}\to\infty$，$\overline{t_i}\in[t_i, x_i+r]$ 及 $V(\overline{t_i})>y(\overline{t_i})$。

由上极限概念知

$$D^+V(t_1)\geqslant\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_1}=\bar{g}(t_1)F(y(t_1))=\bar{g}(t_1)F(V(t_1)) \qquad (7.4\text{-}10)$$

而 $\quad V(\xi)\leqslant V(t_1) \qquad t_1-r\leqslant\xi\leqslant t_1$

$$D^+V(t_1)\leqslant g(t_1)F(V(t_1))<\bar{g}(t_1)F(V(t_1)) \qquad (7.4\text{-}11)$$

这与(7.4-10)式矛盾，故(7.4-9)式成立。

于是 $\qquad \varphi_1(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(t)\leqslant g(t)<\varepsilon_1\leqslant\varphi(\varepsilon)$

从而 $\qquad \|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$

因 $\delta<y_0$ 与 t_0 无关，故(7.4-1)式的零解为一致稳定。

推论 7.4.1 若

1)定理 7.4.6 条件 1)成立。

2)定理 7.4.6 的条件 2)换为

$$D^+V(t,\boldsymbol{x})\mid_{(7.4\text{-}1)}\leqslant 0$$

则(7.4-1)式的零解一致稳定。

这就是 Разумихин 定理并用于微分差分方程系统(7.4-1)的零解稳定性的情况。

定理 7.4.7 假设下列条件成立:

1) 定理 7.4.6 的条件 1)满足;

2) 存在非负连续函数 $F(t,\boldsymbol{x}),\Psi(t,\boldsymbol{x})$,使 $\forall\sigma>0$, 当 $|\boldsymbol{x}|\geqslant\delta,t\geqslant t_0$ 有

$$F(t,|\boldsymbol{x}(t)|)\geqslant\Psi(t,\sigma)\geqslant 0 \quad \text{及} \qquad (7.4\text{-}12)$$

$$\int_{t_0}^{t}\Psi(t,\sigma)\mathrm{d}t\Rightarrow+\infty\ (\text{关于 } t_0 \text{ 一致})\ \text{当 } r\to+\infty \qquad (7.4\text{-}13)$$

3) 存在连续非减函数 $P(s)>s$, 当 $s>0$,

$$\text{当}\ V(t)-\tau(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\leqslant P(t,\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{有} \qquad (7.4\text{-}14)$$

$$D^{+}V(t,\boldsymbol{x}(t))|_{(7.4\text{-}1)}\leqslant -F(t,\boldsymbol{x}(t)) \qquad (7.4\text{-}15)$$

则(7.4-1)式的零解为一致渐近稳定。

证:记 $\boldsymbol{x}(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi),\quad V(t)\overset{\mathrm{def}}{=}V(t,\boldsymbol{x}(t))$

因为
$$-F(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\frac{1}{t^2+1}V(t)$$

故定理 7.4.6 的条件满足,从而(7.4-1)的零解一致稳定。

再证零解为一致渐近稳定。

$\forall\sigma<\varepsilon_1<H$, $\exists\delta>0$, 当始函数 $|\varphi|<\delta$ 有 $|\boldsymbol{x}(t_0)|<H$ 及

$$V(t,\boldsymbol{x}_0)<\varphi_2(\varepsilon_1) \qquad t\geqslant t_0$$

$$\forall\eta>0 \qquad \eta<\min(\varepsilon_1,\delta)$$

使得 $\quad 0<\varphi_1(\eta)<\varphi_2(\varepsilon)$

现在要证 $\exists t_N$,当 $t\geqslant t_N$ 时有 $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\eta$

为此,令

$$a=\inf[P(s)-s]>0,\ \text{当}\ \varphi_1(\eta)\leqslant s\leqslant\varphi_2(\varepsilon_1)$$

又存在 $\sigma>0$, 使得 $\varphi_1(\eta)\geqslant\varphi_2(\sigma)>0$, 故当

$\varphi_2(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|)\geqslant\varphi_1(\eta)\geqslant\varphi_2(\sigma)>0$ 时,有 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\geqslant\sigma>0$

及
$$F(t,\|\boldsymbol{x}(t_0)\|)\geqslant\Psi(t,\sigma) \qquad (7.4\text{-}16)$$

设 N 为正整数,使

$$\varphi_1(\eta) + Na \geqslant \varphi_2(\varepsilon_1) > \varphi_1(\eta_1) + (N-1)a \tag{7.4-17}$$

则必存在 $T_1 \geqslant t_0 + r$ 使得

$$V(T_1) < \varphi_1(\eta) + (N-1)a \tag{7.4-18}$$

若不然,则有

$$V(t) \geqslant \varphi(\eta) + (N-1)a \qquad t \geqslant t_0 + r$$

而

$$P(V(t)) \geqslant V(t) + a \geqslant \varphi_1(\eta) + Na$$

$$\geqslant \varphi_2(\varepsilon_1) > V(\xi) \qquad \text{当 } t - r \leqslant \xi \leqslant t$$

因为

$$\varphi_2(\| \boldsymbol{x}(t) \|) \geqslant V(t) \geqslant \varphi_1(\eta) > \varphi_2(\sigma)$$

$\| \boldsymbol{x}(t) \| \geqslant \sigma$, 由条件 2),3) 得到

$$D^+ V(t) \leqslant - F(t, \| \boldsymbol{x}(t) \|) \leqslant - \Psi(t,\sigma) \qquad t \geqslant t_0 + r$$

从而$V(t) \leqslant V(t_0 + r) - \int_{t_0-r}^{t} \Psi(s,\sigma)\mathrm{d}s \to -\infty$,当 $t \to \infty$,

这不可能,故(7.4-18)式成立。

由于 $D^+ V(t) \leqslant 0$, 故对一切 $t \geqslant T_1$,有

$$V(t) \leqslant \varphi_2(\eta) + (N-1)a$$

重复上述方法,必有 $T_2, \cdots T_N$,使

$$V(t) \leqslant \varphi_2(\eta) + (N-l)a \qquad t \geqslant T_l \qquad l = 2, \cdots N$$

随之有

$$\varphi_1(\| \boldsymbol{x}(t) \|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}(t) \leqslant \varphi_1(\eta) \qquad t \geqslant T_N$$

故

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| \leqslant \eta \qquad t \geqslant T_N$$

由于 η 的任意性,故(7.4-11)式的零解一致渐近稳定。

推论7.4.2 假设定理 7.4.7 的条件成立,而$F(t, \| \boldsymbol{x}(t_0) \|) = \Psi(t) W(\| \boldsymbol{x}(t_0) \|)$,$\Psi(t) > 0, t \geqslant t_0$, 且对任意的 $\beta > 0$, 存在 $\alpha(\beta) > 0$, 使$\int_{t_1}^{t} \Psi(s)\mathrm{d}s \geqslant \beta$,对 $t \geqslant t_1 + \alpha(\beta)$ 一致地成立(与 $t_1 \geqslant t_0 \geqslant 0$ 无关),则(7.4-1)式的零解为一致渐近稳定。

特别地取 $\Psi(t) \equiv 1$, 推论 7.4.2 的一切条件成立,则(7.4-1)

式的零解一致渐近稳定。

这就是泛函微分方程渐近稳定性的 Разумихин 定理在微分差分方程方面的情况。

例 2　考虑一个二维时滞系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dfrac{1}{3}x_1(t-\tau(t)) + \dfrac{1}{2}x_2(t-\tau(t)) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) - 4x_2(t) + \dfrac{2}{3}x_1(t-\tau(t)) + \dfrac{1}{2}x_2(t-\tau(t)) \end{cases} \tag{7.4-19}$$

研究零解的稳定性(其中 a_{12}, a_{21} 为实常数)。

作 Ляпунов 函数

$$V(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$$

$$\begin{aligned} D^+V(x_1,x_2)|_{(7.4\text{-}19)} &\leqslant (-3+|a_{21}|)|x_1(t)| \\ &\quad + (-4+|a_{12}|)|x_2(t)| \\ &\quad + |x_1(t-\tau(t))| + |x_2(t-\tau(t))| \\ &\leqslant (-3+|a_{21}|)|x_1(t)| \\ &\quad + (-4+|a_{12}|)|x_2(t)| \\ &\quad + |x_1(t)| + |x_2(t)| \\ &= (-2+|a_{21}|)|x_1(t)| \\ &\quad + (-3+|a_{12}|)|x_2(t)| \end{aligned}$$

当
$$|x_1(t-\tau(t))| + |x_2(t-\tau(t))| \leqslant |x_1(t)| + |x_2(t)|$$

故根据定理 7.4.6 的推论 7.4.1,当 $|a_{21}| \leqslant 2$, $|a_{12}| \leqslant 3$,(7.4-19)式的零解是稳定的。

当 $|a_{21}| < 2$, $|a_{12}| < 3$, 根据定理 7.4.7 的推抡可知(7.4-19)式的零解为一致渐近稳定。

事实上,令　　$2 - |a_{21}| = \varepsilon_1$, $3 - |a_{12}| = \varepsilon_2$

取 $P(S) = (1 + \frac{1}{2}\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))S$

于是　当 $V(x_1(t-\tau(t)), x_2(t-\tau(t))) \leqslant PV(x_1(t), x_2(t))$

有 $D^{+}V(x_1,x_2)|\leqslant(-3+|a_{21}|)|x_1(t)|$

$$
\begin{aligned}
&+(-4+|a_{12}|)|x_2(t)\\
&\leqslant+|x_1(t-\tau(t))|+|x_2(t-\tau(t))|\\
&\leqslant(-3+|a_{21}|)|x_1(t)|\\
&\quad+(-4+|a_{12}|)|x_2(t)|\\
&\quad+(1+\frac{1}{2}\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))(|x_1(t)|+|x_2(t)|)\\
&\leqslant(-3+\frac{1}{2}\varepsilon_1+|a_{21}|)|x_1(t)|\\
&\quad+(-4+\frac{1}{2}\varepsilon_2+|a_{21}|)|x_2(t)|\\
&<0 \quad 当 \quad x_1^2+x_2^2\neq 0
\end{aligned}
$$

且 $V(x_1(t-\tau(t),x_2(t-\tau(t)))\leqslant P(V(x_1(t),x_2(t))$
故(7.4-19)式的零解为一致渐近稳定。

例 3　讨论时滞系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt}=-a_{11}^2x_1(t)-a_{12}x_2(t)+b_{11}x_1(t-\tau(t)\\
\qquad +b_{12}x_2(t-\tau(t))\\
\dfrac{dx_2}{dt}=2a_{12}x_1(t)-a_{22}^2x_2(t)+b_{21}x_1(t-\tau(t))\\
\qquad +b_{22}x_2(t-\tau(t))
\end{cases}
\tag{7.4-20}
$$

给定参数变化范围,使之保证零解的稳定性。

作　$V(x_1x_2)=x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}\Big|_{(7.4\text{-}20)}&=-2a_{11}^2x_1^2(t)-a_{22}^2x_2^2(t)+2b_{11}x_1(t)x_1(t-\tau(t))\\
&\quad+2b_{12}x_1(t)x_2(t-\tau(t))+b_{21}x_2(t)x_1(t-\tau(t))\\
&\quad+b_{22}x_2(t)x_2(t-\tau(t))\\
&\leqslant-2a_{11}^2x_1^2(t)-a_{22}^2x_2^2(t)+b_{11}^2x_1^2(t)+x_1^2(t-\tau(t))\\
&\quad+2b_{12}^2x_1^2(t)+\frac{x_2^2(t-\tau(t))}{2}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{b_{21}^2}{4}x_2^2(t)+x_1^2(t-\tau(t))$$
$$+\frac{b_{22}^2}{4}x_2^2(t)+x_2^2(t-\tau(t))$$
$$=-\left[2a_{11}^2-b_{11}^2-2b_{12}^2\right]x_1^2(t)-\left[a_{22}^2-\frac{b_{21}^2}{4}-\frac{b_{22}^2}{2}\right]$$
$$x_2^2(t)+2V(x_1(t-\tau(t)),x_2(t-\tau(t)))$$
$$\leqslant-\left[2a_{11}^2-b_{11}^2-2b_{12}^2-2\right]x_1^2(t)$$
$$-\left[a_{22}^2-\frac{b_{21}^2}{4}-\frac{b_{22}^2}{4}-1\right]x_2^2(t)$$

故当$\begin{cases}2a_{11}^2\geqslant b_{11}^2+2b_{12}^2-2\\ a_{22}^2\geqslant\dfrac{b_{21}^2}{4}+\dfrac{b_{22}^2}{2}-1\end{cases}$ 时，系统(7.4-20)式的零解稳定。

当上述两个不等式都取严格不等号时，可仿例 1 的证明能证系统(7.4-20)式的零解全局渐近稳定。

下面介绍 Красовский 引进 Ляпунов 泛函来代替 Ляпунов 函数去研究稳定性，这种思想和方法成了泛函微分方程稳定性研究的主要方法之一。

引进以下 $C[-\tau,0]$空间连续函数的几种不同函数。

$$\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau=\sup_{\substack{-\tau\leqslant s\leqslant 0\\1\leqslant i\leqslant n}}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau^2=\left[\int_{-\tau}^0\sum_{i=1}^n x_i^2(s)\mathrm{d}s\right]^{1/2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

定义7.4.1 泛函 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$，$t\geqslant t_0$，$-\tau\leqslant s\leqslant 0$ 称为正定的，若存在 $\varphi_1\in K$，使得 $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(s))$，称 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$ 是具有无穷小上界的，若存在 $\varphi\in K$ 使得 $V(t,\boldsymbol{x}(s))\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)$。

类似地可以定义泛函 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$的负定性，径向无界性。

以 $\boldsymbol{x}_t(\xi)$ 表示(7.4-1)式满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t)=\xi(t), -\tau\leqslant t\leqslant 0$ 的解。

定理 7.4.8 若在 $G_H=\{(t,\boldsymbol{x})\ \|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau<H, t\geqslant t_0\}$ 上存在具有无穷小上界的正定泛函 $V(t,\boldsymbol{x}(s))\ (-\tau\leqslant s\leqslant 0, t\geqslant t_0)$，使得沿(7.4-1)式的解求 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$ 的 Dini 导数。

$$D^+V(t,\boldsymbol{x}(s))|_{(7.4\text{-}1)}\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}(V(t+h,\boldsymbol{x}_{t+h}(\xi)) - V(t,\boldsymbol{x}_t(\xi)))\leqslant 0 \tag{7.4-21}$$

则(7.4-1)式的零解一致稳定。

证:设存在 $\varphi_1,\varphi_2\in K$, 满足

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(s))\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)$$

$\forall\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<H)$,选取 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得 $\varphi_2(\delta)<\varphi_1(\varepsilon)$,于是当 $\|\xi(s)\|<\delta$ 时,有

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}_t(\xi)\|\leqslant V(t,\boldsymbol{x}_t(\xi))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_{t_0}(\xi)) = V(t_0,\xi(s))$$
$$\leqslant\varphi_2(\|\xi\|_\tau)\leqslant\varphi_2(\delta)<\varphi_1(\varepsilon)$$

从而

$$\|\boldsymbol{x}_t(\xi)\|_T<\varepsilon$$

故(7.4-1)式的零解一致稳定。

定理 4.7.9 若在 G_H 上存在具有无穷小上界的正定泛函 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$使得沿(7.4-1)式的解 $V(t,\boldsymbol{x}(s))$的 Dini 导数是负定的,则(7.4-1)式的零解一致渐近稳定。

证:设存在 $\varphi_1,\varphi_2\in K$,及正定的 W,使得

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}(s))\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau)$$

$$D^+V(t,\boldsymbol{x}(s))|_{(7.4\text{-}1)}\leqslant -W(\boldsymbol{x}(0)) \tag{7.4-22}$$

由于定理 4.7.8 的条件已蕴涵定理 4.7.9 的条件满足,故(7.4-1)式的零解是一致稳定的。

现证一致吸引。

$\forall\eta>0$,取 $\sigma(\eta)>0$,使得

$$\sup_{\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau\leqslant\sigma_1(\eta)}V(t,\boldsymbol{x}(s))<\inf_{\|\boldsymbol{x}(s)\|_\tau=\eta}V(t,\boldsymbol{x}(s))\quad t\geqslant t_0 \tag{7.4-23}$$

现证存在 $T>0$，当 $t^*=t_0+T$，有

$$\| x_{t^*}(\xi)\|_\tau < \sigma(\eta)$$

若不然，设有

$$\sigma(\eta)\leqslant \| x_t(\xi)\|_\tau \leqslant H, 令 \quad \alpha=\inf_{\sigma\leqslant\|x\|\leqslant H} W(x)$$

故在 $\sigma\leqslant\|x\|\leqslant H$ 上有

$$D^+ V(t,x(s))\leqslant -\alpha$$

从而对一切 $t\geqslant t_0$，有下列不等式

$$V(t,x_t(\xi))\leqslant V(t_0,x_{t_0}(\xi))-\alpha(t-t_0)\rightarrow +\infty \qquad 当 t\rightarrow\infty$$

故 存在 $T<\frac{1}{2}V[t_0 x_{t_0}(\xi)]+\alpha t_0$

使得 $\| x_T(\xi)\|_\tau<\sigma(\eta)$， 故当 $t>t_0+T$ 时 有

$$\| x_t(\xi)\| < \eta, \quad 而 \sigma(\eta) 不依赖于 t_0。$$

故零解是一致渐近稳定的。

定理 7.4.10

1）若存在泛函 $V(t,x(s))$ 及 $\varphi_1,\varphi_2,W_1,W_2K$，和正定函数满足

$$V(t,x(s))\leqslant \varphi_1(\| x(0)\|)+\varphi_2(\| x(\xi)\|_\tau^2)$$

$$V(t,x(s))\geqslant W_1(\| x(0)\|)$$

2）$D^+V(t,x(s))|_{(7.4\text{-}1)}\leqslant -W_2(\| x(0)\|)$

则(7.4-1)式的零解一致渐近稳定。

证：可以仿照定理 7.4.8 和定理 7.4.9 的证明完成此定理的证明，略。

例 4 考虑 n 维常系数常时滞线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax(t)+Bx(t-\tau) \qquad (7.4\text{-}24)$$

其中 $R\in R^n$，A、B 均为 $n\times n$ 常数矩阵，$\tau=\text{const}>0$ 。

此方程的零解的稳定性，可由特征值方法解决，现不用特征值法而用 Ляпунов 泛函法。

设 A 稳定，故任给一个 $n\times n$ 对称正定矩阵 D，Ляпунов 矩阵方程

$$A^TC + CA = -D$$

有对称正定矩阵解 $C_{n\times n}$选取一个对称正定矩阵$G_{n\times n}$。

选 Ляпунов 泛函

$$V(x) = x^TCx + \int_{t-\tau}^{t} x^T(s)Gx(s)\mathrm{d}s \qquad (7.4\text{-}25)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7.4\text{-}24)} = -x^T(t)Dx(t) + 2x^T(t)CBx(t-\tau) + x^T(t)Gx(t) - x^T(t-r)Gx(t-r) \qquad (7.4\text{-}26)$$

把上式右边看作是关于 $x(t),x(t-\tau)$的二次型,且对矩阵 A,B 附加条件,使之可求得 C、G,使上面二次型(7.4-26)式负定,从而(7.4-24)式的零解渐近稳定,为此,只须要

$\begin{bmatrix} D-G & -CB \\ -B^TC & G \end{bmatrix}$负定便可使(7.4-24)式的零解渐近稳定。

其中,这个条件还可以减弱,只需要上述二次型关于 $x(t)$ 负定就行了,没有必要关于 $x(t),x(t-\tau)$都负定。

§5 一类分离变量的非线性微分差分方程[137]

分离变量的非线性微分差分方程组是自动控制、神经网络中常见的系统,本章介绍一类非线性分离变量的系统及研究这类系统经典的 Ляпунов 泛函方法。

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)f_k(x_k(t)) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)f_k(x(t,-\tau(t))) \quad i=1,\cdots n \qquad (7.5\text{-}1)$$

这里 $a_{ik}(t),b_{ik}(t)\in C[I,R]$, $f_k(x_k)\in((-\infty,\infty),R](i,k=1,2\cdots n)$ 。设(7.5-1)式的 Cauchy 问题的解是全局存在唯一的。$0\leqslant\tau(t)\leqslant\Delta=\mathrm{const}$。

定理 7.5.1 若(7.5-1)式满足条件:

1) $f_k(x_k), x_k > 0$，当 $x_k \neq 0, f_k(0) = 0, \int_0^{+\infty} f_k(x_k)\mathrm{d}x_k = +\infty$

2) $\tau(t)$ 可微，且 $\quad 1 - \tau'(t) \geqslant \delta > 0$

3) $[M - N(n-1)]\sqrt{\delta} > nW$，其中

$$-M \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\sup_{t \in [t_0, +\infty]} a_{ii}(t)\right\} < 0$$

$$N \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \neq k \leqslant n}\left\{\sup_{t \in [t_0, +\infty]} |a_{ik}^{(k)}|\right\}$$

$$W \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i, k \leqslant n}\left\{\sup_{t \in [t_0, +\infty]} |b_{ik}(t)|\right\}$$

则(7.5-1)式的零解全局稳定。

证：取 $\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{M}{n} - \frac{N(n-1)}{n}\right]$ 则由条件 3)，$\mu > 0$，作 Ляпунов 泛函

$$V(\boldsymbol{x}(\theta), t) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i} f_i(x_i)\mathrm{d}x_i + n\mu\int_{-\tau(t)}^{0}\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t+\theta))\mathrm{d}\theta$$

显然当 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$，$V(\boldsymbol{x}(\theta), t) \to +\infty$，$V(\boldsymbol{x}(\theta), t)$ 正定，沿(7.5-1)式对 V 求导

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7.5\text{-}1)} = &\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} + \mu n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t))\right] \\
&- \mu n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\right][1 + \tau'(t)] \\
= &\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) f_i^2(x_i(t)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik}(t) f_i(x_i(t) f_k(x_k(t)) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_i(t))\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t) f_k(x_k(t-\tau(t)))\right] \\
&+ \mu n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t))\right] \\
&- \mu n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(t-\tau(t))\right][1 - \tau'(t)]
\end{aligned}$$

$$\leqslant -\left\{\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu\right]n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k^2(t))\right]\right.$$

$$- W\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |f_i(x_i(t))||f_k(x_k(t-\tau(t)))|$$

$$\left.+\left[\mu n(1-\tau'(t))\right]\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\right]\right\}$$

$$\leqslant \left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu\right]n\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t))\right]$$

$$- W\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |f_i(x_i(t))||f_k(x_k(t-\tau(t)))|$$

$$+ n\mu\delta\left[\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\right] \qquad (7.5\text{-}2)$$

(7.5-2)式的最后一个和式是 n^2 个形如

$$-\{[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu]f_i^2(x_i(t)) - W|f_i(x_i(t))|$$
$$|f_k(x_k(t-\tau(t)))|(+\mu\delta f_k^2(x_k(t-\tau(t))))\}$$
$$(i,k=1,2,\cdots n) \qquad (7.5\text{-}3)$$

的二项式之和。

因为 $\mu\delta=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}\right]\delta>0$

$$\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}\right]>0$$

$$4\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu\right]\mu\delta=\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}\right]^2\delta>W^2$$

故(7.5-3)式中每个关于 $f_i(x_i(t)), f_k(x_k(t-h(t)))$的二次三项式均是关于 f_i、f_k 负定的，从而

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7.5\text{-}1)}$关于 $f_i(x_i(t)), f_k(x_k(t-\tau(t)))$负定。

今由条件 1)、2)可知

$$-\left\{\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu\right]f_i^2(x_i(t))\right.$$
$$-W|f_i(x_i(t))||f_k(x_k(t-\tau(t)))|$$

$$+\mu f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\}\leqslant 0 \tag{7.5-4}$$

当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = 0$, (7.5-4) 式取等号,

但 $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_i) \neq 0$, 当且仅当$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$。

故$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}|_{(7.5\text{-}1)}$关于 $\boldsymbol{x}$ 负定,从而(7.5-1)式零解全局稳定。

若在系统(7.5-1)中,时滞 $\tau(t)=\tau=\text{const}$,定理 7.5.1 中条件中 2)自然成立,则有

推论 7.5.1 若

1)定理 7.5.1 的条件 1)成立。

2)$M-N(n-1)>nW$

则(7.5-1)式中当 $\tau(t)=\tau=\text{const}$ 时,零解全局稳定。

下面考虑不确定系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) f_k(x_k(t)) + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t) f_k(x_k(t, -\tau(t)))$$
$$+ \varphi_i[t, x_1(t), \cdots x_n(t), x_1(t, -\tau(t)) \cdots x_n(t-\tau(t))] \tag{7.5-5}$$

其中 $a_{ij}(t), b_{ij}(t), f_k(x_k), \tau(t)$与系统(7.5-1)中假设相同,持续摄动函数 φ 的具体形式是未知的,仅知道满足下列有界性条件:

$$|\varphi_i(t, x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n)| \leqslant \beta\left[\sum_{k=1}^{n} |f_k(x_k)|\right]$$
$$+ r\left[\sum_{k=1}^{n} |f_k(y_k)|\right] \qquad i = 1, 2, \cdots n \tag{7.5-6}$$

其中 r, β 为非负常数。

定理 7.5.2 若(7.5-1)式满足:

1) 定理 7.5.1 的条件 1);

2) 定理 7.5.1 的条件 2);

3) $\left(\frac{M-N(n-1)}{n}\beta\right)\sqrt{\delta} > (W+r)$

其中 M、N、$W\delta$ 为定理 7.5.1 所定义。

则(7.5-5)式的零解在 φ 持续摄动下是全局 Robust 稳定的。

证:取 $\mu=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta\right]$ 则 $\mu>0$

作正定的径向无界的 Ляпунов 泛函

$$V(x(\theta),t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{x_k}f_k(x_k)\mathrm{d}x_k+\mu n\int_{-\tau(t)}^{0}\sum_{k=1}^{n}f_k^2(x_k(\theta+t))\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7.5\text{-}4)}=&\sum_{k=1}^{n}f_k(x_k(t))\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}+\mu n\Big[\sum_{k=1}^{n}f_k^2(x_k(t))\\
&-\mu n\Big[\sum_{k=1}^{n}f_k(x_k(t-\tau(t)))\Big](1-\tau'(t)\Big]\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)f_i^2(x_i(t))\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq k}}^{n}a_{ik}(t)f_i(x_i(t))f_k(x_k(t))\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)f_i(x_i(t))f_k(x_k(t-\tau(t)))\\
&+\beta\Big[\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_i(t))|\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_i-\tau(t))|\Big]\\
&+r\Big[\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_i(t))|\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_i(t-\tau(t)))|\Big]\\
&+\mu n\Big[\sum_{k=1}^{n}f_k^2(x_k(t))\\
&-\Big[\sum_{k=1}^{n}f_k(x_k(t-\tau(t)))\Big](1-\tau'(t))\\
\leqslant&-\Big\{\Big[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu-\beta\Big]n\Big[\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_i(t))\Big]\\
&-(W+r)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|f_i(x_i(t))||f_k(x_k(t-\tau(t)))|\\
&+n\mu(1-\tau'(t))\Big[\sum_{k=1}^{n}f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

$$\leqslant -\left\{\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu-\beta\right]n\left[\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_i(t))\right]\right.$$

$$-(W+r)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|f_i(x_i(t))||f_k(x_k(t-\tau(t)))|$$

$$\left.+n\mu\delta\left[\sum_{k=1}^{n}f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\right]\right\}$$

(7.5-6)式的最后一和式是 n^2 个形如

$$\left\{\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu-\beta\right]f_i^2(x_i(t))\right.$$

$$-W|f_i(x_i(t))|$$

$$\left.|f_k(x_k(t-\tau(t)))|+\mu\delta f_k^2(x_k(t-\tau(t)))\right\}$$

$$i,k=1,2,\cdots n \tag{7.5-7}$$

的二次三项式之和。

因为 $\quad \mu\delta=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta\right] \qquad \delta>0$

$$\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\mu-\beta\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta\right]>0$$

$$4\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta-\mu\right]\cdot\mu\delta=\left[\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta\right]^2\delta$$

$$>(W+r)^2$$

(7.5-7)式关于 $f_i(x_i(t)),f_k(x_k(t-h(t)))$ 负定，从而$\frac{dV}{dt}|$关于 $f_i(x_i(t)),f_k(x_k(t-\tau(t)))$ $(i,k=1,2,\cdots n)$负定，进而类似于定理 7.5.1 的证明的最后部分，知$\frac{dV}{dt}|_{(7.5\text{-}1)}$关于 $\boldsymbol{x}(t)$负定，从而(7.5-4)式的零解在 φ 持续摄动下是 Robust 全局稳定的。

推论 7.5.2 若

1) $\tau(t)=\tau=\text{const}$ 且定理 7.5.2 的条件成立。

2) $$\frac{M}{n}-\frac{N(n-1)}{n}-\beta>W+r$$

则(7.5-4)式的零解在 φ 持续摄动下 Robust 全局稳定。

§6 一类区间生态时滞系统[139]

考虑一个区间 Lotka - Volterra 生态时滞系统

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(t)\left(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t - \tau_j)\right) \tag{7.6-1}$$

其中系数和时滞不确切知道，仅知其上、下界。

令

$$A_I \overset{\text{def}}{=} \{A = (a_{ij})_{n\times n} \quad \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A} \quad 即 \underline{a_{ij}} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a_{ij}} \quad i,j = 1,2,\cdots,n\}$$

$$B_I \overset{\text{def}}{=} \{B = (b_{ij})_{n\times n} \quad \underline{B} \leqslant B \leqslant \overline{B} \quad 即 \underline{b_{ij}} \leqslant b_{ij} \leqslant \overline{b_{ij}} \quad i,j = 1,2,\cdots,n\}$$

$$r_I \overset{\text{def}}{=} \{r = (r_1,\cdots,r_n)^T \quad \underline{r} \leqslant r \leqslant \overline{r} \quad 即 \underline{r_i} \leqslant r_i \leqslant \overline{r_i} \quad i = 1,2,\cdots,n\}$$

$$\tau_I \overset{\text{def}}{=} \{\tau = (\tau_1,\cdots,\tau_n)^T \quad \underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau} \quad 即 \underline{\tau_i} \leqslant \tau_i \leqslant \overline{\tau_i} \quad i = 1,2,\cdots,n\}$$

进而设每个 $r \in I_r, A \in A_I, B \in B_I, \tau \in \tau_l$，(7.6-1)式有唯一解。

定义 7.6.1 $\forall r \in r_I, A \in A_I, B \in B_I, \tau \in \tau_I$，(7.6-1)式对应的唯一的正的平衡位置 $\boldsymbol{x}^*$ 在 $R_+^n \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid x_i > 0, i = 1,\cdots,n\}$ 是稳定的，全局稳定的（关于部分变元 $\{x_1,\cdots x_m\} \subset \{x_1,\cdots,x_n\}$ 是稳定的，全局稳定的），则称(7.6-1)式在 R_+^n 是 Robust 稳定性的，Robust 全局稳定的（关于部分变元是 Robust 稳定的，Robust 全局稳定的）。

定义 7.6.2 $\forall r \in r_I, \forall A \in A_I, \forall B \in B_I, \forall \tau \in \tau_l$，(7.6-1)式具有始值条件 $\boldsymbol{x}(0) > 0$ 的解满足 $0 < \boldsymbol{x}_i(t) \leqslant M < \infty$，且

$$\varliminf_{t\to\infty} x_i(t) > 0 \qquad i = 1,2,\cdots n \quad [0 < \boldsymbol{x}_i(t) \leqslant M < \infty \quad \varliminf_{t\to\infty} x_i(t) > 0,\ i = 1,2,\cdots,M \leqslant n]$$

则称(7.6-1)式是 Robust 共存的[(7.6-1)式关于部分变元 $x_i(i=1,\cdots,m)$],是 Robust 共存的。

定理 7.6.1 假设

1) $\bar{a}_{ii}<0 \quad i=1,2,\cdots,n$

2) $G \overset{\text{def}}{=} -\text{diga}(\bar{a}_{11},\cdots,\bar{a}_{nn})-((1-\delta_{ij})\bar{a}_{ij}^*)_{n\times n}-(b_{ij}^*)_{n\times n})$

是一个 M 矩阵,这里 $a_{ij}^* \overset{\text{def}}{=} \max\{|\underline{a}_{ij}|,|\bar{a}_{ij}|\}$, $\underline{b}_{ij}^* \overset{\text{def}}{=} \max\{|b_{ij}|,|\bar{b}_{ij}|\}$,则(7.6-1)式在 R_+^n 内是 Roboust 全局稳定的。

证:$\forall r\in r_r,\tau\in I_I,A\in A_I,B\in B_I$,设 x^* 是(7.6-1)的正平衡位置,令 $y_i=\ln\left(\dfrac{x_i}{x_i^*}\right)$,即 $x_i=x_i^*e^{y_i} \quad i=1,2,\cdots,n$ 则(7.6-1)式变为

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*(e^{y_j(t)}-1)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j^*(e^{y_i(t-\tau_i)}-1) \tag{7.6-2}$$

故只需让(7.6-2)式的零解全局稳定。

因为 G 为 M 阵,故 $\forall\beta_i>0,\exists c_i>0,i=1,\cdots,n$,满足

$$c_j\bar{a}_{jj}+\sum_{i\neq j}^{n}c_ia_{ij}^*+\sum_{i=1}^{n}c_ia_{ij}^*=-\beta_j \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{7.6-3}$$

采用 Ляпунов 泛函

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(|y_i(t)|+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|x_j^*\int_{t-\tau_j}^{t}|e^{y_j(t)}-1|d\xi\right) \tag{7.6-4}$$

则
$$D^+V|_{(7.6\text{-}2)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i\Big(a_{ii}x_i^*|e^{y_i(t)}-1|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}x_i^*||e^{y_j(t)}-1|$$
$$+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||e^{y_j(t-\tau_j)}-1|+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|x_j^*||e^{y_j(t)}-1|$$
$$-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||x_j^*|e^{y_j(t-\tau_j)}-1|\Big)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(c_j\bar{a}_{jj}x_j^* + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* x_j^* + \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* x_j^*\right)|e^{y_j(t)}-1|$$

$$\leqslant -\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j^* |e^{y_j(t)}-1| < 0 \quad 当\ y\neq 0 \tag{7.6-5}$$

故 $$V(t)\leqslant V(t_0)-\sum_{j=1}^{n}\beta_i x_j^*\int_{t_0}^{t}|e^{y_j(\xi)}-1|\,d\xi\leqslant V(t_0) \tag{7.6-6}$$

因为 $$0\leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}c_i\left(|y_i(t)|+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_j}^{t}|b_{ij}||x_j^*||e^{y_j(\xi)}-1|\,d\xi\right)$$

$$\leqslant V(t_0)<\infty$$

$\sum_{i=1}^{n}|y_i|$ 是有界的,故

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{dy_i}{dt}\right|\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|\dot{a}_{ij}||x_j^*||e^{y_j(t)}-1|$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}||x_j^*||e^{y_i(t)}-1|\leqslant M<\infty$$

对于某一个正数 M,因此 $\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)|$ 是在 $[0,\infty]$ 上一致连续的。

另一方面,从(7.6-6)式推得

$$\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j^*|e^{y_i(\xi)}-1|\,d\xi\leqslant V(t_0)\qquad t\geqslant t_0 \tag{7.6-7}$$

这就推出 $|e^{y_j(\xi)}-1|\in L_1[0,\infty]$。

因此 $|e^{y_j(\xi)}-1|\to 0$, 当 $t\to\infty$, 故结论成立。

注 验证一个矩阵为 M 矩阵有许多充分条件,在此不一一叙述。

特别当 $\underline{A}=\overline{A}=A$, $\underline{B}=\overline{B}=B$, $\underline{r}=\overline{r}=r$, $\underline{\tau}=\overline{\tau}=\tau$,便由定理 7.6.1 推出相应的确定性系统的全局稳定性。

例 1

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1[2-8x_1(t)+2x_2(t)+2x_1(t-\tau)+2x_2(t-\tau)]$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2[-1+2x_1(t)-5x_2(t)+2x_1(t-\tau)+2x_2(t-\tau)]$$

$$(7.6\text{-}8)$$

$x_1^*=1, x_2^*=1$ 是唯一的正的平衡位置，因为

$$\begin{bmatrix} -a_{11}-|b_{11}|, & -|a_{12}|-|b_{12}| \\ -|a_{21}|-|b_{21}|, & -|a_{22}|-|b_{22}| \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{是一个 } M \text{ 矩阵，}$$

故(7.6-8)式的平衡位置 $x_1^*=x_2^*=1$ 是在 R_+^2 内全局稳定的。

定理 7.6.2 假设

1) $\bar{a}_{ii}<0 \quad i=1,2,\cdots,n$

2) 存在常数 $c_j>0$ 使得

$$c_j\bar{a}_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}c_ia_{ij}^*+\sum_{i=1}^{n}c_ib_{ij}^*\leqslant 0$$

则系统(7.6-1)在 R_+^n 内分别是 Robust 稳定的，Robust 持久的。

证：仍用 Ляпунов 泛函(7.6-4)则有

$$V(t)\geqslant\sum_{i=1}^{n}c_i|y_i(t)|>0 \quad y\neq 0$$

$$V(t)\to\infty \qquad \text{当 } |y|\to\infty$$

$$D^+V|_{(7.6\text{-}1)}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Big(c_j\bar{a}_{jj}x_j^*+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}c_ia_{ij}^*x_j^*+\sum_{i=1}^{n}c_ib_{ij}^*x_j^*\Big)|e^{y_j(t)}-1|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Big(c_j\bar{a}_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}c_ia_{ij}^*+\sum_{i=1}^{n}c_ib_{ij}^*\Big)x_j^*|e^{y_j(t)}-1|$$

$$\leqslant 0 \qquad (7.6\text{-}9)$$

因此从 (7.6-9)式可直接得到 Robust 稳定性结论。

由于 $V(t) \leqslant V(t_0)$ 和$\sum_{i=1}^{n} | y_i(t) |$ 的有界性,可知,
存在一个常数 $M>0$ 使得 $x_i \leqslant M$ 和

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} x_i(t) > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

因为 A,B 和 r 任意故,(7.6-1)式是 Robust 共存的。

定理 7.6.3 假设

1) $\bar{a}_{ii} < 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$

2) 存在常数 $c_j > 0, j = 1,2,\cdots,n$ 使得

$$c_j\bar{a}_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* = -\beta_j < 0, j = 1,2,\cdots,m$$

$$c_j\bar{a}_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* + \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* \leqslant 0, j = m+1,\cdots,n$$

则(7.6-1)式在 R_+^n 内关于部分变元 $x_1,\cdots,x_m$,Robust 全局稳定,关于部分变元 $x_{m+1},\cdots,x_n$,Robust 稳定和 Robust 持久。

定理 7.6.4 假设

1) $\bar{a}_{ii} < 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$

2) 存在常数 $c_j > 0 \qquad j = 1,2,\cdots$ 使得

$$c_j\bar{a}_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* + \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* = -\beta_j < 0 \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

$$c_j\bar{a}_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* + \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* \leqslant 0 \qquad j = m+1,\cdots,n$$

则系统(7.6-1)在 R_+^n 内关于部分变元 $x_1,\cdots,x_m$,Robust 全局稳定,关于部分变元 $x_{m+1},\cdots,x_n$,Robust 稳定和 Robust 共存。

证:仍用 Ляпунов 泛函(7.6-4)式

$$D^+ V|_{(7.6\text{-}1)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big(c_j\bar{a}_{jj}x_j^* + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} c_i a_{ij}^* x_j^* + \sum_{i=1}^{n} c_i b_{ij}^* x_j^* \Big) | e^{y_j(t)} - 1 |$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^* \; | e^{y_j(t)} - 1 |$$

故有

$$V(t) \leqslant V(t_0) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j^* \int^t t_0 \mid e^{y_j(\xi)} - 1 \mid d\xi \leqslant V(t_0)$$

$$t \geqslant t_0$$

$\sum_{i=1}^{n} \mid e^{y_i(t)} - 1 \mid$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \mid \frac{dy_i(t)}{dt} \mid$ 在$[t_0, +\infty]$上有界，$y_i(t)$ 在$[t_0, +\infty]$上一致连续。

另一方面

$$\sum_{j=1}^{m} \mid e^{y_j(t)} - 1 \mid \to 0, \text{当 } t \to \infty\text{。即 当 } t \to \infty$$

$$x_i(t) \to x_i^* \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

故 (7.6-1)式关于 $x_1,\cdots,x_n$ 在 R_+^n 内 Robust 全局稳定。

进而 $\sum_{i=m+1}^{n} c_i \mid y_i(t) \mid \leqslant V(t) \leqslant V(t_0) < \infty$

(7.6-1) 式关于 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 是 Robust 稳定和 Robust 共存的。

定理 7.6.5 假设下列条件满足

$$-2\bar{a}_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \mid a_{ij} - a_{ji} \mid^* + \sum_{j=1}^{n} (b_{ij}^* + b_{ji}^*) \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$-2\bar{a}_{ii} \geqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \mid a_{ij} - a_{ji} \mid^* + \sum_{j=1}^{n} (b_{ij}^* + b_{ji}^*) \quad i = m+1,\cdots,n$$

这里 $\mid a_{ij} + a_{ji} \mid^* \stackrel{\text{def}}{=} \max(\mid a_{ij} + a_{ji} \mid) \quad a_{ij} \in [\underline{a_{ij}}, \bar{a}_{ij}]$

则系统(7.6-1)在 R_+^n 内关于 $x_1,\cdots,x_m$，Robust 全局稳定，关于部分变元 $x_{m+1},\cdots,x_n$，Robust 稳定和 Robust 共存。

证：选取常数 $d_i \quad (i=1,2,\cdots,n,)$使得

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}^* < d_i < -\bar{a}_{ii} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \mid a_{ij} + a_{ji} \mid^*$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^* \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}^* \leqslant d_i \leqslant -\bar{a}_{ii} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \mid a_{ij} + a_{ji} \mid - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

$$i = m + 1, \cdots, n$$

构造 Ляпунов 泛函

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* (e^{y_i(t)} - y_i(t) - 1) + \sum_{i=1}^{n} d_i \int_{-\tau_i}^{0} (e^{y_i(t+s)} - 1) ds$$

$$D^+ V(t) |_{(7.6\text{-}1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ii} + d_i) x_i^{*2} (e^{y_i(t)} - 1)^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{2} | a_{ii} + a_{ji} |^* x_i^* x_j^* | (e^{y_j(t)} - 1)(e^{y_j(t)} - 1) |$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^* x_i^* (e^{y_j(t)} - 1) x_j^* (e^{y_j(t-\tau_j)} - 1)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^* (e^{y_i(t-\tau_i)} - 1)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{a}_{ii} + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{2} | a_{ij} + a_{ji} |^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^* \right)$$

$$\cdot x_i^* (e^{y_i(t)} - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} b_{ij}^* - d_i \right)$$

$$\cdot x_i^* (e^{y_i(t-\tau_i)} - 1)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{a}_{ii} + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{2} | a_{ij} + a_{ji} |^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^* \right)$$

$$\cdot x_i^{*2} (e^{y_i(t)} - 1)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} b_{ij}^* - d_i \right) x_i^* (e^{y_i(t-\tau_i)} - 1)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{a}_{ii} + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{2} | a_{ij} + a_{ji} |^* + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^* \right)$$

$$\cdot x_i^{*2} (e^{y_i(t)} - 1)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} b_{ij}^* - d_i \right) x_i^* (e^{y_i(t-\tau_i)} - 1)^2$$

$$\begin{cases} < 0 \\ \leqslant 0 \end{cases} \quad 若 \quad \sum_{i=1}^{m} | y_i(t) | \neq 0$$

故定理 7.6.5 的结论成立。

例 2　考虑如下三维系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1(8 - 6x_1(t) - 8x_2(t) + x_3(t) \\
+ 2x_1(t - \tau_1) + x_2(t - \tau_2) + 2x_3(t - \tau_3)) \\
\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2(-5 + 8x_1(t) - 4x_2(t) + x_3(t) \\
- 2x_1(t - \tau_1) + x_2(t - \tau_2) + 2x_3(t - \tau_3)) \\
\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = x_3(2 - x_1(t) - x_2(t) - 3x_3(t) \\
+ x_1(t - \tau_1) + 2x_2(t - \tau_2))
\end{cases}
\tag{7.6-10}
$$

易知$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1,1,1)$ 是一个平衡位置,系统(7.6-10)在 R_+^3 内关于 x_1 全局稳定,关于 x_2, x_3 稳定共存。

§ 7　时滞不等式及比较方法对变时滞神经网络稳定性的应用

微分不等式和比较原理在常微分方程稳定性中的用途是巨大的,最先把微分不等式推广到微分差分不等式是 Halanay,后来,我国学者徐道义、马万彪、贾宝国、肖冬梅等不断发展了微分差分不等式理论。

这里,首先将 Halanay 一维时滞微分不等式由通常意义下的导数推广到 Dini 导数不等式形式。

引理 7.7.1　推广的 Halanay 一维时滞微分不等式。

设常数 $a > b > 0$,函数 $x(t)$是在$[t_0 - \tau, t]$上定义的非负的一元连续函数,且在此区间上有如下的不等式成立。

$$D^+ x(t) \leqslant -ax(t) + b\bar{x}(t) \tag{7.7-1}$$

其中　$\bar{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{t-\tau \leqslant s \leqslant t} \{x(s)\}$,$\tau \geqslant 0$ 为常数,则在 $t \geqslant t_0$ 上有

$$x(t) \leqslant \bar{x}(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{7.7-2}$$

其中 λ 为下面超越方程的唯一正根。

$$\lambda = a - be^{\lambda\tau} \tag{7.7-3}$$

证:首先证明超越方程(7.7-3)式有唯一正解,考虑

$$\Delta(\mu) = \mu - a + be^{\mu\tau} \qquad \mu \in [0,a]$$

$$\Delta(0) = -a + b < 0 \qquad \Delta(a) = be^{a\tau} > 0$$

$$\Delta'(\mu) = 1 + b\tau e^{\mu\tau} > 0$$

$\Delta(\mu)$是严格单调递增函数。

故在$[0,a]$之上存在唯一的$\lambda \in (0,\alpha)$,满足(7.7-3)式。

令 $y(t) = \bar{x}(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad t_0 - \tau \leqslant t < \beta$ (7.7-4)

设 $k>1$,为任意常数,则

$x(t)<ky(t)$ 在 $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ 上成立。

现假设对某一个 $t\in(t_0,\beta)$,其中 $\beta>t_0$ 是任意的,有 $x(t)=ky(t)$,则因为 $x(t),y(t)$是连续函数,故必存在某 $t_1\in(t_0,\beta)$,使得

$$x(t)<ky(t) \qquad t_0-\tau\leqslant t<t_1 \qquad x(t_1)=ky(t_1) \tag{7.7-5}$$

但另一方面,由于(7.7-1)式,有

$$D^+x(t_1)\leqslant -ax(t_1)+b\bar{x}(t_1)<aky(t_1)+bky(t_1-\tau)$$
$$=ky'(t_1)$$

即 $$D^+x(t_1)<ky(t_1) \tag{7.7-6}$$

(7.7-5)与(7.7-6)式是矛盾的,故对任意的$\beta>t$,有下式

$$x(t) < ky(t) \qquad 对一切 \quad t \in [t_0,\beta]\ 成立。$$

最后令 $k\to1$,便有

$$\boldsymbol{x}(t) \leqslant y(t) = \boldsymbol{x}(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{7.7-7}$$

下面,把一维的不等式推广到高维情况。

设 C^n 为$f\in C[[t-\tau,t],R^n]$的全体函数构成的集合,$G(t,\boldsymbol{x},y)\in C[I\times R^n\times C^n,R^n]$。

定义 7.7.1 称 $G(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是属于 H_n 类函数,若下列条件满足:

1) $\forall t\in I,\forall \boldsymbol{x}\in R^n,\forall \boldsymbol{y}^{(1)},\boldsymbol{y}^{(2)}\in C^n$,当

$y^{(1)}\leqslant y^{(2)}$ (即 $y_i^{(1)}\leqslant y_i^{(2)} \quad i=1,2,\cdots,n$)有

$$G(t,x,y^{(1)}) \leqslant G(t,x,y^{(2)}) \tag{7.7-8}$$

2) $\forall t \in I, \forall \boldsymbol{y} \in C^n, \forall \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)} \in R^n$,当

$$x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \quad (\text{但对某 } i, \text{有 } x_i^{(1)} = x_i^{(2)}) \tag{7.7-9}$$

则对于这些 i 有 $g_i(t,x^{(1)},y) \leqslant g_i(t,x^{(2)},y)$ (7.7-10)

引理7.7.2 若 n 维连续向量函数

$\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \bar{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\zeta \in [t-\tau,t]} \boldsymbol{x}(\zeta), \bar{\boldsymbol{y}}(t) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\zeta \in [t-\tau,t]} \boldsymbol{y}(\zeta)$,满足下列条件:

1) $\boldsymbol{x}(\theta) < \boldsymbol{y}(\theta) \qquad \theta \in [-\tau, 0]$

2) $D^+ y_i(t) > g_i(t, \boldsymbol{y}(t), \bar{\boldsymbol{y}}(t)) \qquad i = 1,2,\cdots,n \qquad t \geqslant 0$

$D^+ x_i(t) \leqslant g_i(t, \boldsymbol{x}(t), \bar{\boldsymbol{x}}(t)) \qquad i = 1,2,\cdots,n \qquad t \geqslant 0$

则 $\boldsymbol{x}(t) < \boldsymbol{y}(t)$, 在 $t > 0$ 成立。

这里 $G(t, \boldsymbol{x}(t), \bar{x}(t)) = \mathrm{col}(g_1(t, \boldsymbol{x}(t), \bar{x}(t)), \cdots, g_n(t, \boldsymbol{x}(t), \bar{x}(t)))$

证:用反证法,设存在一个常数 $\eta > 0$ 和某些 i 使得

$$x_i(\eta) = y_i(\eta)$$

令 $\qquad Z = \{\eta \mid x_i(\eta) = y_i(\eta), \text{对某些 } i\}$

显然,Z 非空,从而 $\exists\, \eta_0 = \inf\limits_{\eta \in Z} \eta$ 由条件 1)

$$\boldsymbol{x}(\theta) < \boldsymbol{y}(\theta) \qquad \theta \in [-\tau, 0], \text{从而 } \eta_0 > 0 \text{ 和}$$

$$x(\theta) \leqslant \boldsymbol{y}(\eta_0) \qquad \bar{x}(\theta) \leqslant \bar{\boldsymbol{y}}(\eta)$$

故存在 $j, 1 \leqslant j \leqslant n$,使得

$$x_j(\eta_0) = y_j(\eta_0)$$

由于 $G \in H_n$,及条件 2)便有

$$D^+ x_j(t_0) \leqslant g_j(\eta_0, x(\eta_0), \bar{\boldsymbol{x}}(\eta_0))$$

$$\leqslant g_j(\eta_0, \boldsymbol{y}(\eta_0), \bar{\boldsymbol{y}}(\eta)) < D^+ y_j(\eta_0) \tag{7.7-11}$$

然而 当 $0 < t < \eta_0$,有

$$\boldsymbol{x}(t) < \boldsymbol{y}(t) \quad \text{即 } x_j(t) < y_j(t) \quad \text{但 } x_j(\eta_0) = y_j(\eta_0)$$

这样就应有

$$D^+ x_j(\eta_0) \geqslant D^+ y_j(\eta_0) \tag{7.7-12}$$

(7.7-11)与(7.7-12)式是矛盾的,引理 7.7.2 获证。

引理 7.7.3 假设下列条件满足

1) $D^+ x_i(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\bar{x}_j(t) \qquad i=1,2,\cdots,n$

$$(7.7\text{-}13)$$

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad i \neq j \quad b_{ij} \geqslant 0 \quad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i(t_0) > 0$$

2) $M \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{ij}+b_{ij})_{n\times n}$是一个 M 矩阵。

则存在常数 $\gamma_i>0, a>0$，使得微分不等式(7.7-3)的解有估计式

$$x_i(t) \leqslant \gamma_i\Big[\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j(t_0)\Big]e^{-a(t-t_0)} \tag{7.7-14}$$

证:设 $g_i(t,\boldsymbol{x}(t),\bar{\boldsymbol{x}}(t)) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\bar{x}_j(t)\Big)$

$$G(t,\boldsymbol{x}(t),\bar{\boldsymbol{x}}(t)) = \text{col}(g_1(t,\boldsymbol{x}(t),\bar{\boldsymbol{x}}(t)), \cdots, g_n(t,\boldsymbol{x}(t),\bar{x}(t))\in H_n。$$

由条件 2)可知,存在 $\delta>0$ 和 $d_j>0(j=1,2,\cdots,n)$使得

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})d_j < -\delta \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7.7-15}$$

选取 $0<a\ll1$,使得

$$ad_i + \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}d_j + b_{ij}d_je^{a\tau}] < 0 \tag{7.7-16}$$

当 $t\in[t_0-\tau,t_0]$,选取 $R\gg1$,使 $Rd_ie^{a\tau}>1$ (7.7-17)

$\forall \varepsilon>0$ 令

$$q_i(t) = Rd_i\Big[\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0)+\varepsilon\Big]e^{-a(t-t_0)} \tag{7.7-18}$$

由(7.7-16)式有

$$D^+ q_i(t) = -aRd_i\Big[\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0)+\varepsilon\Big]e^{-a(t-t_0)}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}d_j + b_{ij}d_j e^{a\tau}]R\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon\right]e^{-a(t-t_0)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_jR\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(x_0) + \varepsilon\right)e^{-a(t-t_0)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}d_jR\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon\right)e^{-a(t-t_0)}e^{a\tau}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\bar{q}_j(t) = g_i(t, q(t), \bar{q}(t))$$

于是 $\quad D^+ q_i(t) > g_i(t, q(t), \bar{q}(t))$

而当 $t \in [t_0 - \tau, t_0]$时，由(7.7-17)式有

$$q_i(t) = Rd_i\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon\right]e^{-a(t-t_0)} > \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon$$

令 $x_i(t) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon \qquad$ 当 $t \in [t_0 - \tau, t_0]$

由引理 7.7.2 可知，$x_i(t) < q_i(t) = Rd_i\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t_0) + \varepsilon\right]e^{-a(t-t_0)}$

令 $\varepsilon \to 0^+, Rd_i = \gamma_i \qquad$ 则有引理结论

$$x_i(t) \leqslant \gamma_i\left[\sum_{j=1}^{n} x_j(t_0)\right]e^{-a(t-t_0)} \qquad \text{当 } t \geqslant t_0$$

$$i = 1, \cdots, n$$

考虑具有变时滞的 Hopfield 神经网络

$$\left[C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij}g_j(u_j(t - \tau_j(t))) + I_i\right]$$

$$i = 1, 2, \cdots, n \tag{7.7-19}$$

其中 $C_i, R_i, T_{ij}, I_i, u_i, g_j$ 的物理意义与第六章全同，时滞 $\tau_j(t)$ 满足 $0 < \tau_j(t) \leqslant \tau = \mathrm{const}$

令 $u = u^* = \mathrm{col}(u_1^*, \cdots, u_n^*)$为(7.7-19)式的平衡位置。

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{col}(u_1 - u_1^*), \cdots(u_n - u_n^*))$$

$$f_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*)$$

则(7.7-19)可以改写为

$$C_i \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{x_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t)))$$

$$i = 1,2,\cdots,n \tag{7.7-20}$$

故(7.7-19)的平衡位置 $u = u^*$ 与(7.7-20)式的 $\boldsymbol{x} = 0^*$ 的零解的稳定性等价。

定理 7.7.1 设 $u = u^*$ 为(7.7-19)的平衡位置,且设

1) $0 \leqslant g'_j(u_j) \leqslant L_j < \infty$

2) $a \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\frac{1}{R_j C_j}\right) > \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\frac{T_{ij}L_j}{C_i}\right| = b$

则(7.7-19)的平衡位置 $u = u^*$ 是全局指数稳定的。

证:对(7.7-20)式作 Ляпунов 函数

$$W(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} | x_i |$$

沿(7.7-20)之解对 $W(\boldsymbol{x})$ 求 Dini 导数便有

$$\begin{aligned}
D^+ W(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{sgn}x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{C_i R_i} | x_i | + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_{ij}L_j}{C_i}\right| \\
&\quad \cdot | x_j(t - \tau_j(t)) | \\
&\leqslant -\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{C_i R_i} \sum_{j=1}^{n} | x_j | \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{T_{ij}L_j}{C_i}\right| | \bar{x}_j(t) | \\
&\leqslant -\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{C_i R_i} \sum_{j=1}^{n} | x_j | \\
&\quad + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{T_{ij}L_j}{C_i}\right| \sum_{j=1}^{n} | \bar{x}(t) | \\
&\stackrel{\text{def}}{=} -aW(\boldsymbol{x}) + b\overline{W}(\bar{x})
\end{aligned} \tag{7.7-21}$$

由引理 7.7.1 可知

$$W(t) \leqslant \overline{W}(t_0)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \tag{7.7-22}$$

其中 λ 为超越方程(7.7-3)式的唯一正确数解,(7.7-22)式表明(7.7-19)式的平衡位置 $u = u^*$ 是全局指数稳定的。

定理 7.7.2 设 $u=u^*$ 为(7.7-19)式的平衡位置,且设

1) $0\leqslant g_j'(u_i)\leqslant L_j<\infty$

2) $a \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\dfrac{1}{R_iC_i}\right)>\lambda$

λ 为下列矩阵 φ 的最大特征值。

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \qquad B = \left(\left|\frac{T_{ij}L_j}{C_i}\right|\right)_{n\times n}$$

则(7.7-19)式的平衡位置 $u=u^*$ 是全局指数稳定的。

证:对于(7.7-20)式作 Ляпунов 函数

$$W(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

则有
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(7.7\text{-}20)} &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_iR_i}x_i^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iT_{ij}f_j(x_i(t-\tau_j(t))) \\
&\leqslant -\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{C_iR_i}\sum_{j=1}^{n}x_j^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} |x| \\ |\bar{x}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |x| \\ |\bar{x}| \end{bmatrix} \\
&\leqslant -aW(x) + \frac{\lambda}{2}W(x) + \frac{\lambda}{2}\overline{W}(x) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \left(-a+\frac{\lambda}{2}\right)W(x) + \frac{\lambda}{2}\overline{W}(x) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} -\hat{a}W(x) + b\overline{W}(x)
\end{aligned}$$

由引理 7.7.1 知结论成立。

定理 7.7.3 若 $|f_j'|\leqslant L_j \quad j=1,2,\cdots,n$ 且 $\left[\operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{R_1C_1},\cdots,\dfrac{1}{R_nC_n}\right)-\left(\dfrac{|T_{ij}|}{C_i}L_j\right)\right]_{n\times n}$ 为一个 M 矩阵,则 (7.7-20)式的平凡解是指数稳定的,从而(7.7-19)式的平衡位置 $u=u^*$ 是指数稳定的。

证:改写(7.7-20)式为

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{x_i(t)}{R_iC_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{T_{ij}}{C_i}f_j(x_j(t-\tau_j(t))) \qquad (7.7\text{-}23)$$

于是有

$$D^+|x_i(t)| \leqslant -\left(\frac{1}{R_iC_i}\right)|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\frac{|T_{ij}|}{C_i}L_j\bar{x}_j(t)$$

$$i = 1,\cdots,n \qquad (7.7\text{-}24)$$

由于$\left[\operatorname{diag}\left(\frac{1}{R_1C_1},\cdots,\frac{1}{R_nC_n}\right)-\left(\frac{|T_{ij}|}{C_i}L_j\right)\right]_{n\times n}$为一个$M$矩阵,故由引理7.7.3可知,微分不等式(7.7-24)式的解有估计式

$$|x_i(t)| \leqslant \gamma_i\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j(t_0)|\right]\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \qquad t \geqslant t_0$$

其中γ_1、α为某些正的常数,故结论成立。

注 定理7.7.3结论中的α尚不知有多大,宁可给出一些保守的估计,但希望有确切的α大小估计。

定理7.7.4 若定理7.7.3中的条件满足,且存在$\lambda>0$使得$\left[\operatorname{diag}\left(\frac{1}{R_iC_i},-\lambda,\cdots,\frac{1}{R_nC_n}-\lambda\right)-\left(\frac{|T_{ij}|}{C_i}L_j\right)\right]_{n\times n}$仍为一个$M$矩阵,则微分不等式组(7.7-24)的解至少有估计式

$$|x_i(t)| \leqslant \gamma_i\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j(t_0)|\right]\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, \qquad i = 1,\cdots,n$$

证:令$|y_i(t)| = |x_i(t)|\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad i=1,\cdots,n$ 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^+|y_i(t)| &\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}D^+|x_i(t)| + \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}|x_i(t)| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{\lambda t}\left[\frac{-1}{R_iC_i}|x_i(t)| + \lambda|x_i(t)|\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^{n}\frac{|T_{ij}|}{C_i}L_j|\bar{x}_j(t)|\right] \\
&\leqslant \left(\frac{-1}{R_iC_i}+\lambda\right)|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\frac{|T_{ij}|}{C_i}L_j|\bar{y}_j(t)|
\end{aligned}$$

由定理7.7.3有

$$|y_i(t)| \leqslant \lambda_i\left[\sum_{i=1}^{n}|y_j(t_0)|\right]\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}$$

故有$|x_i(t)| \leqslant \tilde{\lambda}_i\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j(t_0)|\right]e^{(-\alpha-\lambda)(t-t_0)}$

$$\leqslant \tilde{\lambda}_i\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j(t_0)|\right]e^{-\lambda(t-t_0)} \quad i = 1,2,\cdots,n$$

其中 $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i e^{\lambda t_0}$,故结论成立。

§8 时变线性中立型系统

在电路网络中[141],需要考虑中立型微分差分方程,这里,考虑更一般的时变线性中立型系统[141]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)x_j(t-\tau_{ij}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\dot{x}_j(t-\tau_{ij}^{(2)})$$

(这里 $\dot{x}_j(t-\tau_{ij}^{(2)}) = \dfrac{dx_j(t-\tau_{ij}^{(2)})}{dt}$) (7.8-1)

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \qquad s \in [-r,0]$$

$$\frac{dx_i(s)}{dt} = \Psi_i(s) \quad 当\ s \in [-\tau,0] \quad \tau = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\tau_{ij}^{(1)},\tau_{ij}^{(2)})$$

$$i = 1,2,\cdots,n$$

(7.8-2)

这里 $\Psi_i(i=1,2,\cdots,n)$是在$[-\tau,0]$上几乎处处分段连续的,φ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是在$[-\tau,0]$上有界的可积的,满足

$$\frac{d\varphi_i(s)}{ds} = \Psi_i(s) \quad i = 1,\cdots,n$$

$\tau_{ij}^{(1)},\tau_{ij}^{(2)}$是非负常数。

定理 7.8.1 假设(7.8-1)中的系数满足:

1)$a_{ij}(t),b_{ij}(t),c_{ij}(t)$均是在$[-\tau,+\infty]$上的连续有界函数;

2)存在一个非负常数 c,使得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j^* = c < 1 \qquad \text{这里 } c_j^* = \sup_{t\geqslant -\tau}\sum_{i=1}^{n} | c_{ij}(t) |$$

$$j = 1,2,\cdots,n \tag{7.8-3}$$

3)存在正常数 α 和 β 使得

$$a_{jj}(t) \leqslant -\alpha < 0$$

$$| a_{jj}(t) | - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} | a_{ij}(t) | - \sum_{i=1}^{n} | b_{ij}(t+\tau_{ij}^{(2)}) | \geqslant \beta > 0 \quad t\geqslant 0$$

$$j = 1,2,\cdots,n \tag{7.8-4}$$

则(7.8-1)式的零解渐近稳定。

证:若 $\dot{x}_i(t)$ 在$[0,+\infty]$上有无限多个离散零点,则对于任意的 $t>0$ 选择 t_i^* 使得 $\dot{x}_i$ 在(t_i^*,t)有相同的符号,若 t 是 $\dot{x}_i$ 零点,则就令 $t_i^*=t$,若 $\dot{x}_i$ 在$(0,+\infty)$内仅有限个零点,令 t_i^* 是 $\dot{x}_i$ 的最后一个零点,若 $\dot{x}_i$ 在$(0,+\infty)$上无零点,则令 $t_i^*=0$。

现构造 Ляпунов 函数

$$\begin{aligned} V(t) = &\sum_{i=1}^{n}\left[| x_i(t) | + | x_i(t_i^*) | - c_i^*\int_{t_i^*}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s}\right|\mathrm{d}s\right.\\ &+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}^{(1)}}^{t} | b_{ij}(s+\tau_{ij}^{(1)}) | | x_j(s) | \mathrm{d}s\\ &+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau_{ij}^{(2)}}^{t} | c_{ij}(s+\tau_{ij}^{(2)}) | | \dot{x}_j(s) | \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{7.8-5}$$

从初始条件的选择及对系数的假设,可推知 $V(0)$是有限数,因此有

$$\begin{aligned} V &\geqslant \sum_{i=1}^{n}[| x_i(t) | - c_i^* | x_i(t) |]\\ &\geqslant (1-c)\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) | \quad t\geqslant 0 \end{aligned} \tag{7.8-6}$$

$$\begin{aligned} D^+ V |_{(7.8\text{-}1)} \leqslant &\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{sign}x_i - c_i^* | \dot{x}_i(t) |\right.\\ &+\sum_{j=1}^{n}\{ | b_{ij}(t+\tau_{ij}^{(1)}) | | x_j(t) | - | b_{ij}(t) | | x_j(t-\tau_{ij}^{(1)}) | \} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n}\left\{|c_{ij}(t+\tau_{ij}^{(2)})||\dot{x}_j(t)|-|c_{ij}(t)||\dot{x}_j(t-\tau_{ij}^{(2)})|\right\}\Big]\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{n}\Big[-|a_{ii}(t)||x_i(t)|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}|a_{ij}(t)||x_j(t)|-c_i^*|\dot{x}_i(t)|\\
&+\sum_{j=1}^{n}\left\{|b_{ij}(t+\tau_{ij}^{(1)})||x_j(t)|+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t+\tau_{ij}^{(2)})||\dot{x}_j(t)|\right\}\\
\leqslant&\sum_{j=1}^{n}\Big[-|a_{jj}(t)|+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}(t+\tau_{ij}^{(1)})|\Big]|x_j(t)|\\
&+\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}(t+\tau_{ij}^{(2)})|-c_j^*\Big]|\dot{x}_j(t)|\\
\leqslant&-\beta\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)|+\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}(t+\tau_{ij}^{(2)})-c_j^*|\dot{x}_j(t)|\right.\\
\leqslant&-\beta\sum_{j=1}^{n}|x_j(t)|
\end{aligned}
\tag{7.8-7}
$$

由(7.8-7)式有

$$V(t)\leqslant V(0)-\beta\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i(s)|\Big)\mathrm{d}s$$

因此有

$$
\begin{aligned}
(1-c)\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\beta\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i(s)|\Big)\mathrm{d}s&\\
\leqslant V(0)<\infty\quad t\geqslant 0&
\end{aligned}
\tag{7.8-8}
$$

(7.8-8)式意味着$|x_i(t)|(i=1,\cdots,n)$有界。

由(7.8-1)式有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right|\leqslant&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)||x_j(t)|\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}(t)||x_j(t_j(t-\tau_{ij}^{(1)}))|\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)||\dot{x}_j(t-\tau_{ij}^{(2)})|
\end{aligned}
\tag{7.8-9}
$$

定义

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{s \in [t-\tau, t]} | \dot{x}_i(s) | \right) \tag{7.8-10}$$

由假设有

$$\sup_{t \geqslant -\tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [| a_{ij}(t) | + | b_{ij}(t) |] < \infty \tag{7.8-11}$$

从(7.8-8)、(7.8-9)、(7.8-10)有

$$\begin{aligned} m(t) &\leqslant \Big[\sup_{t \geqslant -\tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [| a_{ij}(t) | + | b_{ij}(t) |] \big(\sup_{t \geqslant -\tau} | x_j(t) | \big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\sup_{t \geqslant -\tau} | c_{ij}(t) |] [\sup_{s \in [t-\tau, t]} | \dot{x}_j(s) |] \\ &\leqslant \sigma + cm(t) \end{aligned}$$

这里 $\sigma = \sup_{t \geqslant -\tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [| a_{ij}(t) | + | b_{ij}(t) |]$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \geqslant -\tau} | x_j(t) | \right] < \infty \tag{7.8-12}$$

因为 $c < 1$，从(7.8-11)式推出 $m(t) \leqslant \frac{\sigma}{1-c} < \infty$，对 $t \geqslant 0$ 。

这样 $x_i(t)$ 的导数在$[0,\infty]$有界，故 $\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) |$ 在$[0,\infty]$上一致连续，以及 $\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) | \in L_1(0,\infty)$，由(7.8-8)式可知 $\lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} | x_i(t) | = 0$，故(7.8-1)式的零解渐近稳定。

推论 7.8.1 考虑线性中立型系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - \tau_{ij}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \dot{x}_j(t - \tau_{ij}^{(2)}) \quad t > 0 \tag{7.8-13}$$

$a_{ij}, b_{ij}, \tau_{ij}^{(1)}, \tau_{ij}^{(2)} (i, j = 1, 2, \cdots n)$ 是常数，使得

$$\tau_{ij}^{(1)} \geqslant 0, \tau_{ij}^{(2)} \geqslant 0 \quad i, j = 1, 2, \cdots n \tag{7.8-14}$$

$$a_{ii} < 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$1-|a_{jj}|\tau_{jj}^{(1)}-\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|>0 \quad j=1,2,\cdots,n$$

(7.8-15)

$$|a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}| \quad j=1,\cdots,n \tag{7.8-16}$$

则(7.8-13)式的所有具有有界可积的初始条件的解有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_j(t)|\to 0 \qquad 当\ t\to\infty$$

证:改写(7.8-13)式为

$$\frac{dx_i}{dt}=-|a_{ii}|x_j(t)+|a_{ii}|\int_{t-\tau_{ii}^{(1)}}^{t}\dot{x}_i(s)ds$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j(t-\tau_{ij}^{(1)})+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\dot{x}_j(t-\tau_{ij}^{(2)})$$

构造 Ляпунов 泛函

$$V(t)=\sum_{j=1}^{n}\left[|x_j(t)|-\left(a_{jj}\tau_{jj}^{(1)}+\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|\right)\int_{t_i^*}^{t}\left|\frac{dx_i(s)}{ds}\right|ds\right.$$

$$+|x_i(t_i^*)|+\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\int^{t}(t-\tau_{ji}^{(1)}|x_i(s)|)ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_{ji}\int^{t}(t-\tau_{ji}^{(2)}|\dot{x}_i(s)|)ds$$

$$\left.+|a_{jj}|\left\{\int_{s}^{t}|x_j(u)|du\right\}ds\right]$$

t_i^* 的定义如定理 7.8.1 中的一样。

详细的证明如同定理 7.8.1,故略。

§9 中立型大系统分块比较估值法[136]

分析大系统稳定性的总的思想是设法把复合大系统分解成若干个维数较低的孤立子系统,根据这些子系统的稳定裕度和它们之间关联的强弱程度,来判定整个复合大系统的稳定性,实现这种

想法，目前采用主要方法仍然是 Ляпунов 向量函数(泛函)法，或加权和标量 Ляпунов 函数(泛函)法，采用这些方法遇到的实质性困难是对于稍复杂的系统，没有构造这样函数(泛函)的一般程序和技巧，因而所得结果往往仅是一些存在性的理论结果。

本节介绍分析中立型大系统稳定性的分块估值比较法，利用孤立子系统的 Cauchy 矩阵和耦合矩阵的积分估计，对复合大系统的解进行分块估计，具体构造比较系统，由比较系统的稳定性来判定大系统的稳定性。

先叙述以下比较引理。

引理 7.9.1 设 $H(h_{ij}(t))_{r\times r}\in C[I,R^{r\times r}]$ $h_{ij}(t)\geqslant 0$ $i\neq j$ $i,j=1,\cdots,r$ $f(t)\in C[I,R^r]$ 则微分不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant H(t)x(t)+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{7.9-1}$$

的解右上囿于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=H(t)\boldsymbol{y}+f(t)\\ \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0\geqslant x_0\end{cases}\tag{7.9-2}$$

的解，即 $x(t)\leqslant y(t)$ $t\geqslant t_0$，即 $\boldsymbol{x}_i(t)\leqslant y_i(t)$ $i=1,\cdots,r$

令 $\boldsymbol{z}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}(t,t_0,y_0)-\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=z(t,t_0,z_0)$

$$\boldsymbol{g}(t)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}(t)}{\mathrm{d}t}-H(t)\boldsymbol{z}\geqslant 0,D_H(t)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{diag}(h_{11}(t),\cdots,h_{rr}(t))$$

则 $\boldsymbol{z}(t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{z}(t)}{\mathrm{d}t}=[D_H(t)+H(t)-D_H(t)]\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{g}(t)\\ \boldsymbol{z}(t_0)=z_0\end{cases}\tag{7.9-3}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=z_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}D_H(t)\mathrm{d}t}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\int_{\tau}^{t}D_H(\xi)\mathrm{d}\xi}[H(\tau)-D_H(\tau)]$$

$$\boldsymbol{z}(\tau)+g(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

取 $z^{(0)}(t) = z_0 e^{\int_{t_0}^{t} D_H(t)\mathrm{d}t} \geqslant 0$

用 Picard 迭代法求解。

$$z^{(m)}(t) = z_0 e^{\int_{t_0}^{t} D_H(t)\mathrm{d}t}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} D_H(\xi)\mathrm{d}\xi}[(H(\tau) - D_H(\tau))z^{(m-1)}(\tau) + g(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

因为对一切自然数 m,有 $z^{(m)}(t) \geqslant 0$,从而

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)}(t) = z(t) \geqslant 0 \quad \text{即}$$

$$x(t,t_0,x_0) \leqslant y(t,t_0,y_0)$$

考虑下列用中立型微分差分方程描述的线性大系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{diag}(A_{11}(t),\cdots,A_{rr}(t))x(t) + ((1-\delta_{ij})A_{ij}(t))x(t)$$

$$+ (B_{ij}(t))x(t-\tau) + (C_{ij}(t))\dot{x}(t-\tau) \qquad (7.9\text{-}4)$$

这里 $C_{ij}(t)$为$[t_0, +\infty]$上的 $n_i \times n_i$ 连续可微函数矩阵,而 $A_{ij}(t)$,$B_{ij}(t)$分别是 $n_i \times n_i$ 连续函数矩阵,τ 为正常数。

设 $\varphi(t)$为$[t_0-\tau, t_0]$上的连续可微函数,$P_{ii}(t,t_0)$为孤立子系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = A_{ii}(t)x_i$$

的 Cauchy 矩阵解。$x_i = \mathrm{col}(x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)})$ 记

$$f_1(t) \overset{\mathrm{def}}{=} P_{ii}(t,t_0)\varphi_i(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} P_{ii}(t,t_1+\tau)$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} B_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$- P_{ii}(t,t_0)\sum_{j=1}^{r} C_{ij}(t_0)\varphi_j(t_0-\tau)$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} A_{ii}(t_1+\tau)P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r} C_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$- \int_{t_0-\tau}^{t_0} P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r} \dot{C}_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$i = 1,2,\cdots,r$$

定理7.9.1 若下列若条件满足:

1)存在纯量函数 $a(t)\in C[t_0,+\infty]$ 和常数 $\overline{M}_i\geqslant 1, M_i\geqslant 1$ 使得

$$\| f_i(t) \| \leqslant \overline{M}_i \mid \varphi(\cdot) \mid \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$$

$$\| P_{ii}(t,t_0) \| \leqslant M_i\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi\right)$$

2) $\| C_{ij}(t) \|$ 是 t 的单调不增函数;

3)存在纯量函数 $\beta(t)\in C[t_0,+\infty]$,使常微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{r}[&M_i(1-\delta_{ij})\| A_{ij}(t) \| + M_iK\| B_{ij}(t+\tau) \| \\ &+ M_iK\| A_{ii}(t+\tau) \| \| C_{ij}(t+\tau) \| \\ &+ M_iK\| \dot{C}_{ij}(t+\tau) \| + \frac{K}{\tau}\| C_{ij}(t+\tau) \|]\xi_j \\ &i = 1,2,\cdots,r\end{aligned}$$

的 Cauchy 矩阵 $R(t,t_0)$有估计式

$$\| R(t,t_0) \| \leqslant N\exp\int_{t_0}^{t}\beta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

这里, $K \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\geqslant t_0}\exp\int_{t-\tau}^{t}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi < +\infty, N\geqslant 1$ 为常数,

则

① $\int_{t_0}^{t}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi \geqslant c(t_0) > -\infty \quad (t\geqslant t_0)$

② $\int_{t_0}^{t}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi \geqslant c > -\infty \quad (t\geqslant t_0)$

③ $\int_{t_0}^{+\infty}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi = +\infty$

④ $\int_{t_0}^{t}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi = +\infty$ 当$(t-t_0)\Rightarrow+\infty$(关于 t_0 一致)

⑤ $\int_{t_0}^{t}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi \geqslant \gamma(t-t_0)$ （$t\geqslant t_0, \gamma>0$为常数）

分别蕴涵(7.9-4)的平凡解稳定、一致稳定、渐近稳定、一致渐近稳定、指数稳定。

证：记(7.9-4)式满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\varphi(t), t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ 的解为 $\boldsymbol{x}(t)$，利用常数变易公式并进行积分变量代换和分部积分，不难证明

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i(t) = {} & P_{ii}(t,t_0)\varphi_i(t_0)+\int_{t_0-\tau}^{t_0}P_{ii}(t,t_1+\tau) \\
& \cdot\sum_{j=1}^{r}B_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& -P_{ii}(t,t_0)\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t_0)\varphi_j(t_0-\tau) \\
& +\int_{t_0-\tau}^{t_0}A_{ii}(t_1+\tau)P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& -\int_{t_0-\tau}^{t_0}P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r}\dot{C}_{ij}(t_1+\tau)\varphi_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& +\int_{t_0}^{t}P_{ii}(t,t_1)\sum_{j=1}^{r}(1-\delta_{ij})A_{ij}(t_1)x_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& +\int_{t_0}^{t-\tau}P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r}B_{ij}(t_1+\tau)x_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& +\int_{t_0}^{t-\tau}A_{ii}(t_1+\tau)P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t_1+\tau)x_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& -\int_{t_0}^{t-\tau}P_{ii}(t,t_1+\tau)\sum_{j=1}^{r}\dot{C}_{ij}(t_1+\tau)x_j(t_1)\mathrm{d}t_1 \\
& +\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t)x_j(t-\tau)
\end{aligned}
$$

于是，有

$$
\begin{aligned}
\| x_i(t) \| \leqslant & \sum_{j=1}^{r} M_i \int_{t_0}^{t} (1-\delta_{ij}) \| A_{ij}(t_1) \| \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| x_j(t_1) \| \mathrm{d}t_1 \\
& + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \| B_{ij}(t_1+\tau) \| \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| x_j(t_1) \| \mathrm{d}t_1 \\
& + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \| A_{ij}(t_1+\tau) \| \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| C_{ij}(t_1+\tau) \| \\
& \cdot \| x_j(t_1) \| \mathrm{d}t_1 + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& \cdot \| \dot{C}_{ij}(t_1+\tau) \| \, \| x_j(t_1) \| \mathrm{d}t_1 \\
& + \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t) \| \, \| x_1(t-\tau) \| + \overline{M}_i \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\| x_i(t) \| \, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \leqslant & \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} (1-\delta_{ij}) M_i \| A_{ij}(t_1) \| \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& \cdot \| x_j(t_1) \| \mathrm{d}t_1 + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \| B_{ij}(t_1+\tau) \| \mathrm{e}^{\int_{t_1}^{t_1+\tau} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& \cdot \| x_j(t_1) \| \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}t_1 + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \| A_{ij}(t_1+\tau) \\
& \| \mathrm{e}^{\int_{t_1}^{t_1+\tau} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| C_{ij}(t_1+\tau) \| \, \| x_j(t_1) \| \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}t_1 \\
& + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{\int_{t_1}^{t_1+\tau} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| \dot{C}_{ij}(t_1+\tau) \| \, \| x_j(t_1) \| \\
& \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}t_1 + \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t) \| \mathrm{e}^{\int_{t-\tau}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \| x_i(t-\tau) \| \\
& \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t-\tau} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} + M_i
\end{aligned}
$$

令 $y_i(t) = \max\limits_{t_0-\tau \leqslant t_1 \leqslant t} \| x_i(t_1) \| \exp\int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi$，利用 $y_i(t)$ 的单调不减性和 $\| C_{ij}(t) \|$ 的单调不增性，有

$$
\begin{aligned}
\| x_i(t) \| \, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi} \leqslant & \overline{M}_i + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} [M_i (1-\delta_{ij}) \| A_{ij}(t_1) \| + M_i K \\
& \cdot \| B_{ij}(t_1+\tau) \| + M_i K \| A_{ii}(t_1+\tau) \| \, \| C_{ij} \cdot (t_1+\tau) \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ M_i K \| \dot{C}_{ij}(t_1+\tau) \|] y_i(t_1) \mathrm{d}t_1 \\
&+ \frac{K}{\tau} \int_{t-\tau}^{t} \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1) \| y_1(t_1) \mathrm{d}t_1 \\
&\leqslant M_i^* + \sum_{j=1}^{r} \int_{t_0}^{t} [(1-\delta_{ij}) M_i \| A_{ij}(t_1) \| \\
&+ M_i K \| B_{ij}(t_1+\tau) \| + M_i K \| A_{ii}(t_1+\tau) \| \\
&\cdot \| C_{ij}(t_1+\tau) \| + M_i K \| \dot{C}_{ij}(t_1+\tau) \| \\
&+ \frac{K}{\tau} \| C_{ij}(t_1) \|] y_i(t_1) \mathrm{d}t_1
\end{aligned} \tag{7.9-5}
$$

这里

$$
M_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}_i + \frac{K}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1) \| y_j^*(t_1) \mathrm{d}t_1
$$

$$
y_i^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t_0-\tau<t_1<t<t_0} \| \varphi_j(t_1) \| \exp \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\xi) \mathrm{d}\xi
$$

记(7.9-5)式的右端为 $\eta_i(t)$，由于 $\eta_i(t)$单调不减，故有 $y_i(t) \leqslant \eta_i(t)$，且 $\eta_i(t)$ 满足微分不等式组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\eta_i}{\mathrm{d}t} \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{r} [M_i(1-\delta_{ij}) \| A_{ij}(t) \| + M_i K \| B_{ij}(t+\tau) \| \\
\qquad + M_i K \| A_{ii}(t+\tau) \| \| C_{ij}(t+\tau) \| \\
\qquad + M_i K \| C_{ij}(t+\tau) \| + \dfrac{K}{\tau} \| C_{ij}(t) \|] \eta_i \\
\eta_i(t_0) = M_i^* \qquad i = 1, 2, \cdots, r
\end{cases}
$$

设 $\xi_i(t)$满足下列微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} [M_i(1-\delta_{ij}) \| A_{ij}(t) \| + M_i K \| B_{ij}(t+\tau) \| \\
\qquad + M_i K \| A_{ii}(t+\tau) \| \| C_{ij}(t+\tau) \| \\
\qquad + M_i K \| \dot{C}_{ij}(t+\tau) \| + \dfrac{K}{\tau} \| C_{ij}(t) \|] \xi_j \\
\xi_i(t_0) = M_i^* \qquad i = 1, 2, \cdots, r
\end{cases}
$$

由引理有 $\eta_i(t) \leqslant \xi_i(t)$，$t \geqslant t_0$，$i = 1, 2, \cdots, r$，从而由条件 3)有

$$\|\operatorname{col}(\|\boldsymbol{x}_1(t)\|,\cdots,\|\boldsymbol{x}_r(t)\|)\|\exp\int_{t_0}^{t}\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant N\operatorname{col}(M_1^*,\cdots,M_r^*)\|\exp\int_{t_0}^{t}\beta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

故有

$$\|\operatorname{col}(\|\boldsymbol{x}_1(t)\|,\cdots,\|\boldsymbol{x}_r(t)\|)\|\leqslant N\operatorname{col}(M_1^*,\cdots,M_r^*)$$

$$\cdot\exp(-\int_{t_0}^{t}[\alpha(\xi)-\beta(\xi)]\mathrm{d}\xi) \qquad (7.9\text{-}6)$$

由(7.9-6)式知结论成立。

§10 中立型大系统在 $C^{(1)}$空间中的稳定性[134]

考虑一类非线性变时滞中立型大系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\operatorname{diag}(A_{11}(t),\cdots,A_{rr}(t))\boldsymbol{x}(t)\\ +F((t,\boldsymbol{x}(t-\Delta(t))),\dot{\boldsymbol{x}}(t-\Delta(t)))\\ \boldsymbol{x}(t)=\Phi,\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\Phi(t) \quad 当\ t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0\end{cases} \qquad (7.10\text{-}1)$$

及孤立子系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\operatorname{diag}(A_{11}(t),\cdots,A_{rr}(t))\boldsymbol{x}(t) \qquad (7.10\text{-}2)$$

这里 $F\in C[I\times R^n\times R^n,R^n],F(t,0\ 0)\equiv 0$

$\boldsymbol{x}\in R^n$

设 $P(t,t_0)=\operatorname{diag}(P_{22}(t,t_0),\cdots,P_{rr}(t,t_0))$ 为(7.10-2)的Cauchy矩阵解。

若(7.10-1)式的平凡解关于 $\boldsymbol{x}$ 及 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 都是渐近稳定的，称为(7.10-1)式的平凡解在 C^1 空间渐近稳定。

定理 7.10.1 若

1) $F(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$在 D 包含原点的某开邻域D 内满足

$$\|F_i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|\leqslant\sum_{j=1}^{r}g_{ij}(t)[\|\boldsymbol{x}_j\|+\|\boldsymbol{y}_j\|] \qquad (7.10\text{-}3)$$

其中 $g_{ij}(t) \in C[t_0, +\infty]$ 为非负有界函数,这里 $x_i \in R^{n_i}$, $y_i \in R^{n_i}$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$。

2) (7.10-2)式确定的 Cauchy 矩阵 $P(t,t_0)$有估计式:$\| P_{ii}(t,t_0) \| \leqslant M_i e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha_i(\xi)d\xi} \to 0, t \to +\infty$,其中 $M_i > 0$ 为已知常数,$\alpha_i(t) \in C[t_0, +\infty](i=1,2,\cdots,r)$为已知函数。

3) 矩阵 $\Omega(\sigma_{ii})$ 的谱半径 $\rho(\Omega) < 1$(特别 $\| \Omega \| < 1$),这里

$$\sigma_{ii} = (1 - K\tilde{g}_{ii})^{-1} \int_0^{+\infty} m_i K_i g_{ii}(t_1) dt_1 + \delta_{ij}(1 - k\tilde{g}_{ii})^{-1} K_i \tilde{g}_{ij}$$

$$K_i = \sup_{t \geqslant t_0} e^{\int_{t-\Delta(t)}^{t} \alpha_i(\xi)d\xi}$$

$$m_i = (1 + \tilde{A}_i i) M_i, \ \tilde{A}_{ii} = \sup_{t \geqslant t_0} \| A_{ii}(t) \|,$$

$$\tilde{g}_{ij} = \sup_{t \geqslant t_0} g_{ij}(t), K_i \tilde{g}_{ij} < 1$$

则(7.10-1)式平凡解在 $C^{(1)}$空间中渐近稳定。

证:(7.10-1)式的解 $x(t)$可表为

$$x_i(t) = P_{ii}(t,t_0)\Phi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} P_{ii}(t,t_1) \cdot F_i((t_1, x(t_1 - \Delta(t_1))), \dot{x}(t_1 - \Delta(t_1)))dt_1 \tag{7.10-4}$$

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}(t)P_{ii}(t,t_0)\Phi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} A_{ii}(t)P_{ii}(t,t_1) \cdot F_i((t_1, x(t_1 - \Delta(t_1))), \dot{x}(t_1 - \Delta(t_1)))dt_1 + F_i((t, x(t - \Delta(t))), \dot{x}(t - \Delta(t))) \tag{7.10-5}$$

$$\| x_i(t) \| \leqslant M_i \| \Phi_i(t_0) \| e^{-\int_{t_0}^{t} \alpha_i(\xi)d\xi} + \int_{t_0}^{t} M_i e^{-\int_{t_1}^{t} \alpha_i(\xi)d\xi} \times \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1)[\| x_j(t_1 - \Delta(t_1)) \| + \| \dot{x}_j(t_1 - \Delta(t_1)) \|]dt_1 \tag{7.10-6}$$

$$
\begin{aligned}
\| \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) \| \leqslant & \| A_{ii}(t) \| M_i \| \Phi_i(t_0) \| \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& + \int_{t_0}^{t} \| A_{ii}(t_1) \| M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \times \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) \\
& \cdot [\| \boldsymbol{x}_j(t_1 - \Delta(t_1)) \| \\
& + \| \dot{x}_i(t_1 - \Delta(t_1)) \|]\mathrm{d}t_1 \\
& + \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t)[\| x_j(t - \Delta(t)) \| \\
& + \| \dot{x}_j(t - \Delta(t)) \|]
\end{aligned} \tag{7.10-7}
$$

记 $\widetilde{A}_{ii} = \sup\limits_{t \geqslant t_0} \| A_{ii}(t) \|, K_i = \sup\limits_{t \geqslant t_0} \mathrm{e}^{\int_{t-\Delta(t)}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi}$

$m_i = (1 + \widetilde{A}_{ii}) M_i, \tilde{g}_{ij} = \sup\limits_{t \geqslant t_0} g_{ij}(t)$，由(7.10-6)和(7.10-7)式有

$$
\begin{aligned}
(\| \boldsymbol{x}_i(t) \| + \| \dot{x}_i(t) \|)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \leqslant & m_i \| \Phi_i(t_0) \| \\
& + \int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{\int_{t_1-\Delta t_1}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \times \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1)[\| x_j(t_1 - \Delta(t_1)) \| \\
& + \| \dot{x}_j(t_1 - \Delta(t_1))]\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1-\Delta(t_1)}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}t_1 + \mathrm{e}^{\int_{t-\Delta(t)}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& \cdot \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t)[\| x_j(t - \Delta(t)) \| \\
& + \| \dot{x}_i(t - \Delta(t)) \|]\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t-\Delta(t)}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \\
& \leqslant m_i \| (\Phi_i(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} K_i m_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) \\
& \cdot [\| x_j(t_1 - \Delta(t_1)) \| + K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t) \\
& \cdot [\| x_j(t - \Delta(t)) \| + \| \dot{x}_i(t - \Delta(t)) \|] \\
& \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t-\Delta(t)}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi}]\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{7.10-8}
$$

令 $u_i(t) = \sup\limits_{t_0 - \Delta \leqslant t_1 \leqslant t} \{ \| x_i(t_1) + \| \dot{x}_i(t_1) \| \} \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi}$(其中 $x_i(t) = \Phi_i(t), \dot{x}_i(t) = \dot{\Phi}_i(t)$，当$(t_0 - \Delta \leqslant t_1 \leqslant t_0)$，便有

$$
(\| x_i(t) \| + \| \dot{x}_i(t) \|)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\xi)\mathrm{d}\xi} \leqslant m_i \| \Phi_i(t_0) \|
$$

$$+\int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) u_j(t_1) \mathrm{d}t_1 + K \sum_{j=1}^{r} \tilde{g}_{ij} u_j(t) \qquad (7.10\text{-}9)$$

由于(7.10-9)右端为 t 的单调不减函数,故有

$$u_i(t) \leqslant m_i \| \Phi_i(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} m_i k_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1)$$

$$u_j(t_1) \mathrm{d}t_1 + K \sum_{j=1}^{r} \tilde{g}_{ij} u_j(t) \qquad (7.10\text{-}10)$$

进而由(7.10-10)式右端的非负性,便有

$$u_i(t) \leqslant m_i \| \Phi_i(t_0) \| (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1} + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) u_j(t_1) \mathrm{d}t_1 + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot K_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \tilde{g}_{ij} u_j(t) \qquad (7.10\text{-}11)$$

考虑下列积分方程组

$$\tilde{u}_i(t) = m_i \| \Phi_i(t_0) \| (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1} + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) \tilde{u}_j(t_1) \mathrm{d}t_1 + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot K_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \tilde{g}_{ij} \tilde{u}_j(t) \overset{\text{def}}{=} L(\tilde{u}) \qquad (7.10\text{-}12)$$

下面证在任何有限区间$[t_0, T]$内,积分不等式组(7.10-11)与积分方程组(7.10-12)满足同一初始值的解有关系式

$$u_i(t) \leqslant \tilde{u}_i(t)$$

因为定理条件 $\rho(\Omega) < 1$,故积分算子 $L(u)$本质上是一个压缩算子,下列迭代

$$\tilde{u}_i^{(0)}(t) = m_i \| \Phi_i(t_0) \| (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\tilde{u}_i^{(m)}(t) = m_i \| \Phi_i(t_0) \| (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1} + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1) \tilde{u}_j^{(m-1)}(t_1) \mathrm{d}t_1 + (1 - K_i \tilde{g}_{ii})^{-1}$$

$$\cdot K_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \tilde{g}_{ij} \tilde{u}_j^{(m-1)}(t) \qquad m = 1,2,\cdots \qquad (7.10\text{-}13)$$

在任何有限区间$[t_0, T]$上，$u_i^{(m)}(t)$一致收敛于某一极限函数$u_i^*(t)(i=1,2,\cdots,r)$，且有估计式

$$\mathrm{col}(\tilde{u}_1^{(m)}(t),\cdots,\tilde{u}_r^{(m)}(t)) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \Omega^m(\sigma_{ij})\mathrm{col}(u_1^{(0)}(t),\cdots,u_r^{(0)}(t))$$
$$= (E - \Omega)^{-1}\mathrm{col}(u_1^{(0)}(t),\cdots,u_r^{(0)}(t))$$

故有

$$\mathrm{col}(u_1^*(t),\cdots,u_r^*(t)) \leqslant (E - \Omega)^{-1} \cdot \mathrm{col}(u_1^{(0)}(t),\cdots,u_r^{(0)}(t)) \qquad (7.10\text{-}14)$$

在此区间$[t_0, T]$上，原则上可反复用步长法化中立型方程组(7.10-11)为若干个相应的常微分方程的始值问题求解，由定理条件知化来的相应的常微分方程组将以某一个线性常微分方程组作为控制方程，从而在$[t_0, T]$将是有界的，故可取

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T}\{u_i(t) - u_i^{(0)}(t)\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} N_i < +\infty$$

由(7.10-11)，(7.10-13)有

$$u_i(t) - \tilde{u}_i^{(1)} \leqslant (1 - K_i\tilde{g}_{ii})^{-1}\int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1)(u_j(t_1 - u_j^{(0)}(t_1)))\mathrm{d}t_1$$
$$+ (1 - K_i\tilde{g}_{ii})^{-1}K_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \tilde{g}_{ij}[u_j(t) - u_j^{(0)}(t)]$$
$$\leqslant (1 - K_i\tilde{g}_{ii})^{-1}\int_{t_0}^{t} m_i K_i \sum_{j=1}^{r} g_{ij}(t_1)N_j\mathrm{d}t_1$$
$$+ (1 - K_i\tilde{g}_{ii})^{-1}K_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \tilde{g}_{ij}N_i \leqslant \sum_{j=1}^{r}\sigma_{ij}N_j \qquad (7.10\text{-}15)$$

故有$\mathrm{col}(u_1(t) - \tilde{u}_1^{(1)}(t),\cdots,u_r(t) - \tilde{u}_r^{(1)}(t)) \leqslant \Omega\mathrm{col}(N_1, N_2, \cdots N_r)$，进而可用归纳法证明：$\mathrm{col}(u_1(t) - \tilde{u}_1^{(m)}(t),\cdots,u_r(t) - \tilde{u}_r^{(m)}(t)) \leqslant \Omega^m\mathrm{col}(N_1, N_2, \cdots N_r)$，由于$\rho(\Omega) < 1$，故有$\lim\limits_{n\to\infty}\Omega^n =$

0,当$[t_0,T]$取定,$N_i(i=1,2,\cdots,r)$ 便是定数,从而

$$\mathrm{col}(u_1(t)-u_1^*(t),\cdots,u_r(t)-u_r^*(t))=0 \tag{7.10-16}$$

因$[t_0,T]$是任意区间,故(7.3-17)式在$[t_0,+\infty]$上成立,即

$$\begin{aligned}\mathrm{col}(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_r(t)) &\leqslant \mathrm{col}(u_1^*(t),\cdots,u_r^*(t))\\ &\leqslant (E-\Omega)^{-1}\mathrm{col}(u_1^{(0)}(t),\cdots,u_r^{(0)}(t))\end{aligned}$$

故有 $\mathrm{col}(\|x_1(t)\|+\|\dot{x}_1(t)\|,\cdots,\|x_r(t)\|+\|\dot{x}_r(t)\|)$

$$\leqslant (E-\Omega)^{-1}\mathrm{col}(u_1^{(0)}(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\alpha_1(\xi)\mathrm{d}\xi},\cdots,u_r^{(0)}(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\alpha_r(\xi)\mathrm{d}\xi}) \tag{7.10-17}$$

最后一不等式(7.10-17)显然蕴涵(7.10-11)平凡解在 $C^{(1)}$空间中渐近稳定。

第八章　泛函微分方程

第七章详尽地介绍了微分差分方程稳定性的理论方法及应用,而泛函微分方程的实例大都是微分差分方程。故本章只简略地介绍泛函微分方程描述的动力系统的稳定性的基本结果。§1 叙述了滞后型泛函微分方程稳定性的 Ляпунов 泛函方法的基本定理及新近的推广结果;§2　讨论了滞后型泛函微分方程稳定性 Ляпунов 函数法及 Разумихин 技巧;§3　讨论了滞后型泛函微分方程解的有界性及耗散性;§4　分析了中立型泛函微分方程稳定性的 Ляпунов 泛函法;§5　给出了中立型泛函微分方程的 Ляпунов 函数法的结果;§6　介绍了中立型泛函微分方程指数稳定性。

§1　滞后型系统稳定性的 Ляпунов 泛函法[165~167]

本节将首先介绍滞后型泛函微分方程稳定性的 Ляпунов 泛函法的几个经典定理及详细证明,然后叙述一些典型的推广结果,但有些略去证明,仅指出参考文献。

考虑滞后型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_t) \tag{8.1-1}$$

这里　$\boldsymbol{x}_t(\theta)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t+\theta)$在$-h\leqslant\theta\leqslant 0$上有定义,$h$ 是正数。

以 C 表示连续函数$\xi(t)\in C[[-h,0],R^n]$,具有一致收敛拓扑结构$\|\xi\|\overset{\text{def}}{=}\max\limits_{-h\leqslant s\leqslant 0}\|\xi(s)\|$的 Banach 空间,给定 $H>0$,C_H 表示$\xi\in C$、$\|\xi\|<H$ 的子集,$\boldsymbol{f}\in C[R_+\times C,R^n]$,$R_+=[0,$

$\infty]$，F 是有界集到有界集的映射。$\forall t_0 \in R_+, \xi \in C_H$，(8.1-1)式有解 $x(t,t_0,\xi)$ 定义在 $[t_0,t_0+\alpha]$ 上，若存在 $H_1<H$，$|x(t,t_0,\xi)| \leqslant H_1$ 则 $\alpha=\infty$。

泛函 $V(t,\xi)$ 沿(8.1-1)式的解的 Dini 右上导数定义为

$$D^+ V(t,\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{h\to 0^+} [V(t+h, x_{t+h}(t,\xi)) - V(t,\xi)]/h$$

定义 8.1.1 称(8.1-1)式的零解稳定[一致稳定]，若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta(t_0,\varepsilon)>0$ $[\exists \delta(\varepsilon)]$，当 $\|\xi\|<\delta$，$t \geqslant t_0$，有 $\|x(t,t_0,\xi)\|<\varepsilon$。称(8.1-1)式的零解是吸引的[一致吸引的]，若 $\exists \sigma(t_0)>0[\sigma>0]$，$\forall \eta>0$，$\exists T(t_0,\eta)>0[\exists T(\eta)>0]$，当 $\|\xi\|<\sigma$，$t \geqslant t_0+T$ 时有

$$\|x(t,t_0,\xi)\|<\eta$$

若(8.1-1)式的零解稳定且吸引，称为渐近稳定。

(8.1-1)式的零解一致稳定且一致吸引，称为一致渐近稳定。

下面介绍用 Ляпунов 泛函得到关于一致稳定，一致渐近稳定，不稳定的几个基本定理。

定理 8.1.1 若存在 Ляпунов 泛函 $V(t,\boldsymbol{\xi}) \in C[R_+ \times C, R_+]$ 满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{\xi}(0)\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{\xi}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{\xi}\|)$ $\qquad \varphi_1,\varphi_2 \in K$

2) $D^+ V(t,\boldsymbol{\xi})|_{(8.1\text{-}1)} \leqslant 0$

则(8.1-1)式的零解一致稳定。

证：$\forall t_0 \in R_+$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta(\varepsilon)>0$，$0<\delta<\varepsilon$ 使得 $\varphi_2(\delta)<\varphi_1(\varepsilon)$。设 $\|\boldsymbol{\xi}\|<\delta$，由条件 2)有

$$\begin{aligned}\varphi_1(\|x(t,t_0,\boldsymbol{\xi})\|) &\leqslant V(t,x_t(t_0,\boldsymbol{\xi})) \leqslant V(t_0,\boldsymbol{\xi}) \\ &\leqslant \varphi_2(\delta) < \varphi_1(\varepsilon)\end{aligned}$$

故有 $\|x(t,t_0,\boldsymbol{\xi})\|<\varepsilon$，$t \geqslant t_0$，从而(8.1-1)零解一致稳定。

定理8.1.2 若定理 8.1.1 的条件 2)加强为：

2)′ $D^+ V(t,\boldsymbol{\xi})|_{(8.1\text{-}1)} \leqslant -W(\|\boldsymbol{\xi}(0)\|)$ $\quad$ W 为正定函数，其它条件不变，则(8.1-1)式的零解一致渐近稳定。

证:定理 8.1.2 的条件已蕴涵定理 8.1.1 的条件,故(8.1-1)式的零解一致稳定。

对 $\varepsilon=1$,取 $\sigma_0=\sigma_0(1)$,当 $\|\xi\|<\sigma_0$, 有 $\|x(t,t_0,\xi)\|<1$

今证 $\forall\eta>0,\exists T(\delta_0,\varepsilon)$ 当 $t\geqslant t_0+T(\sigma_0,\eta)$,有

$$\|x(t,t_0,\xi)\|<\varepsilon$$

若不然,令 $\delta=\delta(\varepsilon)>0, x(t)\overset{\text{def}}{=}x(t,t_0,\xi)$,则在每一长度为 r 的区间上必有 s,使 $\|x(s)\|\geqslant\delta$,故可取得一序列 $\{t_k\}$ 使得

$$t_0+(2k-1)r\leqslant t_k\leqslant t_0+2kr$$

$$\|x(t_k)\|\geqslant\delta\qquad k=1,2,\cdots$$

由关于 f 有界的假设可知存在常数使 $|\dot{x}(t)|<L$, 故对 $\forall t\geqslant t_0$ 在区间 $t_k-\frac{\delta}{2L}\leqslant t\leqslant t_k+\frac{\delta}{2L}$ 上有 $|x(t)|>\frac{\delta}{2}$,不妨设区间 $[t_k-\frac{\delta}{2L},t_k+\frac{\delta}{2L}]$ 互不相交,由此可得

$$D^+V(t,x_t)\leqslant-W(\frac{\delta}{2})\qquad t\in[t_k-\frac{\delta}{2L},t_k+\frac{\delta}{2L}]$$

因此,由 $t_k-\delta>\frac{\delta}{L}(k-1)$ 有

$$V(t_k,x_{t_k})-V(t,\xi)\leqslant-W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}(k-1)$$

记 $k(\delta,L)$ 为大于 $\xi(\delta_0)/\frac{\delta}{L}W(\frac{\delta}{2})$ 的最小整数,若

$$k>1+k(\delta_0,L)\text{ 则有}$$

$$V(t_k,x_{t_k})<\xi_2(\delta_0)-W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}\frac{\xi(\delta_0)}{W(\frac{\delta}{2})\frac{\delta}{L}}\leqslant0$$,与条件 1)矛盾,故

$\exists\tau=\tau(t_0,\xi)\qquad t_0<\tau\leqslant t_0+2rK(\sigma_0,L)$, $\|\xi\|<\sigma_0$ 使得

$\|x(\tau)\|<\delta$,从而当 $t\geqslant t_0+2rK(\sigma_0L)$ 时有

$$\|x(t)\|<\delta\leqslant\varepsilon, CT(\delta_0\varepsilon)=2rK(\sigma_0L)$$

即(8.1-1)式的零解一致渐近稳定。

例 1 考虑非自治纯量方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=-a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau)\qquad(8.1\text{-}2)$$

其中当 $t\in R$ 时 $a(t)$、$b(t)$ 有界连续，且对于 $\forall t\in R, a(t)\geqslant\delta>0$，

$$取\quad V(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2(0)+\mu\int_{-r}^{0}\xi^2(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad \mu=\frac{\delta}{2}$$

$$D^+V(\xi)=-(a(t)-\mu)\xi^2(0)-b(t)\xi(0)\xi(-r)\mu\xi^2(-r)$$

若 $\quad (2a(t)-\delta)\delta\geqslant\alpha>\beta\geqslant b^2 \qquad \alpha,\beta$ 为常数。

则(8.1-2)式零解一致渐近稳定。

定理8.1.1、8.1.2 本质上是 Ляпунов 关于常微分方程中稳定性定理，渐近稳定性定理推广到泛函微分方程，基本思想是一致的。因此下面的不稳定性定理自然便是 Четаев 定理推广到泛函微分方程的结果。

定理8.1.3 设 $V(\xi)$ 是 C 中连续有界泛函，若记为 $B(0,r)=\{\xi\in C:\|\xi\|<r\}$，且存在 $r>0$，开集 $U\subset C$，使得：

1) $V(\xi)>0$ 在 $\xi\in U$ 的边界 Γ_0 上，$V(\varphi)=0$；

2) $\{0\}=V\cap B(0,r)$；

3) 在 $V\cap B(0,r)$ 上 $V(\xi)\leqslant\varphi_1(\|\xi(0)\|)$；

4) 在 $R_+\times V\cap B(0,r)$ 上

$$D_+V(\xi)\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}[V(x_{t+h}(t,\xi))-V(\xi)]\geqslant\varphi_2(\|\xi(0)\|)$$

则(8.1-1)式的零解不稳定。

特别地，$\forall\xi\in U\cap B(0,r)$，通过 (t_0,ξ) 的解 $x_t(t_0,\xi)$ 必在有限时间内达到 $B(0,r)$ 的边界。

证：设 $t_0\in R_+$，$\varphi\in U\cap B(0,r)$，则 $V(\xi)>0$。由条件 3)有

$$\|\xi(0)\|\geqslant\varphi_1^{-1}(V(\xi))$$

故 $$D_+V(\xi)\geqslant\varphi_2(\|x(t)\|)\geqslant\varphi_2(\varphi_1^{-1}(V(\xi)))>0$$

$$当\ x_t\in U\cap\beta(0,r)$$

记 $$\eta=\omega(\varphi_1^{-1}(V(\varphi)))$$

则当 $x_t\in U\cap B(0,r)$ 时，就有

$$B(x_t)\geqslant V(\varphi)+\eta(t-\sigma)$$

由条件 1)、4)推出 $x(t)$ 不可能越过 U 的边界 Γ_v 而离开，$V(\xi)$ 在

$U\cap B(0,r)$上有界，故必有 t_1，使 $x_{t_1}\in B(0,r)$的边界。由 2)空间 C 的原点($\varphi\equiv 0$)的任意邻域存在 $\xi\in U\cap B(0,r)$，故(8.1-1)式的零解不稳定。

例 2　考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=a(t)f(x(t))+b(t)f(x(t-\tau)) \quad (8.1\text{-}3)$$

其中
$$f(x)x>0, \text{当 } x\neq 0, f(0)=0$$

$a(t)$、$b(t)$是 R^+ 上的连续函数，且 $a(t)\geqslant\delta>0$

$$|b(t)|<q\delta \qquad 0<q<1$$

若取 Ляпунов 泛函

$$V(\xi)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x-\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^t f^2(x(s))\mathrm{d}s$$

则有
$$V(\xi)\leqslant\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$$

$$D^+V|_{(8.1\text{-}3)}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left[a(t)-\frac{\delta}{2}\right]f^2(x)+b(t)f(x(t))$$
$$\cdot f(x(t-\tau))+\frac{\delta}{2}f^2(x(t-\tau)) \quad (8.1\text{-}4)$$

注意到(8.1-4)式是 $f(x(t)),f(x(t-\tau))$的正定二次型。若

$$V=\left\{\xi\in C:\int_0^x f(x)\mathrm{d}x>\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^t f^2(x(\xi))\mathrm{d}\xi\right\}$$

非空，则(8.1-4)式的零解不稳定。

若　$a(t)\leqslant-\delta<0,|b(t)|<q\delta,\sigma\leqslant q<1$

取 Ляпунов 泛函为

$$V(\xi)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+\frac{\delta}{2}\int_{t-\tau}^t f^2(x(s))\mathrm{d}s$$

则由定理 8.1.2 知(8.1-1)式的零解一致渐近稳定。

对于上述基本定理有各式各样的推广改进，例如典型的有

定理 8.1.4　若存在 $V(t,\varphi)$及 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in K$，满足

1) $\forall\, t\geqslant 0,\varphi\in C$

$$\varphi_1(\|\varphi(0)\|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant\varphi_2(\|\varphi\|) \quad (8.1\text{-}5)$$

2) 对$\forall t_0 \geqslant 0, \varphi \in C, \exists r_0 \in (0, r], \lambda \geqslant 1$,使当$t \in [t_0, t_0 + r_0]$,且当 $V(t, x_t(t_0, \varphi)) \geqslant \lambda \varphi_2(\| \varphi \|)$

$$V(t, x_t(t_0, \varphi)) \geqslant V(\xi, x_\xi(t_0, \varphi)) \qquad t_0 \leqslant \xi \leqslant t$$

$$V(t, x_t(t_0, \varphi)) \geqslant V(\xi, x_\xi(t_0, \varphi))$$

$$t_0 \leqslant \xi \leqslant t \qquad t \geqslant \xi + t_0 + r_0$$

时有

$$D^+ V(t, x_t(t_0, \varphi)) \leqslant G(t, V(t, x(t_0, \varphi))) \quad (8.1\text{-}6)$$

其中 $$G \in C[R_+, R_+], G(t, 0) = 0$$

3) 常微分方程

$$\dot{y}(t) = G(t, y(t))$$

的零解一致稳定。

则(8.1-1)式的零解一致稳定。

推论8.1.1 若定理8.1.4中条件1)满足,条件2)中(8.1-6)式改为下式

$$D^+ V(t, x_t(t_0, \varphi)) \mid_{(8.1\text{-}1)} \leqslant h(t) H(V(t, x_t(t_0, \varphi)))$$

条件3)改为$\int_{t_0}^{\infty} h(t) \mathrm{d}t < \infty, \int_0^a \frac{\mathrm{d}V}{H(V)} = \infty (a > 0)$

则(8.1-1)式的零解一致稳定。

定理8.1.4及推论8.1.1的详细证明可参考文献[165~167],这些结果实质上是建立了泛函微分方程稳定性的比较原理和方法,是很有用的。

下面介绍最新的文献[174]的结果,把推论8.1.1中$\int_0^a \frac{\mathrm{d}V}{H(V)} = \infty$的假设去掉了。

定理8.1.5 设存在Ляпунов泛函$V(t, \xi) \in [R^t \times C, R^+]$满足

1) $\varphi_1(\| \xi(0) \|) \leqslant V(t, \xi) \leqslant \varphi_2(\| \xi \|)$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in K$$

2) 对任何区域$0 < \lambda < \| \xi \| \leqslant u$,存在$t^*$使当$t \geqslant t^*$时

$$D^+ V(t,\xi)|_{(8.1\text{-}1)} \leqslant \lambda(t)H(V)$$

其中 $\lambda(t)\in C[R^+,R],H\in C[R^+,R^+]$,且 $H(s)\neq 0,s\neq 0$

3) $\int_{t_0}^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s < \infty$　　对某 $t_0 > \tau$。

则方程(8.1-1)式的零解一致稳定。

证:$\forall\varepsilon>0$,由条件2)对区域 $0<\varphi_2^{-1}(\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon))\leqslant\|\varphi\|\leqslant\varepsilon$, 存在 $t^*(\varepsilon)$,使当 $t\geqslant t^*$时,有

$$D^+ V(t,\varphi)|_{(8.1\text{-}1)} \leqslant \lambda(t)H(V)$$

由条件3)知存在 $T(\varepsilon)>t^*$使得对任意的 $s_2>s_1\geqslant T(\varepsilon)$有

$$\int_{s_1}^{s_2}\lambda(t)\mathrm{d}t < \int_{\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}$$

又由条件1)及解对始值的连续依赖性知存在 $\delta_1(\varepsilon)$使得当 $\|\varphi\|<\delta_1(\varepsilon)$时有

$$V(t,\varphi) < \frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon) \tag{8.1-7}$$

和当 $\|\varphi\|<\delta(\varepsilon,T)$(不妨设 $\delta(\varepsilon,T)<\delta_1(\varepsilon)$)时有

$$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\| < \delta_1(\varepsilon)\quad \tau\leqslant t_0\leqslant T(\varepsilon)\qquad t_0\leqslant t\leqslant T(\varepsilon)$$

下面证对一切 $t_0\in[\tau,+\infty]$,当 $\|\varphi\|<\delta$ 时

$$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon\quad t\geqslant t_0 \text{成立}$$

分两种情况进行讨论:

情况1　$t_0\geqslant T,\|\boldsymbol{\xi}\|<\delta$,现证对 $t\geqslant t_0$

$$V(t,\boldsymbol{x}_t) < \varphi_1(\varepsilon),\quad \text{记 } V(t) = V(t,\boldsymbol{x}_t)$$

若不然,则由(8.1-7)式知存在 $t_2>t_1\geqslant t_0$,使得

$$V(t_1) = \frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)\qquad V(t_2) = \varphi_1(\varepsilon)$$

且

$$\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon) < V(t) < \varphi_1(\varepsilon)\qquad t\in(t_1,t_2) \tag{8.1-8}$$

$$V(t) < \varphi(\varepsilon)\qquad t\in[t_0,t_2]$$

于是得到

$$\| x_t(t_0,\xi) \| < \varepsilon \qquad t \in [t_0 - r, t_2]$$

从而 $$\| x_t(t_0,\xi) \| < \varepsilon \qquad t \in [t_0, t_2]$$

又方程(8.1-1)和(8.1-8)式知

$$\| x_t \| \geqslant \varphi_2^{-1}(\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)) \qquad t \in [t_1, t_2]$$

由 T 的取法和(8.1-8)式知

$$D^+ V(t) |_{(8.1\text{-}1)} \leqslant \lambda(t) H(V(t)) \qquad t \in [t_1 . t_2]$$

易证 $$D^+ \int_{s_0}^{V(t)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \leqslant \lambda(t) \qquad t \in [t_1, t_2]$$

从而 $$\int_{V(t_1)}^{V(t_2)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) \mathrm{d}s$$

由 $V(t_1) = \frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)$, $V(t_2) = \varphi_1(\varepsilon)$,得到

$$\int_{\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} = \int_{V(t_1)}^{V(t_2)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) \mathrm{d}s$$

$$< \int_{\frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)}$$

得到矛盾。故 $V(t) < \varphi_1(\varepsilon)$, $t \geqslant t_0$,因此

$$\| x_t(t_0,\xi) \| < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

情况 2 $t \leqslant t_0 < T$,此时由(8.1-8)式知当 $\| \xi \| < \delta$ 时,有

$$\| x_t(t_0,\xi) \| < \delta_1, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T$$

又对于 $t_1 = T, \varphi^* = x_T(t_0,\xi)$,有

$$\| \varphi^* \| < \delta_1$$

由(8.1-7)式知

$$V(t, \varphi^*) < \frac{1}{2}\varphi_1(\varepsilon)$$

重复情况 1 的证明可知

$$\| x_t(t_0,\xi) \| < \varepsilon \qquad t \geqslant t_1 = T \qquad \text{即}$$

$$\| x_t(t_0,\xi) \| < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

结合情况 1 和情况 2 可知方程(8.1-1)的零解是一致稳定的。

例 3　研究纯量方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=(\frac{1}{t^2}-t)x(t)+x(t-r)x^2(t) \qquad t\geqslant r>0 \tag{8.1-9}$$

取　$V(\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{2}{t^2}V-x^2(t)[t-x(t)x(t-r)]$$

当 $0<\lambda\leqslant\|x_t\|\leqslant\varphi_1$,以及 $t\geqslant\varphi_1^2$ 时,有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant\frac{2}{t^2}V$$

这里 $\lambda(t)=\frac{2}{t^2}$由定理 8.1.5 可知(8.1-9)式的零解一致稳定。

定理 8.1.6　若存在 Ляпунов 泛函 $V(t,\varphi)\in C[R^+\times C,R^+]$,$\lambda\in C[I,R]$满足定理 8.1.5 中的条件 1)、2),且存在 $t_1\in R^+$,当 $t\geqslant t_1$ 时,$\lambda(t)\leqslant 0$,且$\int_{t_1}^{+\infty}\lambda(s)ds=-\infty$。则(8.1-1)式的零解渐近稳定。

证:由定理 8.1.5 的条件 1)、2)及 $t\geqslant t_1$ 时,$\lambda(t)\leqslant 0$ 及定理 8.1.5 论证知,方程(8.1-1)式的零解一致稳定。

$\forall\varepsilon>0$,令 $\delta(\varepsilon)$为一致稳定定义中的 δ,记 $N_1=\{\varphi\in C\ \|\varphi\|<\delta(1)\}$。故 $\forall t_0\in I,\varphi\in N_1$,有

$$\|x_t(t_0,\varphi)\|<1 \qquad t\geqslant t_0$$

下面证 $x_t(t_1,\varphi)\to 0$ (当 $t\to+\infty$)。

若对一切 $t\geqslant t_0$ 均有 $\|x_t(t_0,\varphi)\|\geqslant\delta(\varepsilon)$,由条件 2)知,对 $0<\delta(\varepsilon)\leqslant\|\varphi\|\leqslant 1$, 存在 t^*。当 $t\geqslant t^*$时,有

$$D^+V(t,x_t)\leqslant\lambda(t)H(V)$$

即

$$\int_{V(t^*)}^{V(t)}\frac{ds}{H(s)}\leqslant\int_{t^*}^{t}\lambda(s)ds \qquad t\geqslant t^*$$

其中 $V(t)=V(t,x_0)$,取 $t_2 \geqslant t^*$, 使得

$$V(t_2) > 0,\text{得到}$$

$$\int_{V(t_2)}^{V(t)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \leqslant \int_{t_2}^{t} \lambda(s)\mathrm{d}s \qquad t \geqslant t_2$$

由条件 3)知

$$\int_{t_2}^{+\infty} \lambda(s)\mathrm{d}s = -\infty$$

从而 $V(t) \to 0 (t \to +\infty)$。事实上,如果存在 $\eta > 0, t_n \to \infty$,使得 $V(t_n) > \eta$,则存在 N,当 $n \geqslant N, t_n > t_2$, 且

$$\int_{V(t_2)}^{V(t_n)} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \leqslant \int_{t_2}^{t_n} \lambda(s)\mathrm{d}s \tag{8.1-10}$$

又
$$V(t_n) \leqslant \varphi_2(\| x_{t_n} \|) \leqslant \varphi_2(1)$$

故$\{V(t_n)\}$存在收敛子序列,不妨记为 $V(t_n)$。$V(t_n) \to V_0$(当 $n \to \infty$),有 $\eta \leqslant V_0 \leqslant \varphi_2(1)$

在(8.1-10)式中　两边令 $n \to \infty$取极限得到

$$\int_{V(t_2)}^{V_0} \frac{\mathrm{d}s}{H(s)} < -\infty$$

矛盾。故 $V(t) \to 0$ (当 $t \to \infty$),有

$$\sup_{\theta \in [-r,0]} V(t+\theta) = V_t \to 0 \ (t \to +\infty) \tag{8.1-11}$$

又
$$0 < \varphi_1(\delta) \leqslant \varphi_1(\| x_t \|) \leqslant V_t \qquad t \geqslant t_0 + r$$

这与(8.1-11)式矛盾。故存在 $T \geqslant t_0$,使得 $\| x_T(t_0, \varphi) \| < \delta(\varepsilon)$,从而当 $t \geqslant T$ 时

$$\| x_t(t_0, \varphi) \| < \varepsilon$$

即方程(8.1-1)的零解渐近稳定。

注　在文献[167]P119 的推论 3.1 中讨论自治系统的零解趋于零的渐近性态时,作了 $f(x_t)$的全连续性及 $\dot{V}$ 负定的假设。而这里定理 8.1.7 不需要 f 有界性假设,且 V 的上界可以是在某个范围内的常负函数。

最后，介绍一个关于零解一致渐近稳定的结果。

定理8.1.7[174] 若存在Ляпунов泛函 $V\in C[I\times C,R^{+}]$和$\lambda(t)\in C[I,R]$满足定理8.1.7的条件1)、2)，且存在 $t_1\in I$ 使得当 $t\geqslant t_1$ 时，$\lambda(t)\leqslant 0$。对$\forall\, t_0>t^*$，$M>0$，存在 $T^*(M)>0$，使得

$$\int_{t_0}^{t_0+T^*}\lambda(s)\mathrm{d}s<-M \tag{8.1-12}$$

则方程(8.1-1)式的零解是一致渐近稳定的。

证：由条件1)、2)及 $t\geqslant t_1$ 时 $\lambda(t)\leqslant 0$，以及定理8.1.6之论证和方程(8.1-1)式的零解是一致稳定的，令 $\delta(\varepsilon)$为一致稳定定义中的 δ，记为 $S(1)=\{\varphi\in C,\ \|\varphi\|<\delta(1)\}$对任意的 $t_0\in[\tau,+\infty]$。

$\varphi\in S(1)$，成立$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\|<1,t\geqslant t_0$。

对于$0<\delta(\varepsilon)\leqslant\|\varphi\|\leqslant 1$，由条件2)知存在 $t^*(\tau)\geqslant t_1$使当$t\geqslant t^*$时，有

$$D^+V(\dot{\lambda},\varphi)\mid_{(8.1\text{-}1)}\leqslant\lambda(t)H(V) \tag{8.1-13}$$

又
$$\int_{t^*}^{+\infty}\lambda(s)\mathrm{d}s=-\infty \tag{8.1-14}$$

记 $V(t)=V(t,\boldsymbol{x}_t)$

情况1 $t_0\leqslant t^*(\varepsilon)$，取 $t_2(\varepsilon)\geqslant t^*(\varepsilon)$，使得当 $t\geqslant t_2(\varepsilon)$ 时

$$\int_{t^*}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s<-\int_{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}^{\varphi_2(1)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)} \tag{8.1-15}$$

考察 $I^*=[t^*,t_2+r]$此时必存在 $t_3\in I^*$，使得

$\|\boldsymbol{x}_{t_3}(t_0,\varphi)\|<\delta(\varepsilon)$，若不然，即对 $t\in I^*$，均有

$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\|\geqslant\delta(\varepsilon)$，则由(8.1-13)式得到

$$\int_{V(t^*)}^{V(t)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\leqslant\int_{t^*}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s\qquad t\in I^*$$

又
$$\varphi_1(\|\boldsymbol{x}_t\|)\leqslant V(t)\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{x}_t\|)\leqslant\varphi_2(1)$$

无论 $V(t^*)\leqslant V(t)$或 $V(t^*)>V(t)$ 都有

$$-\int_{t^*}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{V(t)}^{V(t^*)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\leqslant\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_2(1)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}$$

$$=\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}+\int_{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}^{\varphi_2(1)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\qquad t\in I^*$$

由(8.1-15)式知,当 $t\in[t_2,t_2+r]$时,有

$$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\delta^*(\varepsilon))}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}>0$$

从而 $\|x(t_0,\varphi)\|<\delta(\varepsilon)\ t\in[t_2,t_2+r]$,因此 $\|x_{t_{1+r}}(t_0,\varphi)\|<\delta(\varepsilon)$,这与 $\|x_t(t_0,\varphi)\|\geqslant\delta(\varepsilon)\ ,t\in I^*$ 矛盾。故必有 $t_3\in I^*$ 使得 $\|x_{t_3}(t_0,\varphi)\|<\delta(\varepsilon)$,从而当 $t\geqslant t_2+r$, $\|x_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$,由于 $t_0\geqslant\tau,t_0-\tau+t_2+r\geqslant t_2+r$,取 $T(\varepsilon)=t_2+r-\tau$,则当 $t\geqslant t_0+T$ 时, $\|x_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$。

情况 2　$t_0>t^*(\varepsilon)$,令 $I_0^*=[t_0,t_0+r+T^*]$,T^*满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T^*}\lambda(s)\mathrm{d}s<-\int_{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}^{\varphi_2(1)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\qquad(8.1\text{-}16)$$

由定理的假设知,上述 T^* 只依赖于 ε,且 $\lambda(s)\leqslant0,s\geqslant t_0$, 因此

$$\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s<-\int_{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}^{\varphi_2(1)}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\qquad t\geqslant t_0+T^*$$

与情况 1 类似可证,若 $t\in I_0^*\quad\delta\leqslant\|x_t\|\leqslant1$ 则

$$-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}\qquad(8.1\text{-}17)$$

对于 $t\in I_1=[t_0+T^*,t_0+T^*+r]\subset I_0^*$,由(8.1-16)、(8.1-17)两式,有

$$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\delta(\varepsilon))}\frac{\mathrm{d}s}{H(s)}>0$$

与情况 1 类似可得

$\|x_{t_0+T^*+r}(t_0,\varphi)\|<\delta(\varepsilon)$,这与 $\|x_t(t_0,\varphi)\|\geqslant\delta\ t\in I^*$

相矛盾,故当 $t\geqslant t_0+T^*+r$ 时有

$$\|x_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$$

由情况 1 和 2 知方程(8.1-1)的零解是一致渐近稳定的。

注 文献[167]中相应定理要求 f 有界和 $\dot{V}(t,\varphi)$ 负定,此定理去掉了 f 的有界性假设 $\dot{V}(t,\varphi)$ 的上界允许是在某个范围内常负型函数。

例 4 讨论纯量方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-tx(t)+a(t)x(t-r)x^2(t) \qquad t\geqslant r>0$$

其中 $a:\in C[(r+\infty),R]\,|a(t)|\leqslant L \quad t\geqslant r$

取 $V(t,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)$ 则

$$D^+V(t,\varphi)=-\frac{1}{2}tx^2(t)-\frac{1}{2}x^2(t)[t-2a(t)x(t-r)x(t)]$$

对于 $0<\lambda\leqslant\|\boldsymbol{x}_t\|\leqslant\mu,\qquad t\geqslant 2L\mu^2$ 当 $t\geqslant t^*$ 时

$$\begin{aligned}D^+V(\boldsymbol{x},\varphi)&\leqslant-\frac{1}{2}tx^2(t)-\frac{1}{2}x^2(t)(t-2L\mu^2)\\&\leqslant-\frac{1}{2}tx^2(t)=-tV(t,\varphi)\end{aligned}$$

这里 $\lambda(t)=-t,t\geqslant t_0\geqslant r$。对任意的 $M>0$,取 $T^*>\sqrt{2M}$

$$\int_{t_0}^{t_0+T^*}\lambda(s)\mathrm{d}s=-\sigma T^*-\frac{1}{2}T^{*2}\leqslant-\frac{1}{2}T^{*2}<-M$$

根据定理 8.1.6,上述方程的零解是一致渐近稳定的。显然此例中 $f(t,\varphi)=-t\varphi(0)+a(t)\varphi(-r)\varphi^2(0)$ 不具有有界性。

§2 滞后型系统的 Разумихин 条件[165~167]

Ляпунов 泛函方法,虽然理论上很一般,但除了对一些较特殊的微分差分方程,构造这种泛函较方便外,对一般系统往往十分困难,于是人们仍然希望借助于常微分方程中构造 Ляпунов 函数的种种方法和技巧。用 Ляпунов 函数主要的困难和麻烦是判定 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 的负定或半负定。

例如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t) + bx(t - \tau)$$

选取 $V=\frac{1}{2}x^2$,则 $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=ax^2+bx(t)x(t-\tau) \qquad (8.2\text{-}1)$$

就很难判定$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的负定或半负定。对右端含有多个时滞的微分方程组,尤其困难。

60 年代苏联学者 Разумихин 在没有增加对泛函微分方程本身的限制的前提下,提出了一个 Разумихин 条件,发展成为了一种基本的方法,称之为 Ляпунов 函数加 Разумихин 技巧,使得泛函微分方程稳定性,有界性的研究有了长足的进展。直到今天,仍有不少学者在研究,推广这种方法,影响十分深远。

下面以(8.2-1)式来仔细分析一下 Разумихин 的原始思想。

(8.2-1)式的右端是关于 $x(t)$,$x(t-\tau)$的函数,而我们的稳定性在某种意义上讲是研究解的初态与未来状态的关系。当 $|x(t-\tau)|>|x(t)|$时,解已成下降趋势(或成稳定趋势,不必对$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$加任何条件。故只需对$|x(t)|\geqslant|x(t-\tau)|$的情况,加以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$ 的条件,这个条件,正是克制解的不稳定趋势,故在 $x(t)$,$x(t-\tau)$平面上,只要在有阴影的部分内$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$ 便行了,如图 8-1 所示。

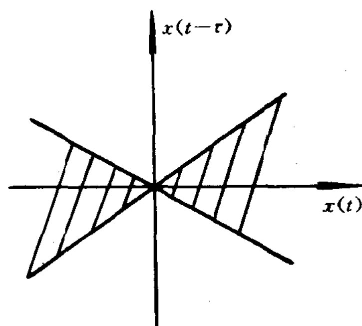


图 8-1

于是

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant ax^2 + |b| x^2(t) = (a + |b|) x^2(t)$$

$$\text{当} |x(t-\tau)| \leqslant |x(t)|$$

这时当 $a + |b| < 0$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 便是负定的。

于是有定理 8.2.1。

定理 8.2.1 若存在一个 Ляпунов 函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ 满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{x}\|)$

2) $D^+ V(t, \boldsymbol{x})|_{(8.1\text{-}1)} \leqslant 0$ 当 $V(s, \boldsymbol{x}(s)) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}(t))$ $t_0 \leqslant s \leqslant t$

则(8.2-1)式的零解一致稳定。

证:定义 Ляпунов 泛函

$$\overline{V}(t, \xi) = \sup_{\theta \in [-r, 0]} V(t + \theta, \xi(\theta))$$

则存在 $\theta_0 \in [-r, 0]$ 使得

$$\overline{V}(t, \xi) = V(t + \theta_0, \xi(\theta_0))$$

其中 $\theta_0 = 0$ 或 $\theta_0 < 0$

当 $\theta_0 < 0$ 时有 $V(t + \theta, \xi(\theta)) \leqslant V(t + \theta_0, \xi(\theta_0))$ $\theta \in [\theta_0, 0]$,故对 $0 < h \ll 1$, 有

$$\overline{V}(t + x_{t+h}(t, \xi)) \leqslant \overline{V}(t, \xi)$$

故 $D^+ \overline{V} = 0$

当 $\theta_0 = 0$ 由条件 2)可知 $D^+ \overline{V} \leqslant 0$

此外 $\varphi_1(\|\xi(0)\|) \leqslant \overline{V}(t, \xi) \leqslant \varphi_2(\|\xi\|)$

由定理 8.1.1 可知结论成立。

定理 8.2.2 若

1)定理 8.2.1 的条件 1)成立;

2)定理 8.2.1 的条件 2)加强为:存在一个连续非减函数 $P(s) > 0 (s > 0)$ 及正定函数 $u(\boldsymbol{x})$,使得当 $V(t + \theta, \varphi(\theta)) < P(V(t, \varphi(0)))$,对于 $\theta \in [-r, 0]$ 时,有

$$D^+ V(t,\varphi(0))\mid_{(8.1\text{-}1)} \leqslant -u(\|\varphi(0)\|)$$

则(8.1-1)式的零解是一致渐近稳定的。

若 $\varphi_1 \in KR$，则(8.2-1)式的零解一致全局稳定。

证:定理8.2.2的条件蕴涵定理8.2.1的条件满足,故(8.2-1)式的零解一致稳定。

设 $\delta>0, H>0$ 满足 $\varphi_2(\delta)=\varphi_1(H)$，事实上,由 $\varphi_2(0)=0$ 有 $0<\varphi_1(s)\leqslant\varphi_2(s), s>0$ 取定 H,再确定 δ,使 $\varphi_2(\delta)=\varphi_1(H)$，下面证(8.1-1)式的零解一致渐近稳定且全局吸引。记初始时刻为 t_0,设

$\varphi_2(\delta)=\varphi_2(H)$，由定理8.2.1可知,若 $\|\varphi\|\leqslant\delta$,则有

$$x_t(\sigma,\varphi)\| \leqslant H$$

$$V(t,x_t(t_0,\varphi)) < \varphi_2(\delta) \quad \text{对 } \forall t \geqslant t_0-\tau \text{ 成立。}$$

设 $0<\eta\leqslant H$ 为任给定的数,现证存在 $T=T(\eta,\delta)$,使得 $\forall t_0\geqslant 0, \|\varphi\|\leqslant\delta$。当 $t\geqslant t_0+T+r$ 时,有

$$\|x_t(t_0,\varphi)\| \leqslant \eta$$

若能证明当 $t\geqslant t_0+T$ 时, $V(t,x_t(t_0,\varphi))\leqslant\varphi_1(\eta)$，则上述结论成立。

记 $x(t)=x_t(t_0,\varphi)$，由 $P(s)$ 的性质知存在 $a>0$,使得对 $\varphi_1(\eta)\leqslant s\leqslant\varphi_2(\sigma)$ 成立 $P(s)-s>a$。记 N 为满足 $\varphi_1(\eta)+N_a\geqslant\varphi_2(\delta)$ 的最小正整数,且记

$$r=\inf_{V^{-1}(\varphi_1(\eta))\leqslant S\leqslant H} u(s) \qquad T=N\varphi_2(\delta)/r$$

现在要证

$$V(t,x(t))\leqslant\varphi_1(\eta) \qquad \forall t\geqslant t_0+T$$

首先证明存在 $t_1\geqslant t_0+(\varphi_1(\delta))/r$ 有

$$V(t,x(t)) < \varphi_1(\eta)+(N-1)a \tag{8.2-2}$$

若不然,则对所有 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varphi_2(\delta)/r$ 成立

$$\varphi_1(\eta)+(N-1)a\leqslant V(t,x(t))$$

由此推出矛盾。

因为$\forall\, t \geqslant t_0 - r$,有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \varphi_2(\delta)$$

从而 $P(V(t, \boldsymbol{x}(t))) > V(t, \boldsymbol{x}(t)) + a \geqslant \varphi_1(\eta) + Na$

$$\geqslant \varphi_2(\delta) \geqslant V(t+\theta, \boldsymbol{x}(t+\theta))$$

当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varphi_2(\delta)/r \qquad \theta \in [-r, 0]$

由定理条件2)有

$D^+ V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant -\boldsymbol{u}(\|\boldsymbol{x}(t)\|) \leqslant -r$ 当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varphi_2(\delta)/r$

故有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}(t_0)) - r(t - t_0)$$
$$\leqslant \varphi_2(\delta) - r(t - t_0) \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varphi_2(\delta)/r$$

当 $t = t_1 = t_0 + \varphi_2(\delta)/r$ 有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \varphi_2(\delta) - \varphi_2(\delta) \leqslant 0$$

与 $V(t, \boldsymbol{x})$的正定性矛盾,因此(8.2-2)式成立。

当 $V(t, \boldsymbol{x}(t)) = \varphi_1(\eta) + (N-1)a$, $D^+ V(t, \boldsymbol{x}(t))$负定

故对 $t \geqslant \max(t_1, t_0 + \varphi_2(\delta)/r)$ 有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \varphi_1(\eta) + (N-1)a$$

今设 $T_j = j\varphi_2(\delta)/r (j = 1, 2, \cdots N)$, $T_0 \overset{\text{def}}{=} 0$, 且设对某整数 $k \geqslant 1$ 在区间 $T_{k-1} \leqslant t - t_0 \leqslant T_k$ 上有

$$\varphi_1(\eta) + (N-1)a \leqslant V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \varphi_1(\eta) + (N-k+1)a$$

同理有

$$D^+ V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant -r \qquad T_{k-1} \leqslant t - t_0 \leqslant T_k$$

以及当 $t - t_0 - T_{k-1} \geqslant \varphi_2(\delta)/r$ 时有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(t_0 + T_{k-1}, \boldsymbol{x}(t_0 + T_{k-1})) - r(t - t_0 - T_{k-1})$$
$$\leqslant \varphi_2(\delta) - r(t - t_0 - T_{k-1}) \leqslant 0$$

因此有

$$V(t_0 + T_k, \boldsymbol{x}(t_0 + T_k)) \leqslant \varphi_1(\eta) + (N-k)a$$

最后得到当 $t \geqslant t_0 + T_k$ 时有

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \varphi_1(\eta) + (n-k)a$$

用归纳法证明了

$$V(t,x(t)) \leqslant \varphi_1(\eta) \qquad \forall t \geqslant N(\varphi(\delta))/r$$

即 $\qquad \|x(t)\| \leqslant \eta \qquad$ 当 $t \geqslant N(\varphi(\delta))/r$

故(8.1-1)式的零解一致渐近稳定。

§3 滞后型系统的有界性与耗散性[168、169]

本节介绍滞后型泛函微分方程(8.1-1)解的一致有界性与一致耗散性的新近结果[168、169]。

定义 8.3.1 称系统(8.1-1)式的解是一致有界的,若 $\forall B_1>0$,存在 $B_2>0$,使得$[t_0\geqslant 0,\xi\in C[[-\tau,0],R],\|\xi\|\leqslant B_1,t\geqslant t_0]$蕴涵着 $\|x(t,t_0,\xi)\|<B_2$,称系统(8.1-1)式的解对界 B 是一致耗散的,若对每个 $B_3>0$,存在 $T>0$ 使得$[t_0\geqslant 0,\|\xi\|\leqslant B_3,t\geqslant t_0+T]$蕴涵 $\|x(t,t_0,\xi)\|<B$。

定义 8.3.2 称一个可测函数 $\gamma\in[R_+,R_+]$,关于参数 $\alpha>0$ 是积分为正的(简记为 $\gamma(t)\in IP(\alpha)$),若任给区间 $I=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}[\alpha_m,\beta_m]$,有

$$\int_I \gamma(s)\mathrm{d}s = \infty$$

其中 $\qquad \alpha_m<\beta_m<\alpha_{m+1} \quad \beta_m-\alpha_m\geqslant\alpha \qquad m=1,2,3\cdots$

定义 8.3.3 称一个可测函数 $\gamma\in[R_+,R_+]$关于参数 $\alpha>0,\beta>0,\Gamma>0$(简记为 $\gamma\in PIP(\alpha,\beta,\Gamma)$),是部分积分为正的,若存在一个序列$\{t_n\}_1^{\infty}$,使得 $\alpha\leqslant t_{n+1}-t_n\leqslant\beta$,蕴涵$\int_{t_n}^{t_n+\alpha}\eta(s)\mathrm{d}s\geqslant\Gamma$。

定义 8.3.4 称一个泛函 $D\in[R_+\times C,R_+]$沿(8.1-1)式的解是连续的,若 $D(t,x_t)$对每一个定义在$[t_0,+\infty]$上的解 $x(t,t_0,\xi)$是在$[t_0,+\infty]$上连续的。

记 $m(\xi)=\min\limits_{-h\leqslant s\leqslant 0}|\xi(s)|$对每个 $\xi\in C$。

定理 8.3.1 设 D、$V\in[R_+\times C, R_+]$。V 连续，D 沿(8.1-1)式的解连续。设 $\gamma\in PIP(\alpha,\beta,\Gamma)$，且记 $C=\max[\beta,h]$，假设 $W_1(r)\to\infty$，当 $r\to\infty$，且

1) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_2(|x(t)|)$
$+\int_{t-h}^{t}D(u,x_u)\mathrm{d}u$

2) $D(t,\xi)\leqslant W_3(\|\xi\|)$

3) $D^+(t,x_t)\leqslant-\gamma(t)W_4(m(x_t))-W_5(D(t,x_t))+M$

4) 存在 $J_0>0$ 和 $U>0$ 使得

$$W_4\left(\frac{1}{2}W_2^{-1}(U)\right)\Gamma>11MC \quad \text{且对每个 } J\geqslant J_0$$

$$\frac{h}{(W_3(W_1^{-1}(J+11MC)))}\int_0^{\frac{1}{2n}W_2^{-1}(J)}W_5(s)\mathrm{d}s>11MC$$

则(8.1-1)式的解一致有界，且一致耗散。

证：因为 $\gamma\in PIP(\alpha,\beta,\Gamma)$，所以存在序列 $\{t_n\}_1^{\infty}$，$\alpha\leqslant t_{n+1}-t_n\leqslant\beta$，使得

$$\int_{t_n}^{t_n+\alpha}\gamma(u)\mathrm{d}u\geqslant\Gamma$$

条件1)、2)表明存在一个 K 类函数 W_6 使得

$$V(t,\xi)\leqslant W_6(\|\xi\|)$$

设 $x(t)=x(t,t_0,\xi)$ 是(8.1-1)式的解，对 $t_0\geqslant0$，找到 $\{t_n\}$ 的子序列 $\{s_n\}$，使得 $s_1\geqslant t_0$ 和 $4C\leqslant s_{n+1}-s_n\leqslant5C$，可使

$$s_1-t_0\leqslant\max[t_1,\beta]\overset{\text{def}}{=}T_1$$

首先要证对每个 $\Omega\geqslant\max[J_0+MC,U+MC]$，若存在某个 $t^*\geqslant\max[t_0,t_1]$。使得 $V(t^*,x_{t^*})\leqslant\Omega$，则对每个 $s_n\geqslant t^*$，存在 $q_n\in[s_n,s_{n+1}]$，使得

$$V(q_n,x_{q_n})\leqslant\Omega-MC \tag{8.3-1}$$

不妨设 $s_n\geqslant t^*$，$n=1,2,\cdots$，显然 $s_1-t^*\leqslant5C$，因为 $t^*\geqslant t_1$ 用数学归纳法证(8.3-1)成立。

$n=1$，若(8.3-1)不真，则

$$V(t,x_t)\geqslant \Omega - MC \qquad \text{在}[s_1,s_2]\text{上成立。} \tag{8.3-2}$$

由条件 1)和 3)对 $t\in[s_1,s_2]$

$$W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(t^*,x_{t^*})+10MC$$
$$\leqslant \Omega + 10MC$$

故 $\|x_t\|\leqslant W_1^{-1}(\Omega+10MC)$ 对 $t\in[s_2-3C,s_2]$ 且

$$D(t,x_t)\leqslant W_3(W_1^{-1}(\Omega+10MC)) \qquad t\in[s_2-3C,s_2], \tag{8.3-3}$$

现(8.3-2)和条件 1)蕴涵着对 $t\in[s_2,s_2]$有

$$W_2(|x(t)|)+\int_{t-h}^{t}D(u,x_u)\mathrm{d}u\geqslant V(t,x_t)\geqslant \Omega - MC$$

这就蕴涵着存在 $\bar{t}\in[s_2-2C,C_2]$使得

$$\int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}}D(u,x_u)\mathrm{d}u\geqslant \frac{1}{2}W_2^{-1}(\Omega - MC)$$

或$|x(t)|\geqslant\frac{1}{2}W_2^{-1}(\Omega-MC)$，对每个 $t\in[s_2-3C,s_2]$成立。

情况 1 $\int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}}D(u,x_u)\mathrm{d}u\geqslant \frac{1}{2}W_2^{-1}(\Omega - MC)$

现定义 $W_7(r)=\dfrac{1}{W_3(W_1^{-1}(\Omega+10MC))}\displaystyle\int_0^r W_s(s)\mathrm{d}s$

则 W_7 是下凸的，且 $W_7(r)\leqslant W_5(r)$。若 $0\leqslant r\leqslant W_3(W_1^{-1}(\Omega+10MC))$，对条件 3)进行积分有

$$\begin{aligned}
\Omega - MC &\leqslant V(s_2,x_{s_2})\leqslant V(t^*,x_{t^*})-\int_{t^*}^{s_2}W_5(D(u,x_u)\mathrm{d}u+10MC\\
&\leqslant \Omega - \int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}}W_7(D(u,x_u))\mathrm{d}u+10MC\\
&\leqslant \Omega - hW_7\left(\frac{1}{h}\int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}}D(u,x_u)\mathrm{d}u\right)+10MC
\end{aligned}$$

（由 Jensen 不等式）

$$\begin{aligned}
&\leqslant \Omega - hW_7\left(\frac{1}{2h}W_2^{-1}(\Omega - MC)\right)+10MC\\
&\leqslant \Omega - \frac{h}{W_3(W_1^{-1}(\Omega+10MC))}\int_0^{(1/2h)W_2^{-1}(\Omega-MC)}W_5(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$+ 10MC < \Omega - MC \qquad 矛盾。\tag{8.3-4}$$

情况 2　$|x(t)| \geqslant \frac{1}{2} W_2^{-1}(\Omega - MC)$ 对每个 $t \in [s_2 - 2C, s_2]$。

因为 $[s_2 - 2C, s_2]$ 的长度是 $2C \geqslant 2\beta$，故在 $[s_2 - 2C, s_2]$ 内存在 $\{t_n\}$ 的其它元素 V_1, V_2，且 $V_1 < V_2 < S_2$，S_2 也是 $\{t_n\}$ 的一个元素。因此，$\alpha \leqslant S_2 - V_2 \leqslant \beta$，且

$$V_2 - (S_2 - 2C) = 2C - (S_2 - V_2) \geqslant 2C - \beta \geqslant C \geqslant h$$

再对条件 3）再积分便有

$$\begin{aligned}
\Omega - MC &\leqslant V(s_2, x_{s_2}) \\
&\leqslant V(t^*, x_{t^*}) - \int_{t^*}^{s_2} \gamma(u) W_4(m(x_u)) \mathrm{d}u + 10MC \\
&\leqslant \Omega - \int_{V_2}^{V_2+\alpha} \gamma(u) W_4 m(x_u) \mathrm{d}u + 10MC \\
&\leqslant \Omega - W_4\left(\frac{1}{2} W_2^{-1}(\Omega - MC)\right)\Gamma + 10MC \\
&< \Omega - MC \qquad 矛盾。
\end{aligned}\tag{8.3-5}$$

故存在 $q_1 \in [s_1, s_2]$ 使得　　$V(q_1, x_{q_1}) \leqslant \Omega - MC$

设 $n = k$，存在 $q_k \in [s_k, s_{k+1}]$，有　　$V(q_k, x_{q_k}) \leqslant \Omega - MC$

当 $n = k + 1$，可用类似于 $n = 1$ 的方法，证明存在 $q_{k+1} \in [q_{k+1}, s_{k+2}]$，使得 $V(q_{k+1}, x_{q+1}) \leqslant \Omega - MC$，略其细节。

故对一切 $s_n \geqslant t^*$ (8.3-1)式成立。

现证(8.1-1)式的解一致有界即要指出，对每个 $B_1 > 0$，存在 $B_2 > 0$，使得 $t_0 \geqslant 0, \varphi \in C, \|\varphi\| < B_1$ 和 $t \geqslant t_0$ 蕴涵 $\|x(t, t_0, \varphi)\| < B_2$。

取 $t^* = s_1$，为不失一般性，设 B_1 满足

$$W_6(B_1) + T_1 M \geqslant \max\{J_0 + MC, U + MC\}$$

设 $t \in [t_0, s_1]$ 对条件 3）进行积分有

$$V(t, x_t) \leqslant V(t_0, x_{t_0}) + T_1 M \leqslant W_6(B_1) + T_1 M \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$$

这样,由(8.3-1)式知对于 $m=1,2,3\cdots$,存在 $q_n\in[s_n,s_{n+1}]$,使得

$$V(q_n,\boldsymbol{x}_{q_n})\leqslant\Omega-MC$$

现在对每个 $t\geqslant t_0$, $V(t,\boldsymbol{x}_t)\leqslant\Omega$, 若 $t\in[t_0,s_1]$ 或若 $t\in[s_n,s_{n+1}]$ $n=1,2,3\cdots$ 则

$$W_1(|\boldsymbol{x}(t)|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}_t)\leqslant V(q_n,\boldsymbol{x}_{q_n})$$
$$+5MC\leqslant\Omega+4MC\qquad t\geqslant t_0$$

取 $B_2\overset{\text{def}}{=}W_1^{-1}(\Omega+4MC)$,这就证明了一致有界性。

对于一致耗散性,存在一个 $B>0$ 和每个 $B_3>0$,存在 $T>0$,使得 $t_0\geqslant0$, $\|\xi\|<B_3,t\geqslant t_0+T$,蕴涵

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\xi)\|<B$$

为不失一般性,可设 B_3 满足

$$W_6(B_3)+T_1M\geqslant\max\{J_0+MC,U+MC\}$$

显然 $V(s_1,\boldsymbol{x}_{s_1})\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_{t_0})+T_1M\leqslant W_6(B_3)+T_1M$

取 $\Omega\overset{\text{def}}{=}W_6(B_3)+T_1M,t^*=s_1$ 则由(8.3-1)式对每个 $n=1,2,\cdots$,存在一个 $q_n\in[s_n,s_{n+1}]$,使得 $V(q_n,\boldsymbol{x}_{q_n})\leqslant\Omega-MC$

若 $\Omega-MC\geqslant\max[J_0+MC,V+MC]$,则取 $\bar{\Omega}=\Omega-MC$ 和 $t^*=q_1$。再用(8.3-1)式则对每个 $s_n\geqslant q_1$,存在 $\tilde{q}_n\in[s_n,s_{n+1}]$,使得

$$V(\bar{q}_n,\bar{x}_{q_n})\leqslant\bar{\Omega}-MC\leqslant\Omega-2MC$$

继续这程序 N 次直到

$$\Omega-NMC\leqslant\max\{J_0+MC,U+MC\}$$

显然,取

$$N\overset{\text{def}}{=}\left[\frac{\Omega-\max\{J_0+MC,U+MC\}}{MC}\right]+1$$

这里$[\boldsymbol{x}]$是小于 $\boldsymbol{x}$ 的最大整数。

令 $T=5NC+T_1$,则对于 $s_n\geqslant T+t_0$ 存在一个 $p_n\in[s_n,s_{n+1}]$

使得 $V(p_n, x_{p_n}) \leqslant \Omega - NMC \leqslant \max[J_0 + MC, U + MC]$

现对每 $t \geqslant t_0 + T$, t 必属于某个区间$[s_n, s_{n+1}]$,故

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(p_n, x_{p_n}) + 5MC$$
$$\leqslant \max[J_0 + MC, U + MC] + 5MC$$

取 $B = W_1^{-1}\{\max(J_0 + MC, U + MC)\} + 5MC$

故(8.1-1)式是一致耗散的。

定理8.3.2 若定理 8.3.1 的条件 1)、3)恒成立,2)、4)分别代之以

2)′ $V(t, \varphi) \leqslant W_6(\|\varphi\|)$;

4)′ $W_4(\frac{1}{2}W_2^{-1}(V))\Gamma > 11MC$ 对某些 $V > 0$,且 W_2 是下凸的。

则(8.1-1)式的零解一致有界,且一致耗散。

证:类似于定理 8.3.1 的证明,只须作出定理 8.3.2 的情况 1 的证明。

首先,取 $J_0 > 0$,使得 $hW_5((1/2h)W_2^{-1}(J_0)) > 11MC$,这是可能的,因为当 $r \to \infty$, $W_2(r) \to \infty$,且 W_5 是下凸的,蕴涵 当 $r \to \infty$, $W_5(r) \to \infty$。

若存在 $\bar{t} \in [s_2 - 2C, s_2]$,使得 $\int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}} D(u, x_u)\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{2}W_2^{-1}(\Omega - MC)$ 对条件 3)进行积分,有

$$\Omega - MC \leqslant V(s_2, x_{s_2}) \leqslant V(t^*, x_{t^*})$$
$$- \int_{t^*}^{s_2} W_5(D(u, x_u))\mathrm{d}u + 10MC$$
$$\leqslant \Omega - \int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}} W_5(D(u, x_u))\mathrm{d}u + 10MC$$
$$\leqslant \Omega - hW_5(\frac{1}{h}\int_{\bar{t}-h}^{\bar{t}} D(u, x_u)\mathrm{d}u) + 10MC$$

(由 Jensen 不等式)

$$\leqslant \Omega - hW_5(\frac{1}{2h}W_2^{-1}(\Omega - MC)) + 10MC$$

$$< \Omega - MC \qquad 矛盾 \tag{8.3-6}$$

因此,情况 1 得证,剩下的证明如同定理 8.3.1,略。

例 考虑非线性纯量泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -a(t)W(x(t)) + b(t)W(x(t-h)) + f(t, x_t) \tag{8.3-7}$$

这里 $a \in C[R_+, R_+], b \in C[R_+, R], W \in C[R, R]$

$$f(t, \varphi) \in C[R_+ \times C, R]$$

设存在 $k > \xi > 1, \alpha > 0, \beta > 0, \Gamma > 0, B > 0, P \geqslant 1, V > 0, M > 0$,使下列条件满足

1) $a(t) - k|b(t+h)| \overset{\text{def}}{=} \gamma(t) \geqslant 0$,且 $\gamma \in PIP(\alpha, \beta, \Gamma)$;

2) 对每个 $t \geqslant 0$, $\int_t^{t+h} |b(s)|^p \mathrm{d}s \leqslant B$;

3) 对每个$(t, \varphi) \in R_+ \times C, |f(t, \varphi)| \leqslant M$;

4) W 是偶增函数,且 $W((1/2)V)\Gamma > 11M\max\{h, \beta\}$,则(8.3-7)式的解是一致有界的,一致耗散的。

证:当 W 限定在R_+便是一个 K 类函数,对于常数 $k > \xi > 1$,取 $\delta > 0$,具有 $k = \xi + \delta$。则

$$-a(t) + \xi|b(t+h)| = -\gamma(t) - \delta|b(t+h)|$$

定义 $D(t, \varphi) = |b(t+h)|W(|\varphi(0)|)$ 且

$$V(t, x_t) = |x(t)| + \xi\int_{t-h}^{t} |b(s+h)|W(|x(s)|)\mathrm{d}s$$

若 $P = 1$, 则 $V(t, x_t) \leqslant |x_t| + \xi BW(|x_t|)$

若 $P > 1$, 则由 Hölder 不等式

$$V(t, x_t) \leqslant |x_t| + \xi\left[\int_{t-h}^{t} |b(s+h)^p \mathrm{d}s\right]^{1/p}\left[\int_{t-h}^{t} W \cdot (|x(s)|)^q \mathrm{d}s\right]^{1/q} \leqslant \|x_t\| + \xi B^{1/p}h^{1/q}W(\|x_t\|)$$

取 $\overline{W}(r) = \max\{r, \xi BW(r), \xi B^{1/p}h^{1/q}W(r)\}$则

$$V(t, x_t) \leqslant \overline{W}(\|x_t\|)$$

还有

$$D^+ V(t, x_t) \leqslant -a(t)W(|x(t)|) + |b(t)|W(|x(t-h)|)$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot |f(t,\boldsymbol{x}_t)| + \xi |b(t+h)| W(|\boldsymbol{x}(t)|) \\
&- \xi |b(t+h)| W(|\boldsymbol{x}(t-h)| \\
=& (-a(t) + \xi |b(t+h)|) W(|\boldsymbol{x}(t)|) \\
&+ (1-\xi) |b(t)| W(|\boldsymbol{x}(t-h)|) + M \\
=& -\gamma W(\|\boldsymbol{x}(t)\|) - \delta D(t,\boldsymbol{x}_t) + M
\end{aligned}
$$

取 $W_1(r) = r,\ W_2(r) = \xi r,\ W_3(r) = \overline{W}(r)$

$$W_4(r) = W(r),\ W_5(r) = r$$

则定理 8.3.2 的所有条件满足，因此(8.3-7)式的解是一致有界的，一致耗散的。

§4 中立型系统 Ляпунов 泛函法[165~167]

考虑下列算子型中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D(t,\boldsymbol{x}_t) = f(t,\boldsymbol{x}_t) \tag{8.4-1}$$

其中 D、$f \in C[R_+ \times C, R^n]$，$D$ 是定义在 $R_+ \times C$ 上的差分算子。假设(8.4-1)式的解整体存在唯一性条件成立，且 $f(t,0) = D(t,0) \equiv 0$。

定义 8.4.1 称算子 $D(t,x_t)$ 一致稳定的若存在常数 a、$b > 0$，使得 $\forall h \in C[R_+, R^n]$，非齐次差分方程

$$D(t,\boldsymbol{y}_t) = h(t) \qquad t \geqslant t_0 \tag{8.4-2}$$

的解 $\boldsymbol{y}(t)$ 满足

$$\|\boldsymbol{y}_t\| \leqslant b\mathrm{e}^{-a(t-\delta)} |\boldsymbol{y}_{t_0}\| + b \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \|h(s)\| \qquad t \geqslant t_0 \tag{8.4-3}$$

可以仿照关于滞后型系统零解的稳定性，渐近稳定性定义来定义(8.4-1)式零解的稳定性和渐近稳定性。

引理 8.4.1 设(8.4-1)式的算子 $D(t,\boldsymbol{x}_t)$ 是一致稳定的，则(8.4-1)式过 (t_0,ξ) 的解为 $\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t,t_0,\xi)$，对任意的函数 $\alpha(t) \in C[R_+, R_+]$，$a(0) = 0$，存在 $\beta(t) \in C[R_+, R_+]$，$\beta(0) =$

0。使得:

1) 当 $\|\xi\|<\delta$ 时, $\|D(t,x_t)\|\leqslant a(\delta), t\geqslant t_0$,有

$$\|x_t\| \leqslant \beta(\delta) \quad t \geqslant t_0$$

2) $\forall M\geqslant t_0$ 和 $A>0$,存在 $T=T(M,\delta,A)>0$,使当 $\|\xi\|\leqslant M$, $\|D(t,x_t)\|\leqslant a(\delta), t\geqslant t_0$,有

$$\|x_t\| \leqslant \beta(\delta)+A \quad t \geqslant t_0+T$$

证:对条件 1)由(8.4-3)式,取 $\beta(\delta)\geqslant b(\delta+a(\delta))$即得,对条件 2)中的 T 可取为

$$T>\max\{0,\frac{1}{a}\ln\frac{bm}{\beta(\delta)+A-ba(\delta)}\}$$

故当 $t\geqslant t_0+T$ 时,由(8.4-3)式有

$$\|x_t\| \leqslant b\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\|\varphi\| + b\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|D(s,x_s)\|$$

$$\leqslant b\mathrm{e}^{-aT}M+ba(\delta)\leqslant\beta(\delta)+A$$

定理8.4.1 设(8.4-1)式中的算子 D 一致稳定,$f\in C[R_+\times C$(有界集)$,R^n]$且 f 有界,若存在 $V(t,\xi)\in C[R_+\times C,R^+]$ 满足

1) $\varphi_1(\|D(t,\xi)\|)\leqslant V(t,\xi)\leqslant\varphi_2(\|\xi\|)$

2) $D^+V|_{(8.4\text{-}1)}\leqslant -W(\|D(t,\xi)\|)$

其中 φ_1、φ_2、$W\in K$。

存在连续函数 $a(s)$, $a(0)=0, a(s)>0$,当 $s>0$。使得

$\varphi_2(s)\leqslant\varphi_1(a(s))$

则(8.4-1)式的零解一致渐近稳定。

证:设 $\beta(\delta)$由引理 8.4.1 确定,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta, 0<\delta<\varepsilon$, $\beta(\delta)<\varepsilon$,当条件 1)、2)得出当 $\|\xi\|\leqslant\delta$ 时,对

$$x(t)=x(t,t_0,\xi) \quad 有$$

$$\varphi_1(\|D(t,x_t)\|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant V(t_0,\xi)$$

$$\leqslant\varphi_2(\|\xi\|)\leqslant\varphi_2(\delta)\leqslant\varphi_1(a(\delta)) \qquad t\geqslant t_0$$

从而有

$$\|D(t,x_t)\|\leqslant a(\delta) \qquad t\geqslant t_0$$

由引理8.4.1可推知

$$\| x_t \| \leqslant \beta(\delta) < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

即(8.4-1)式的零解一致稳定,下面证一致渐近稳定性。

设 $\delta_0 = \delta(1)$,对 $\forall\, \eta > 0$, 要证 $T = T(\eta) > 0$,使当 $t \geqslant t_0$, $\| \varphi \| \leqslant \delta_0$时,对(8.4-1)式的解 $x(t) = x(t, t_0, \xi)$,有

$$\text{当 } t \geqslant t_0 + T(\eta) \text{ 时}, \| x_t \| \leqslant \eta \qquad (8.4\text{-}4)$$

用反证法,若(8.4-4)式不成立,则有

$\| x_t \| \geqslant \delta, t \geqslant t_0$, 由(8.4-3)式对 $\forall\, \tau \geqslant t_0$,有

$$\delta \leqslant \| x_t \| \leqslant b e^{-a(t-\tau)} \| x_\tau \| + b \sup_{\tau \leqslant s \leqslant t} \| D(s, x_s) \| \qquad (8.4\text{-}5)$$

选取正数 $\hat{r}$,使得 $\hat{r} > \max\{0, \frac{1}{a} \ln \frac{2b}{\delta}\}$ 。

记 $\hat{t}_0 = \hat{t}_0 + \hat{r}$,由(8.4-5)式,有

$$\delta \leqslant \| x_{\hat{t}_0} \| \leqslant b e^{-a\hat{r}} \| x_{t_0} \| + b \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant \hat{t}_0} \| D(s, x_s) \|$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2} + b \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant \hat{t}_0} \| D(s, x_s) \|$$

从而有

$$b \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant \hat{t}_0} \| D(s, x_s) \| \geqslant \frac{\delta}{2}$$

故存在 $t_1 \in [t_0, \hat{t}_0]$使得 $\| D(t_1', x_{t_1'}) \| \geqslant \frac{\delta}{2b}$

同理有

$$\| D(t_k', x_{t_k'}) \| \geqslant \frac{\delta}{2b} \qquad t_k' \in [\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]$$

其中 $\hat{t}_k = t_0 + k\hat{r}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 再由 f 的有界性可知存在常数L 使

$$\text{当 } t \geqslant t_0, \| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D(t, x_t) \| < L$$

故当 $\| x_t \| \geqslant \delta$, $t \geqslant t_0$ 成立时,存在 $t_i \in [t_0 + (2\tau' - 1)\hat{r}, t_0 + 2\tau'\hat{r}]$ $(i = 1, 2, \cdots)$,使得 $\| D(t_i, x_{t_i}) \| \geqslant \frac{\delta}{4b}$

从而

$$\text{当 } t \in [t_i - \frac{\delta}{4Lb}, t_i + \frac{\delta}{4Lb}], \| D(t, x_k) \| \geqslant \frac{\delta}{4b}$$

不妨设 L 取适当大，使$\frac{\delta}{4Lb}<\frac{\hat{r}}{2}$，因而各区间$[t_i-\frac{\delta}{4Lb},t_i+\frac{\delta}{4Lb}]$互不相交，此时有

当 $t\in[t_i-\frac{\delta}{4Lb},t_i+\frac{\delta}{4Lb}]$

$$D^+V(t,\boldsymbol{x}_t)|_{(8.4\text{-}1)}\leqslant -W\left(\frac{\delta}{4b}\right)$$

从而有

$$V(t_k,\boldsymbol{x}_{t_k})\leqslant V(t_0,\varphi)-W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\frac{\delta}{4Lb}(k-1)$$

选取正整数 $k>1+V(\delta_0)/\left[\frac{\delta}{2Lb}W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\right]$，则有

$$V(t_k,\boldsymbol{x}_{t_k})\leqslant V(t_0,\varphi)-W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\frac{\delta}{2Lb}V(\delta_0)\left[\frac{\delta}{2Lb}W\left(\frac{\delta}{4b}\right)\right]\leqslant 0$$

因而推出矛盾。

这表明存在 $t^*\in[t_0,t_0+2k\hat{r}]$，使 $\|\boldsymbol{x}_{t^*}\|\leqslant\delta$，进而推出 当 $t\geqslant t_0+2k\hat{r}$，$\|\boldsymbol{x}_t\|<\eta$，即(8.4-1)式零解一致渐近稳定。

§5 中立型系统的 Ляпунов 函数法[180]

本节介绍用 Ляпунов 函数法来研究中立型泛函微分方程稳定性的结果[180]。

考虑非线性中立型方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,\boldsymbol{x}_t.\dot{x}_t) \qquad (8.5\text{-}1)$$

这里，$\boldsymbol{x}\in R^n$，　$f\in C[R_1\times C_H\times C_H^1,R^n]$，且 $f(t,0\ 0)\equiv 0$

$$\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta),\qquad \theta\in(-\infty,t_0),\ t\in[t_0,\ t_0+a]$$

$$C_H=\{\xi\in C,\quad \|\xi\|<H\}$$

$$C_H^1=\{\xi\in C_H\cap C^1\dot{\xi}\in C_H\}$$

为(8.5-1)式解的存在性，设初始函数满足

$$\dot{\xi}(0) = f(t_0, \xi(\theta), \dot{\xi}(\theta)) \qquad \theta \in [-h, 0]$$

定理8.5.1 假设下列条件满足

1) $\| f(t, x_t, \dot{x}_t) \| \leqslant K_1(\| x_t \|) + K_2(\| \dot{x}_t \|)$

这里 K_1、K_2 是非减连续函数且 $K_1(0) = K_2(0) = 0$。

2) $2 \leqslant K_1(\sigma) + K_2(\sigma)$ 蕴涵 $2 \leqslant K(\sigma)$,

$K(s) > 0$,当 $s > 0$,且 $K(\sigma)$ 是严格增的连续函数。

3) 对于 1)中的 K_1、K_2,有

$$\| f(t, x_t, \dot{x}_t) \| \leqslant K_1(\sup_{s \in [p(t), t]} | x(s) |) + K_2 \sup_{s \in [p(t), t]} | \dot{x}(s) + F(t, \| x_t \|, \| \dot{x}_t \|)$$

这里 $p(t) \in C[R_+, R]$

$F \in \subset C[R^1 \times R_+ \times R_+, R]$,使得对任何 $M > 0$,当 $t \to \infty$,

$$\sup_{\sigma < x, y < m} F(t, x, y) \to 0$$

4) 存在函数 $V \in [R_+ \times R_+, R_+]$使得

$$\varphi_1(\| x \|) \leqslant V(t, x) \leqslant \varphi_2(\| x \|)$$

这里 φ_1、$\varphi_2 \in K$。

5) 存在函数 $p(t) \in C[R^+, R]$,使得 $p(t) \leqslant t$,且 $p(t) \to \infty$,当 $t \to \infty$,且对任意的 N 和所有 $s \in [p(t), t]$,当

$$V(s, x(s)) \leqslant N \qquad | \dot{x}(s) | \leqslant K(\varphi_2^{-1}(N))$$

有 $$D^+ V(t, x) |_{(8.5\text{-}1)} \leqslant F(H, V, N)$$

且 $F(t, V, V) \leqslant - W_2(V) + g_1(t) G(B) + g_2(t) Q(V)$

$W_2(r)$是连续的正函数,当 $r > 0$ 时

$$g_1(t) \geqslant 0, \int_0^\infty g_1(s) \mathrm{d}s < \infty, \; G(V) \geqslant 0, Q(V) \geqslant 0$$

连续,$g_2(t) \geqslant 0$,且当 $t \to \infty$,$g_2(t) \to 0$。

$$| F(t, V, N_1) - F(t, V, N_2) | \leqslant [h_1(t) + h_2] | N_1 - N_2 |$$

$$h_1(t) \geqslant 0, \int_0^\infty h_1(t) \mathrm{d}t < \infty, h_2 \text{ 是非负常数。}$$

则(8.5-1)式零解的稳定性蕴涵渐近稳定性。

证：令 $\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t, t_0, \varphi)$，且设(8.5-1)式的零解稳定，则对任意给定的 $H_1>0, 0<H_2<H, t_0 \geqslant 0$，存在一个 $\delta>0$ 使得

$$\Psi \in C_\delta^1 \quad t \geqslant t_0 \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t, t_0 \boldsymbol{x}_0) \| \leqslant H_1 < H$$

从条件 2)有

$$\| \dot{x}(t, t_0, \xi) \| \leqslant \max(\delta, K(H_1))$$

令

$$\bar{\sigma} = \limsup_{t \to \infty} V(t, \boldsymbol{x}(t)) \tag{8.5-2}$$

$$\underline{\sigma} = \liminf_{t \to \infty} V(t, \boldsymbol{x}(t)) \tag{8.5-3}$$

$$q = \limsup_{t \to \infty} | \dot{x}(t) | \tag{8.5-4}$$

$\forall \mu>0, \exists \alpha \in (0, \mu)$ 使得

$$K(\varphi_1^{-1}(\bar{\sigma} + \mu)) \geqslant K(\varphi_1^{-1}(\bar{\sigma})) + \alpha$$

从 $\bar{\sigma}$ 的定义，存在 $T \geqslant t_0$，使得 $t \geqslant T$

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant \bar{\sigma} + \mu$$

$$\| \dot{x}(t) \| \leqslant q + \alpha \leqslant q + \mu$$

因此

$$\| \boldsymbol{x}(t) \| \leqslant \varphi^{-1}(\bar{\sigma} + \mu)$$

因为当 $t \to \infty, P(t) \to \infty$，存在 $T_1 \geqslant T$，使得 $p(t) \geqslant T$，$t \geqslant T_1$

故

$$\sup_{s \in [p(t), t]} | \dot{x}(s) | \leqslant q + \alpha, t \geqslant T_1$$

从(8.5-4)式推出存在 $T_n \geqslant T_1$，当 $n \to \infty, T_n \to \infty$，使得

$$\| \dot{x}(T_n) \| \geqslant q - \mu \qquad n = 1,2,3\cdots$$

由条件 3)，可得到

$$\begin{aligned} q - \mu \leqslant \| \dot{x}(T_n) \| &\leqslant K_1(\varphi^{-1}(\bar{\sigma} + \mu)) + K_2(q + \mu) \\ &+ | F(T_n, \| \boldsymbol{x}_n \|, \| \dot{x}(T_n) \|) | \end{aligned} \tag{8.5-5}$$

令 $\mu \to 0, n \to \infty$，则 $T_n \to \infty$，从(8.5-5)式得出

$$q \leqslant K_1(\varphi^{-1}(\bar{\sigma})) + K_2(q) \tag{8.5-6}$$

由条件 2)进而可推出

$$q \leqslant K\varphi^{-1}(\bar{\sigma}) \tag{8.5-7}$$

这样，对于 $t \geqslant T_1, s \geqslant p(t)$，有

$$V(s, \boldsymbol{x}(s)) \leqslant \bar{\sigma} + \mu$$

$$\| \dot{x}(s) \| \leqslant q + \alpha \leqslant K(\varphi^{-1}(\bar{\sigma})) + \alpha$$
$$\leqslant K(\varphi^{-1}(\bar{\sigma} + \mu))$$

从条件 5)有

$$D^+ V(t) \leqslant F(t, V(t)\bar{\sigma} + \mu)$$
$$\leqslant F(t, V(t), V(t)) + |F(t, V(t), \bar{\sigma} + \mu)$$
$$- F(t, V(t), V(t))|$$
$$\leqslant - W_2(V(t)) + g_1(t)G(V(t)) + g_2(t)Q(V(t))$$
$$+ |h_1(t) + h_2 \ |\bar{\sigma} + \mu - V| \tag{8.5-8}$$

首先指出 $\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$,设 $\bar{\sigma} > \underline{\sigma}$,则存在两个序列 k_n, V_n。$k_n \to \infty$, $V_n > 0$,使得

$$V(k_n) = \bar{\sigma} - \mu \qquad V(k_n + V_n) = \bar{\sigma} - \frac{\mu}{2}$$

且 $\bar{\sigma} - \mu \leqslant V(t) \leqslant \bar{\sigma} - \frac{\mu}{2} \qquad k_n \leqslant t \leqslant k_n + V_n$

选取 $0 < u \ll 1, n \gg 1$,使得

$$(\inf_{s \in [\bar{\sigma}-\mu, \bar{\sigma}-\frac{\mu}{2}]} W_2(s)) - 2h_2\mu - g_2(t)(\sup_{s \in [\bar{\sigma}-\mu, \bar{\sigma}-\frac{\mu}{2}]} Q(s)) \geqslant 0$$

对于 $t \in [k_n, k_n + V_n]$,有

$$D^+ V(t) \leqslant g_1(t)(G(V(t))) + h_1(t) \mid \bar{\sigma} + \mu - V(t) \mid$$
$$\leqslant g_1(t)M + 2\mu h_1(t) \qquad t \in [k_n, k_n + V_n]$$

这里 $\qquad G(V(t)) \leqslant M = \text{const} \qquad t \geqslant t_0$

积分上述微分不等式便有

$$V(k_n + V_n) \leqslant V(k_n) + M\int_{k_n}^{k_n + V_n} g_1(s)\mathrm{d}s$$
$$+ 2\mu\int_{k_n}^{k_n + V_n} h_1(s)\mathrm{d}s \tag{8.5-9}$$

从(8.5-9)式不难看出

$$\frac{\mu}{2} \leqslant M\int_{k_n}^{k_n + V_n} g_1(s)\mathrm{d}s + 2\mu\int_{k_n}^{k_n + V_n} h_1(s)\mathrm{d}s \tag{8.5-10}$$

因为 g_1、$h_1 \in L_1(0, \infty)$,从(8.5-10)式推出:当 $n \to \infty, k_n \to \infty, \mu \leqslant 0$。这是矛盾的,故 $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$。

现证 $\sigma = 0$,若 $\sigma \neq 0$,存在 $T_2 > T_1$ 和 $\mu > 0$,使得

$$0 < \sigma - \mu < V(t) \leqslant \sigma + \mu \qquad 对\ t > T_2$$

且

$$\left(\inf_{s\in[\sigma-\mu,\sigma+\mu]} W_2(s)\right) - \left[2h_2\mu + g_2(t)\left(\sup_{s\in[\sigma-\mu,\sigma+\mu]} Q(s)\right)\right]$$
$$\geqslant \frac{1}{2} W_2(\sigma)$$

则对于 $t \geqslant T_2$

$$\begin{aligned}
D^+ V(t) \leqslant & - W_2(V(t)) + g_1(t)G(V(t)) \\
& + g_2(t)Q(V(t)) + [h_1(t) + h_2] \mid \sigma + \mu - V(t) \mid \\
\leqslant & - W_2(t) + 2h_1\mu + g_2(t)Q(V(t)) \\
& + g_1(t)(G(V(t))) + 2h_1(t)\mu \\
\leqslant & - \frac{1}{2} W_2(\sigma) g_1(t) M + 2\mu h_1(t)
\end{aligned}$$

因此对 $t \geqslant T_3 \geqslant T_2$

$$\begin{aligned}
V(t) \leqslant V(T_3) - \frac{1}{2} W_2(\sigma)(t - T_3) + M\int_{T_3}^{t} g_1(s)\mathrm{d}s \\
+ 2\mu\int_{T_3}^{t} h_1(s)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{8.5-11}$$

因为 $g_1 \in L_1[0, \infty]$,从(8.5-1)式推出 $V(t)$是负的,当 $t \gg 1$,这不可能,故 $\sigma = 0$。即

$$\lim_{t\to\infty}\sup \| \boldsymbol{x}(t) \| = \lim_{t\to\infty}\inf \| \boldsymbol{x}(t) \| = 0$$

现在,把定理 8.5.1 的一般性结果应用到具体系统。

定理 8.5.2 考虑线性中立型系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{x}(t-\tau) + C\dot{\boldsymbol{x}}(t-\sigma) \qquad \tau、\sigma > 0 \tag{8.5-12}$$

这里 A、B、C 是 $n \times n$ 常数矩阵,假设存在一个可微函数 $V \in C[R^n, R]$满足

$$a \| \boldsymbol{x} \|^2 \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant b \| \boldsymbol{x} \|^2 \tag{8.5-13}$$

$$1 - \| C \| > 0 \qquad K = \frac{\| A \| + \| B \|}{1 - \| C \|} \tag{8.5-14}$$

$$\mid \nabla V(\boldsymbol{x}) \mid = \left| \frac{\partial V^T}{\partial \boldsymbol{x}} \right| \leqslant \lambda \mid \boldsymbol{x} \mid \quad \lambda > 0 \tag{8.5-15}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T A\boldsymbol{x} \leqslant -l\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \qquad l > 0 \tag{8.5-16}$$

若
$$\frac{\lambda}{a}(\|B\| + \|C\|K) < \frac{l}{b} \tag{8.5-17}$$

则(8.5-12)式的零解是对所有时滞 τ,σ 是指数稳定的。

证:从(8.4-12)式,有

$$\begin{aligned}|\dot{x}(t)| &= |A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{x}(t-\tau) + C\dot{x}(t-\sigma)| \\ &\leqslant \|A\| \, |\boldsymbol{x}(t)| + \|B\| \, |\boldsymbol{x}(t-\tau)| \\ &\quad + \|C\| \, |\dot{x}(t-\sigma)| \end{aligned} \tag{8.5-18}$$

令 $m(t) = \sup\limits_{s\leqslant t} |\boldsymbol{x}(s)| \qquad \eta(t) = \sup\limits_{s\leqslant t} |\dot{x}(s)|$

$$\eta(t) \leqslant Km(t)$$

现在
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{x}(t) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T A\boldsymbol{x}(t) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T B\boldsymbol{x}(t-\tau) + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T C\dot{x}(t-\tau) \\ &\leqslant -lx^T\boldsymbol{x} + \left|\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right| [\|B\| \, |\boldsymbol{x}(t-\tau)| + \|C\| \, |\dot{x}(t-\tau)|] \\ &\leqslant \frac{-l}{b}V(\boldsymbol{x}) + \lambda\|B\| \sup_{s\leqslant t}|\boldsymbol{x}(s)|^2 \\ &\quad + \lambda\|C\|\left(\sup_{s\in[t-\sigma+\tau,t]}|\boldsymbol{x}(s)|\right)\left(\sup_{s\in[t-(\sigma+\tau),t]}|\dot{x}(s)|\right) \\ &\leqslant \frac{-l}{b}V(\boldsymbol{x}) + \lambda\|B\|\frac{1}{a}\sup_{s\in[t-(\sigma+r),t]}V(\boldsymbol{x}(s)) + \\ &\quad \lambda\|c\|\frac{k}{\alpha}\left(\sup_{s\in[t-(\sigma+\tau),t]}V(x(s))\right) \\ &\leqslant -\frac{l}{b}V(\boldsymbol{x}) + \frac{\lambda}{a}(\|B\| + \|C\|K)\hat{V}(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned} \tag{8.5-19}$$

这里 $\hat{V} = \sup\limits_{s\in[t-(\sigma+\tau),t]} V(\boldsymbol{x}(s))$

利用 Halanay 不等式,从(8.5-19)式可推知结论成立。

例　设 A、B_1、B_2 是 $n\times n$ 常矩阵,设 $C_1(t)$、$C_2(t)$是定义在$[0,+\infty]$上的 $n\times n$ 连续函数矩阵

$$\int_0^\infty \|C_i(t)\| \mathrm{d}t < \infty \qquad i = 1,2$$

设 p_1、p_2、p 是连续的,使得

$$p(t) \leqslant p_1(t) \leqslant t \qquad p(t) \leqslant p_2(t) \leqslant t$$

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$$

设 A 稳定,故 Ляпунов 矩阵方程

$$A^T B + BA = - I$$

有对称正定矩阵解 B,使得

$$A^T B + BA = - I$$

$$\lambda_{\min} \| \boldsymbol{x} \|^2 \leqslant \boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} \leqslant \lambda_{\max} \| \boldsymbol{x} \|^2$$

这里 $\lambda_{\min}$、$\lambda_{\max}$分别是 B 的最小最大特征值,均为正数。若

1) 当 $t\to\infty, t - p(t)\to\infty, p(t)\to\infty$

2) $\| B_2 \| + \int_0^\infty \| C_2 \| \mathrm{d}t < 1$

3)
$$\| B \| \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)\left[\| B_1 \| + k \| B_2 \| + \int_0^\infty \| C_1(t) \| \mathrm{d}t\right) + k\int_0^\infty \| C_2(t) \| \mathrm{d}t \Big] < \frac{1}{2} \tag{8.5-20}$$

这里
$$k = \frac{\| A \| + \| B_1 \| + \int_0^\infty \| C_1(t) \| \mathrm{d}t}{1 - \left[\| B_2 \| + \int_0^\infty \| C_2(t) \| \mathrm{d}t\right]} \tag{8.5-21}$$

则下列系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{x}(p_1(t)) + B_2\dot{x}(p_2(t)) + \int_{-\infty}^t C_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^t C_2(t-s)\dot{x}(s)\mathrm{d}s \tag{8.5-22}$$

的零解是渐近稳定的。

选取 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x}$ 则

$$\varphi_1(\| \boldsymbol{x} \|) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\min} \| \boldsymbol{x} \|^2 \leqslant V(\boldsymbol{x}) \leqslant \lambda_{\max} \| \boldsymbol{x} \|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2(\| \boldsymbol{x} \|) \tag{8.5-23}$$

从(8.5-22)可进而推知

$$| A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{x}(p_1(t)) + B_2\dot{x}(p_2(t)) + \int_{-\infty}^t C_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^t C_2(t-s)\dot{x}(s)\mathrm{d}s |$$

$$\leqslant \|A\| + \|B_1\| + \left(\int_0^{\infty} \|C_1(s)\| \mathrm{d}s\right) \sup_{s\in[p(t),t]} |\boldsymbol{x}(s)|$$

$$+ (\|B_2\| + \int_0^{\infty} \|C_2(s)\| \mathrm{d}s) \sup_{s\in[p(t),t]} |\dot{x}(s)|$$

$$+ \int_{t-p(t)}^{\infty} (\|C_1(s)\mathrm{d}s) \|\boldsymbol{x}_t\| + (\int_{t-p(t)}^{\infty} \|C_2(s)\mathrm{d}s) \|\dot{x}_t\| \quad (8.5\text{-}24)$$

直接计算便有

$$D^+ V(\boldsymbol{x}) \leqslant -\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^T(t)B[B_1\boldsymbol{x}(p(t)) + B_2\dot{x}(p_2(t))$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} C_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} C_2(t-s)\dot{x}(s)\mathrm{d}s] \quad (8.5\text{-}25)$$

若 $V(\boldsymbol{x}(s)) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t))$，有

$$|\dot{x}(t)| \leqslant \left(\frac{\|A\| + \|B_1\| + \int_0^{\infty} \|C_1(t)\| \mathrm{d}t}{1 - \|B_2\| + \int_0^{\infty} \|C_2(t)\| \mathrm{d}t}\right) |\boldsymbol{x}(t)|$$

$$\leqslant k\sqrt{\left(\frac{V(\boldsymbol{x})}{\lambda_{\min}}\right)} \leqslant k\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\right) |x(t)| \quad (8.5\text{-}26)$$

因此，当 $s \leqslant t$ 有

$$|\boldsymbol{x}(s)| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)} |\boldsymbol{x}(t)|$$

利用这些，能推出

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant -|\boldsymbol{x}|^2 \Big[1 - 2\sqrt{\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right)} \|B\| (\|B_1\| + k\|B_2\|$$

$$+ \int_0^{\infty} \|C_1(u)\| \mathrm{d}u + k\int_0^{\infty} \|C_2(u)\| \mathrm{d}u)\Big]$$

$$\leqslant 0 \quad (8.5\text{-}27)$$

故(8.5-22)式的零解是稳定的，现进而证明渐近稳定性。

对于 $p(t) \leqslant s \leqslant t$ 和 $V(\boldsymbol{x}(s)) \leqslant N(t)$

$$|\dot{x}(s)| \leqslant K\sqrt{\left(\frac{N(t)}{\lambda_{\min}}\right)} \qquad p(t) \leqslant s \leqslant t$$

$$|\boldsymbol{x}(s)| \leqslant \sqrt{\left(\frac{N(t)}{\lambda_{\min}}\right)} \qquad p(t) \leqslant s \leqslant t$$

这里

$$F(t,V,N) = -\left(\frac{V}{\lambda_{\min}}\right) + 2\left(\frac{\| B \| N}{\lambda_{\min}}\right)\Big[\| B_1 \| + K \| B_2 \| + \int_0^{\infty} \| C_1(t) \| \mathrm{d}t + K\int_0^{\infty} \| C_2 \| \mathrm{d}t\Big] + 2g_2(t)M \| B \| \tag{8.5-28}$$

$|x(t)|^2 \leqslant M \qquad |\dot{x}(t)| \leqslant M \qquad$ 且

$$g_2(t) = \int_{t-p(t)}^{\infty} (\| C_1(u) \| + \| C_2(u) \|)\mathrm{d}u \to 0 \quad 当\ t \to \infty$$

$$F(t,V,N) = -\Big[\frac{1}{\lambda_{\max}} - \left(\frac{2\| B \|}{\lambda_{\min}}\right)\Big(\| B_1 \| + K \| B_2 \| + \int_0^{\infty} \| C_1(t) \| \mathrm{d}t + K\int_0^{\infty} \| C_2(t) \| \mathrm{d}t\Big)\Big]V + 2g_2(t)M \| B \| \tag{8.5-29}$$

$$|F(t,V,N_1) - F(t,V,N_2)| \leqslant \left(\frac{2\| B \|}{\lambda_{\min}}\right)\Big[\| B_1 \| + K \| B_2 \| + \int_0^{\infty} \{\| C_1(t) \| + k \| C_2(t) \|\}\mathrm{d}t\Big] | N_1 - N_2 |$$

故定理 8.5.1 的所有条件满足,从而(8.5-22)式的零解渐近稳定。

§6 中立型系统指数稳定性[196]

考虑一类中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}[x(t) - G(x_t)]}{\mathrm{d}t} = f(t, x_t) \tag{8.6-1}$$

这里

$$G(x_t) \in C^1[C[-\tau, 0], R^n]$$

$$f(t, x_t) \in C[R_+ \times C[-\tau, 0], R^n]$$

$$G(0) = f(t, 0) = 0$$

若(8.6-1)式过初始函数 $\varphi \in C[[t-\tau, 0], R^n]$的解 $x(t, \varphi(Q))$满足

$$\| \boldsymbol{x}(t,\varphi) \|^2 \leqslant M\mathrm{e}^{-\gamma t} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \varphi(\theta) \| \qquad t\geqslant 0$$

则称(8.6-1)式的零解指数稳定。

引理 8.6.1 若对于某 $k\in(0,1)$有

$$\| G(\varphi) \|^2 \leqslant k \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \varphi(\theta) \|^2 \tag{8.6-2}$$

成立,则有

$$\| \varphi(0) - G(\varphi) \|^2 \leqslant (1+\sqrt{k}) \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \varphi(\theta) \|^2 \tag{8.6-3}$$

恒成立。

证: $\| \varphi(0) - G(\varphi) \|^2 \leqslant \| \varphi(0) \|^2 + 2 \| \varphi(0) \| \, \| G(\varphi) \|$

$$+ \| G(\varphi) \|^2$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \| \varphi(0) \|^2 + (1+\varepsilon^{-1}) \| G(\varphi) \|^2$$

$$\leqslant [1+\varepsilon+k(1+\varepsilon^{-1})] \sup_{\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \varphi(\theta) \|^2 \tag{8.6-4}$$

取 $\varepsilon=\sqrt{k}$,便得到(8.6-3)式。

引理 8.6.2 若(8.6-2)式成立,令 $\rho\geqslant 0, 0<\gamma<\tau^{-1}\lg(1/k)$,设 $\boldsymbol{x}(t)$ 为(8.6-1)式的一个解,若对所有 $0\leqslant t\leqslant\rho$,

$$\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t) \|^2 \leqslant (1+\sqrt{k})^2 \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(\theta) \|^2 \tag{8.6-5}$$

成立,则对所有 $0\leqslant t\leqslant\rho$ 有

$$\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \| \leqslant \frac{(1+\sqrt{k})^2}{(1-\sqrt{k\mathrm{e}^{\gamma\tau}})^2} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(\theta) \|^2 \tag{8.6-6}$$

证:令 $k\mathrm{e}^{\gamma\tau}<\varepsilon<1 \qquad 0\leqslant t\leqslant\rho$,考虑到

$$\| \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t) \|^2 \geqslant \| \boldsymbol{x}(t) \|^2 - 2 \| \boldsymbol{x}(t) \| \, \| G(\boldsymbol{x}_t) \|$$

$$+ \| G(\boldsymbol{x}_t) \|^2 \geqslant (1-\varepsilon) \| \boldsymbol{x}(t) \|^2 - (\varepsilon^{-1}-1) \| G(\boldsymbol{x}_t) \|^2$$

故有 $\| \boldsymbol{x}(t) \|^2 \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \| \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_k) \|^2 + \frac{k}{\varepsilon} \| \boldsymbol{x}(t+\theta) \|^2$

由条件(8.6-5)有

$$\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \|^2 \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t) \|^2]$$

$$+ \frac{k}{\varepsilon} \sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(t+\theta) \|^2]$$

$$\leqslant \frac{(1+\sqrt{k})^2}{1-\varepsilon} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(\theta) \|^2 + \frac{k\mathrm{e}^{\gamma\tau}}{\varepsilon} \sup_{-\tau\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \|^2]$$

故此不等式对所有的 $-\tau\leqslant t\leqslant 0$ 都成立。
因此

$$\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \|^2] \leqslant \frac{(1+\sqrt{k})^2}{1-\varepsilon} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(\theta) \|^2 + \frac{k\mathrm{e}^{\gamma\tau}}{\varepsilon} \sup_{-\tau\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \|^2]$$

因为 $1>k\mathrm{e}^{\gamma\tau}/\varepsilon$，有

$$\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant\rho} [\mathrm{e}^{\gamma t} \| \boldsymbol{x}(t) \|^2] \leqslant \frac{\varepsilon(1+\sqrt{k})^2}{(1-\varepsilon)(\varepsilon-k\mathrm{e}^{\gamma\tau})} \cdot \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \boldsymbol{x}(\theta) \|^2 \tag{8.6-7}$$

取 $\varepsilon=\sqrt{k\mathrm{e}^{\gamma\tau}}$，便得到(8.6-6)式。

定理 8.6.1 若存在 $k\in(0,1)$使得

$$\| G(\varphi) \|^2 \leqslant k \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} |\varphi(\theta)|^2 \tag{8.6-8}$$

设 $q>(1-\sqrt{k})^{-2}$

进而假设存在常数 $\lambda>0$,使得

$$\alpha(\varphi(0)-G(\varphi))f(t,\varphi)\leqslant -\lambda \| \varphi(0)-G(\varphi) \|^2 \qquad t\geqslant 0 \tag{8.6-9}$$

当 $\| \varphi(\theta) \|^2 < q \| \varphi(0)-G(\varphi) \|^2 \qquad -\tau\leqslant\theta\leqslant 0$ (8.6-10)

则对所有的解有估计式

$$\| \boldsymbol{x}(t,\varphi) \|^2 \leqslant q(1+\sqrt{k})^2 \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}t} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \xi(\theta) \|^2 \qquad t\geqslant 0 \tag{8.6-11}$$

这里 $\bar{\gamma}=\min\{\lambda \dfrac{1}{\tau}\lg[\dfrac{q}{(1+\sqrt{qk})^2}]\}>0$ (8.6-12)

换言之,(8.6-1)式的零解是指数稳定的。

证:因为 $q>(1-\sqrt{k})^{-2}$,故 $q/(1+\sqrt{qk})^{-2}>1$，因此 $\bar{\gamma}>0$，为不失一般性,设 $\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \| \varphi(\theta) \|^2>0$，设 $\gamma\in(0,\tilde{\gamma})$任意。

易于指出

$$0 < \gamma < \min\left\{\lambda \frac{1}{\tau}\lg(\frac{1}{k})\right\} \qquad q > \frac{e^{\gamma\tau}}{(1-\sqrt{ke^{\gamma\tau}})^2} \tag{8.6-13}$$

现在要证，对所有 $t \geqslant 0$

$$e^{\gamma t}\|x(t)-G(x_t)\|^2 \leqslant (1+\sqrt{k})^2 \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\xi(\theta)\|^2 \tag{8.6-14}$$

为此，由引理 8.6.2 有，对所有的 $t \geqslant 0$

$$e^{\gamma t}\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{(1+\sqrt{k})^2}{(1+\sqrt{ke^{\gamma\tau}})^2} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\xi(\theta)\|^2$$

$$\leqslant q(1+\sqrt{k})^2 \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|x(\theta)\|^2$$

这里已用到(8.6-13)式通过 $\gamma \to \bar{\gamma}$ 来推导定理结论，余下用反证法来证(8.6-14)式成立。

若不然，设(8.6-14)式不成立，则由引理 8.6.1 知存在一个常数 $\rho \geqslant 0$，使得

$$e^{\gamma t}\|x(t)-G(x_t)\|^2 \leqslant e^{\gamma\rho}\|x(\rho)-G(x_\rho)\|^2$$

$$= (1+\sqrt{k})^2 \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\xi(\theta)\|^2 \tag{8.6-15}$$

对所有的 $0 \leqslant t \leqslant \rho$ 成立。

因此存在一个序列 $\{t_k\}_{k\geqslant 1}$ 使得 $t_k \downarrow \rho$，且

$$e^{\gamma t_k}\|x(t_k)-G(x_{t_k})\|^2 > e^{\gamma\rho}\|x(\rho)-G(x_\rho)\|^2 \tag{8.6-16}$$

利用引理 8.6.2，从(8.6-15)式推出

$$e^{\gamma t}\|x(t)\|^2 \leqslant \frac{(1+\sqrt{k})^2}{(1-\sqrt{ke^{\gamma\tau}})^2} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|x(\theta)\|^2$$

$$= \frac{e^{\gamma\rho}}{(1-\sqrt{ke^{\gamma\tau}})^2}\|x(\rho)-G(x_\rho)\|^2$$

对所有 $-\tau \leqslant t \leqslant \rho$ 成立，特别地

$$\|x(t+\rho)\|^2 \leqslant \frac{e^{\gamma\tau}}{(1-\sqrt{ke^{\gamma\tau}})^2}\|x(\rho)-G(x_\rho)\|^2$$

$$< q \| x(\rho) - G(x_\rho) \|^2$$

对所有的 $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$ 成立，　　这里再次应用了(8.6-13)式。

由假设(8.6-9)式,便有

$$2(\boldsymbol{x}(\rho) - G(\boldsymbol{x}_\rho))^T f(\rho, \boldsymbol{x}_\rho) \leqslant - \lambda | \boldsymbol{x}(\rho) - G(\boldsymbol{x}_\rho) |^2$$

注意 $\gamma < \lambda$,及解 $\boldsymbol{x}(t)$、G、f 的连续性,对所有充分小的 $h > 0$,有　$2(\boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t))^T f(t, \boldsymbol{x}_t) \leqslant - \gamma | \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t) |^2$

$$\text{若 } \rho \leqslant t \leqslant \rho + h$$

便有

$$e^{\gamma\rho+h} \| \boldsymbol{x}(\rho + h) - G(\boldsymbol{x}_{\rho+h}) \|^2 - \rho^{\gamma\rho} \| \boldsymbol{x}(\rho) - G(\boldsymbol{x}_\rho) \|^2$$
$$= \int_\rho^{\rho+h} e^{\gamma t} [\gamma \| \boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t) \|^2 dt$$
$$+ 2(\boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}_t))^T f(t, \boldsymbol{x}_t) \quad \leqslant 0$$

这与(8.6-16)式是矛盾的,故(8.6-14)式成立。

第九章　偏微分方程与偏泛函微分方程

本章介绍由偏微分方程及偏泛函数分方程描述的动力系统的稳定性，§1－§3　分别介绍一阶偏微分方程组的稳定性；二阶偏微不等式，比较原理及抛物型方程组的稳态解的稳定性，把 Ляпунов 直接法应用到偏微分方程；§4　介绍一类具有齐次边界条件的偏微分方程非线性大系统的稳定性代数判据；§5　讨论具有反应扩散项的 Gilpim-Ayala 生物竞争模型正的平衡态的稳定性的构造性判定条件；§6　给出了具有扩散的生态系统的持久性与共存性的结果；§7　介绍了用偏泛函微分方程描述的动力系统的稳定性结果；§8　介绍了偏泛函微分方程描述的 Lurie 控制系统的绝对稳定性。

§1　一阶偏微分方程组的稳定性[179]

考虑一阶偏微分方程组[179]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dfrac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}}) & (9.1\text{-}1a) \\ u_i(t_0, \boldsymbol{x}) = \psi_i(\boldsymbol{x}) \qquad \text{在 } \partial\Omega_1 \overset{\text{def}}{=} \{(t, \boldsymbol{x}) \mid t = t_0 \\ \alpha(t_0) \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \beta(t)\} \text{ 上} \quad i = 1, 2, \cdots, n & (9.1\text{-}1b) \end{cases}$$

这里　$\boldsymbol{u} = \mathrm{col}(u_1, \cdots, u_n), \boldsymbol{x} = \mathrm{col}(x_1, \cdots, x_n), \dfrac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathrm{col}(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_m}), \alpha(t)、\beta(t) \in C'[I, R], \Omega \overset{\text{def}}{=} \{(t, \boldsymbol{x}) \mid \alpha(t_0) \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \beta(t)\}$

将(9.1-1a)，(9.1-1b)写成向量形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}) & (9.1\text{-}2a) \\ \boldsymbol{u}(t_0,\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) \qquad 在\ \partial\Omega_1\ 上 & (9.1\text{-}2b) \end{cases}$$

其中 $\psi(\boldsymbol{x})=\mathrm{col}(\psi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\psi_n(\boldsymbol{x}))$

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}) = \mathrm{col}(f_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{x}}),\cdots,f_n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial u_n}{\partial \boldsymbol{x}}))$$

设 $f\in C[\Omega\times R^n\times R^m,R^n]$

$$f(t,\boldsymbol{x},0,0)\equiv 0$$

并设(9.1-2a)∪(9.1-2b)的解是存在唯一的。

显然 $\boldsymbol{u}\equiv 0$ 是(9.1-2a)的零解。

下面来定义(9.1-2a)零解 $\boldsymbol{u}\equiv 0$ 的稳定性,渐近稳定性。

定义 9.1.1 若 $\forall\varepsilon>0,\forall t_0\in I,\exists\delta>0$,当 $\|\psi(\boldsymbol{x})\|<\delta$,(9.2-2$a$)∪(9.1-2$b$)的解 $\boldsymbol{u}(t,\varphi)\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$在 Ω 上有估计式

$$|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})|<\varepsilon$$

则称(9.1-2a)的零解是稳定的。

若 $\forall\hat{\varepsilon}>0 \quad t_0\in I,\exists\sigma_0>0$ 和 $T>0$ 当

$$\|\psi(\boldsymbol{x})\|<\sigma_0,\quad t\geqslant t_0+T,\quad \alpha(t)\leqslant \boldsymbol{x}\leqslant\beta(t)$$

有 $\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|<\hat{\varepsilon}$。则称(9.1-2$a$)的零解是渐近稳定的。

对于(9.1-1a)∪(9.1-1b)的解的 Ляпунов 稳定性,专著[179]利用微分不等式和比较原理进行了详细的讨论,有兴趣的读者可以参考,但从所给出的结果来看,条件大都很复杂,不便验证。

下面用 Ляпунов 直接法,给出一些实用的简便判据,把[179]中许多复杂的条件都略去了。

定理 9.1.1 若存在函数 $V(t,\boldsymbol{u})\in C^1[I\times R^n,R^+]$满足

1) $\varphi_1(\|\boldsymbol{u}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{u})\leqslant\varphi_2(\|\boldsymbol{u}\|) \qquad \varphi_1,\varphi_2\in K$

2) $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dfrac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}})\leqslant 0$

则(9.1-2a)的零解是稳定的。

证:$\forall\varepsilon>0$,于是有 $\varphi_1(\varepsilon)>0$,选取 $\delta>0$,使得 $\varphi_2(\delta)\leqslant\varphi_1(\varepsilon)$,于是当始值 $\sup\limits_{x\in\partial\Omega_1}|\psi(\boldsymbol{x})|\leqslant\delta$,由条件 1)和 2)有

$$\varphi_1(\|u(t,x)\|)\leqslant V(t,u(t,x))\leqslant V(t_0,\psi(x))$$
$$\leqslant \varphi_2(\|\psi(x)\|)\leqslant\varphi_2(\delta)\leqslant\varphi_1(\varepsilon) \qquad (9.1\text{-}3)$$

从而 $\|u(t,x)\|<\varepsilon$

这就说明(9.1-2a)的零解是稳定。

例 1 证明

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=-u_1+\dfrac{2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}}{1+(\dfrac{\partial u_2}{\partial x})^2}u_1-\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}u_2\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}u_1-u_2-\sin(\dfrac{\partial u_1}{\partial x})u_2\end{cases} \qquad (9.1\text{-}4)$$

的零解的稳定性。

证： 取 $V(t,u)=u_1^2+u_2^2$，显然，定理 9.1.1 的条件 1)满足

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(9.1\text{-}4)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial u}f\left(t,x,u\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)$$
$$=-2u_1^2+\frac{4\dfrac{\partial u_2}{\partial t}}{1+\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2}u_1^2-2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2u_1u_2$$
$$+2\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}u_1u_2-2u_2^2+2\sin(\frac{\partial u_2}{\partial x})u_2^2$$
$$\leqslant(-2+2)u_1^2-2\left(1-\left|\sin(\frac{\partial u_1}{\partial x})\right|\right)u_2^2$$
$$\leqslant 0 \qquad (9.1\text{-}5)$$

故(9.1-4)式的零解是稳定的。

定理 9.1.2 若存在函数 $V(t,u)\in C^1[I\times R^n,R^+]$，及 φ_1、φ_2、$\varphi_3\in K$，使得

1) $\varphi_1(\|u\|)\leqslant V(t,u)\leqslant\varphi_2(\|u\|)$

2) $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial u}\cdot f\left(t,x,u\dfrac{\partial u_i}{\partial x}\right)\leqslant-\varphi_3(\|u\|)$

则(9.1-1a)的零解渐近稳定。

证:定理 9.1.2 的条件蕴涵定理 9.1.1 的条件，从而(9.1-

$1a$)的零解是稳定的。

$$\text{令}\ \frac{\mathrm{d}V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot f\left(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\,\frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant-\varphi_3(\|\boldsymbol{u}\|)\leqslant-\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u}))<0$$

于是有

$$\int_{V(t_0)}^{V(t)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}\leqslant-(t-t_0)$$

亦即

$$\int_{V(t)}^{V(t_0,\psi(\boldsymbol{x}))}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}\geqslant t-t_0$$

$\forall\,\varepsilon>0$(取 $H>\varepsilon$)

便有

$$\int_{\varphi_1(\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}=\int_{\varphi_1(\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}$$

$$+\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}$$

$$\geqslant\int_{V(t,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))}^{V(t_0\psi(\boldsymbol{x}))}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})))}\geqslant t-t_0$$

取 $$T=T(\varepsilon,H)>\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}$$

显然,当 $t\geqslant t_0+T$, 由上式有

$$\int_{\varphi_1(\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u})))}$$

$$\geqslant t-t_0-\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(H)}\frac{\mathrm{d}V}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))))}$$

$$>(t-t_0-T)>0$$

这就推出

$$\text{当}\ t\geqslant t_0+T,\varphi_1(\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|)<\varphi_1(\varepsilon)$$

即 $$\|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\|<\varepsilon$$

从而(9.1-2a)的平凡解渐近稳定。

例2 试证下列系统的平凡解是渐近稳定的。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=(-3+\dfrac{1}{2}\sin t)u_1+\cos\dfrac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{x}}u_1+\cos\dfrac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{x}}u_2\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\mathrm{e}^{-\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|t^2}u_1+\left(-\dfrac{3}{2}-\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{x}}\right|\right)u_2\end{cases} \tag{9.1-6}$$

证: 作 $V(t,\boldsymbol{u})=(u_1^2+u_2^2)/2$

显然,定理9.1.2的条件1)满足,取 $\varphi_1=\varphi_2=\dfrac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial u}f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\,\frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}})\\ &\quad=(-3+\frac{1}{2}\sin t)u_1^2+\cos\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{x}}u_1^2+\cos\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{x}}u_2u_1\\ &\qquad+\mathrm{e}^{-\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|t^2}u_1u_2+(-\frac{3}{2}-|\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{x}}|)u_2^2\\ &\quad\leqslant(-3+\frac{1}{2}+1)u_1^2+2|u_1u_2|-\frac{3}{2}u_2^2\\ &\quad\leqslant-0.5u_1^2-0.5u_2^2\overset{\mathrm{def}}{=}\varphi_3(\|\boldsymbol{u}\|).\end{aligned}$$

故定理9.1.2的条件全满足,从而(9.1-6)式的零解渐近稳定。

§2 抛物型偏微分方程中的比较原理[179]

设 $H\in I\times R^n$满足条件:

1) H 是开的,包含带形区域 $t_0<t<\infty$, $t_0\geqslant 0$,且 H 的闭包与带形 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 的交集是有界的。

2) 对任何 $t_1\in[t_0,\infty)$, H 与平面 $t=t_1$ 的交在 R^n 上的投影 P_{t_1}是非空的。

3) 对每个$(t_1,\boldsymbol{x}_1)\in H$,每个序列$\{t_k\}$使得 $t_k\in[t_0,\infty)$, $t_k\to t_1$,当 $k\to\infty$,存在序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$满足 $\boldsymbol{x}_k\in P_{t_k}$,当 $k\to\infty$, $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}_1$。

以∂H 表H 的边界,它被含于带域 $t_0<t<\infty$ 。

考虑下列形式的抛物型偏微分方程组[179]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i\left(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \qquad i = 1,2,\cdots n \quad (9.2\text{-}1)$$

这里

$$\frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}_2}, \cdots \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}_m}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}_1\partial \boldsymbol{x}_1}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}_1\partial \boldsymbol{x}_2}, \cdots \frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}_n\partial \boldsymbol{x}_n}\right)$$

为方便计,写(9.2-1)式为向量形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \qquad (9.2\text{-}2)$$

这里 $\quad \boldsymbol{f} \in C[\overline{H} \times R^n \times R^m \times R^{m^2}, R^n]$

定义 9.2.1 称函数 $f_i(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, P, Q)$在$(t_1, \boldsymbol{x}_1) \in H$ 是椭圆的,若$\forall$ $\boldsymbol{u}$、P、q_{ik}、R_{ik}、二次型

$$\sum_{i,k=1}^{n} (q_{ik} - R_{ik})\lambda_i\lambda_k \leqslant 0 \qquad (9.2\text{-}3)$$

蕴涵 $\quad f_i(t_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}, P, Q) \leqslant f_i(t_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}, P, R) \quad (9.2\text{-}4)$

若对每点$(t, \boldsymbol{x}) \in H$,则称 f_i 在H 内是椭圆的。称(9.2-1)为抛物型方程组。

恒设(9.2-1)式中每个 f_i 是椭圆的,因而(9.2-1)是抛物型方程组。

引理 9.2.1 设

1) $h(t, \boldsymbol{x}) \in C[\overline{H}, R^n]$,在 H 内具有连续的偏导数 $\frac{\partial h(t, \boldsymbol{x})}{\partial t}$, $\frac{\partial h(t, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$, $\frac{\partial^2 h(t, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}$。

2) 在 $P_{t_0} \cup \alpha H$ 上,$h(t, \boldsymbol{x}) < 0$。

3) $\forall (t_1, \boldsymbol{x}_1) \in P_{t_1}$,若 $h_j(t_1, \boldsymbol{x}_1) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$

$$h_i(t_1, \boldsymbol{x}_1) \leqslant 0, i \neq j, \frac{\partial h_j(t_1 \boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad 二次型$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 h_j(t_1, \boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}_i \partial \boldsymbol{x}_k}\lambda_i\lambda_k \leqslant 0 \qquad (9.2\text{-}5)$$

蕴涵 $\frac{\partial h_j}{\partial t}(t_1, \boldsymbol{x}_1) < 0$

则有结论:在 H 内 $h_j(t, \boldsymbol{x}) < 0 \quad j = 1, \cdots, n$

恒成立。

证:设集合 $Z = \bigcup_{i=1}^{N} [(t, \boldsymbol{x}) \in H, h_i(t, \boldsymbol{x}) \geqslant 0]$ 非空,Z_t 是 Z 在 $t = t_1$ 的投影,从条件 2)可知 $t_1 > t_0$,因为 Z 是闭的,且条件 2)成立。便有

$$h_i(t_1, \boldsymbol{x}) \leqslant 0, \text{在 } H \cap [t_0, t_1] \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

上成立。

若存在 $j, 1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $\boldsymbol{x}_1 \in \text{int} P_{t_1}$ 使得

$$h_i(t_1, \boldsymbol{x}_1) = 0$$

进而有

$$\frac{\partial h_j}{\partial t}(t_1, \boldsymbol{x}_1) \geqslant 0 \tag{9.2-6}$$

另一方面,因为 $m_j(t, \boldsymbol{x})$ 在 $(t_1, \boldsymbol{x}_1) \in \text{int} P_{t_1}$ 达到最小值,故有

$$\frac{\partial h_j(t_1, \boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

对于任意非空向量 λ

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 h_j(t_1, \boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}_i \partial \boldsymbol{x}_k} \lambda_i \lambda_k \leqslant 0$$

由条件 3)知与(9.2-6)式矛盾。

因此(9.2-5)式成立。

以下用 τ 表示以 $(t_1, \boldsymbol{x}_1) \in \partial H$ 为起点而指向 H 内部的射线,τ 的内点全在 H 中,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})}{\partial \tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(t_1, \boldsymbol{x}_1)}{-\Delta\tau}$$

表示方向导数。

引理9.2.2 引理 9.2.1 的条件 2)代之以

2′) $\frac{\partial h_i(t, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} < 0$ 在 P_{t_0} 和 $\partial H - \partial H_a^i$ 内成立,

∂H_a^i 表示∂H 的边界部分。

2″) 对任何 j, $1\leqslant j\leqslant n$,$(t_1,\boldsymbol{x}_1)\in\partial H_a^j$, 若 $h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)=0$, $h_i(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant 0$, $i\neq j$, 则

$$\frac{\partial h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial\tau^j}<0$$

这里,对于每$(t,\boldsymbol{x})\in\partial H_a^i$, $\dfrac{\partial h_i}{\partial\tau}$存在。

引理 9.2.1 其它条件不变,则结论(9.2-5)式仍成立。

现在,利用引理 9.2.1,引理 9.2.2 来建立一些比较定理。

定理 9.2.1 假设

1) $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{V}\in C[\overline{H},R^n]$, 偏导数$\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t},\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}},\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{x}},\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t},\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{x}},\dfrac{\partial^2\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{x}}$存在连续。

2) $\boldsymbol{f}\in C[\overline{H}\times R^n\times R^m\times R^{m^2},R^n]$,函数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},P,R)$是关于 $\boldsymbol{u}$ 拟单调不减的,且对每一个在 H 内的$(t,\boldsymbol{x},P,R)$,有

$$T(\boldsymbol{u})\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}-f\left(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial\boldsymbol{u}^i}{\partial\boldsymbol{x}},\frac{\partial\boldsymbol{u}^i}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{x}}\right)$$

$$<\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}-f\left(t,\boldsymbol{x},v,\frac{\partial\boldsymbol{V}^i}{\partial\boldsymbol{x}},\frac{\partial^2\boldsymbol{V}^i}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{x}}\right)=:T(V)$$

$T(\boldsymbol{u})=0$ 是抛物型偏微分方程。

3) 在 $P_{t_0}\cup\partial H$ 上$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})<\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$

则在 H 上恒有

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})<\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})\tag{9.2-7}$$

证:令 $\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$,只须证 $\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})$满足引理 9.2.1 条件,显然,只须由定理 9.2.1 的条件 1)和 2)验证引理 9.2.1 的条件 3)成立。

设 $(t_1,\boldsymbol{x}_1)\in P_{t_1}$ $h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)=0$ $1\leqslant j\leqslant n$

$$h_i(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant 0\qquad i\neq j\qquad \frac{\partial h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial\boldsymbol{x}}=0\quad 和$$

$$\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial\boldsymbol{x}_i\partial\boldsymbol{x}_k}\lambda_i\lambda_k\leqslant 0$$

对于任意的向量 λ 有

$$\begin{cases} u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1) = V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1) \\ u_i(t_1,\boldsymbol{x}_1) \leqslant V_i(t_1,\boldsymbol{x}_1) \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \boldsymbol{x}}(t_1,\boldsymbol{x}_1) = \dfrac{\partial v_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}} \end{cases} \quad i \neq j \qquad (9.2\text{-}8)$$

且

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2[u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1) - V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)]}{\partial \boldsymbol{x}_i \partial \boldsymbol{x}_k} \lambda_i \lambda_k \leqslant 0$$

因为 f_i 是椭圆的，以及 f_i 的拟单调性，故有

$$\begin{aligned} & f_j\left(t_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_1),\frac{\partial u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \\ & \quad \leqslant f_j\left(t_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_1),\frac{\partial u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \\ & \quad \leqslant f_j\left(t_1,\boldsymbol{x}_1,V(t_1,\boldsymbol{x}_1),\frac{\partial V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \end{aligned} \qquad (9.2\text{-}9)$$

不等式 $T(\boldsymbol{u}) < T(V)$ 可推出

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial t} & < f_j\left(t_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_1),\frac{\partial u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \\ & \quad - f_j\left(t_1,\boldsymbol{x}_1,V(t_1,\boldsymbol{x}_1),\frac{\partial V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 V(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\right) \\ & \leqslant 0 \end{aligned}$$

因此，由(9.2-9)式，及引理 9.2.1 推知结论(9.2-7)式成立。

定理9.2.2 设定理 9.2.1 的条件 1)、2)成立，且设

3) $u_i(t,\boldsymbol{x}) < V_i(t,\boldsymbol{x})$ 在 P_{t_0} 和 $\partial H - \partial H_a^i (i=1,2,\cdots,n)$ 上成立。

4) 对每个 $(t,\boldsymbol{x}) \in \partial H_\partial^i$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \tau_i}$，$\dfrac{\partial V_i}{\partial \tau_i}$ 存在，且

$$\Delta \partial_i(t,\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{u}_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial \tau_i} + Q_i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))$$

$$< \partial_i(t,\boldsymbol{x}) \frac{\partial V_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial \tau_i} + Q_i(t,\boldsymbol{x},V(t,\boldsymbol{x})) \quad \text{在 } \partial H^i \text{ 上成立。}$$

这里 $Q\in C[\partial H\times R^n,R^n]$,$Q(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$关于 $\boldsymbol{u}$ 是拟单调不减的。

则不等式(9.2-7)式仍成立。

证:如同定理 9.2.1 的证明,验证引理 9.2.2 的条件成立,只须验证条件 2″)成立。

设 $1\leqslant j\leqslant n$, $(t_1,\boldsymbol{x}_1)\in\partial H_\alpha^i$,假设 $h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)=0$ 和 $h_i(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant 0,i\neq j$,这蕴涵着

$$u_j(t_1,\boldsymbol{x}_1) = V_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)$$
$$u_i(t_1,\boldsymbol{x}_1)\leqslant V_i(t_1,\boldsymbol{x}_1) \qquad i\neq j$$

故根据 Q 的拟单调性质,有

$$Q_j(t_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_1))\leqslant Q_j(t_1,\boldsymbol{x}_1,V(t_1,\boldsymbol{x}_1))$$

这就得到不等式

$$\begin{aligned} h^j(t_1,\boldsymbol{x}_1)\frac{\partial h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial\tau_j} &< Q_j(t_1,\boldsymbol{x}_1,V(t_1,\boldsymbol{x}_1)) \\ &\quad - Q_j(t_1,\boldsymbol{x}_1,V(t_1,\boldsymbol{x}_1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

从而保证了$\dfrac{\partial h_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)}{\partial\tau_j}<0$, 因为在$\partial H^i$ 上$\partial_j(t_1,\boldsymbol{x}_1)>0$ 。定理 9.2.2 获证。

因此,类似于定理 9.2.2,我们有以下的比较定理。

定理 9.2.3 假设

1) $\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})\in C[H,R^n]$,在 H 内 $m(t,\boldsymbol{x})$具有连续偏导数

$$\frac{\partial\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t},\frac{\partial\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}},\frac{\partial^2\boldsymbol{h}(t,\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}\partial\boldsymbol{x}}$$

2) $f\in C[\overline{H}\times R^n\times R^m\times R^{m^2},R^n]$, T 是抛物型算子,且在 H 上 $T[h]\leqslant 0$;

3) $\boldsymbol{g}\in C[I\times R_+^n,R^n]$,$\boldsymbol{g}(t,y)$对每个 $t\in I$ 关于 y 是拟单调不减的,$r(t,t_0,y_0)$ 是常微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t,y)\\ y(t_0) = g_0\geqslant 0\end{cases}$$

在 $t \geqslant t_0$ 上存在的解。

且 $f(t, \boldsymbol{x}, z, 0, 0) \leqslant g(t, z) \qquad z \geqslant 0$

4) 在 $P_{t_0} \cup \partial H$ 上, $h(t, \boldsymbol{x}) \leqslant r(t, t_0, y_0)$

则在整个 H 上,不等式

$$h(t, \boldsymbol{x}) \leqslant r(t, t_0, y_0)$$

在 H 上成立。

§3 抛物型偏微分方程组的稳定性

设 $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ 是抛物型偏微分方程组(9.2-2)的任意解,且设(9.2-2)具有零解 $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \equiv 0$。

令 $\| \boldsymbol{u}(t, \cdot) \|_{p_t} = \max\limits_{x \in p_t} \| \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \|$

定义 9.3.1 称抛物型偏微分方程组(9.2-2)式的零解是稳定的,若 $\forall \varepsilon > 0, t_0 \in I, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

1) $\| \psi(t_0, \cdot) \|_{p_{t_0}} \leqslant \delta(\varepsilon)$

2) $\| \psi(t, \cdot) \|_{\partial H} < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$

蕴涵 $\| \boldsymbol{u}(t, \cdot) \|_{p_t} < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$

称抛物型偏微分方程组(9.2-2)式的零解是渐近稳定的,若它是稳定的,且若

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, t_0 \in I, \exists \sigma(\varepsilon) > 0, T > 0$ 使得

1) $\| \psi(t_0, \cdot) \|_{p_{t_0}} \leqslant \sigma(\varepsilon)$

2) $\| \psi(t, \cdot) \|_{\partial H} < \varepsilon \qquad$ 当 $t \geqslant t_0 + T$

蕴涵 $\| \boldsymbol{u}(t, \cdot) \|_{p_t} < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0 + T$

定理 9.3.1[179] 假设存在函数 $V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 和 $g(t, y)$ 满足下列条件:

1) $g \in C[I \times R_+, R] \qquad g(t, 0) \equiv 0$

2) $V \in C[\overline{H} \times R^n, R^+]$, $V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 在 H 内具有连续偏导数 $\dfrac{\partial V}{\partial t}, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}}, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}}$ 且

$$\varphi_1(\|\boldsymbol{u}\|) \leqslant V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \leqslant \varphi_2(\|\boldsymbol{u}\|) \qquad \varphi_1、\varphi_2 \in K$$

3) $\boldsymbol{f} \in C[\overline{H} \times R^n \times R^m \times R^{m^2}, R^n]$

$G \in C[\overline{H} \times R^n \times R^m \times R^{m^2}, R^n]$，$G$ 是椭圆的

且

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{u}} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}})$$

$$\leqslant G(t,\boldsymbol{x},V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}})$$

4) $G(t,\boldsymbol{x},z,0,0) \leqslant g(t,z) \qquad z \geqslant 0$

则常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t,y) \\ y(t_0) = g_0 \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.3-1}$$

的零解的一致稳定性蕴涵偏微分方程组(9.2-2)的零解的一致稳定性。

证:设 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ 是(9.2-2)的解，它的始值条件 $V(t,\boldsymbol{x},\psi(t,\boldsymbol{x})) \leqslant r(t,t_0,y_0)$ 在 $P_{t_0} \cup \partial H$ 上成立。

令 $h(t,\boldsymbol{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))$

则在 $P_{t_0} \cup \partial H$ 上有

$$h(t,\boldsymbol{x}) \leqslant r(t,t_0,y_0)$$

由条件 3)得到

$$\frac{\partial h(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \leqslant G(t,\boldsymbol{x},h(t,x),\frac{\partial h(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}},\frac{\partial^2 h}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}})$$

因此由定理 9.2.3，有

$$h(t,\boldsymbol{x}) = V(t,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})) \leqslant r(t,t_0,y_0) \tag{9.3-2}$$

在 H 内成立，这里 $r(t,t_0,y_0)$ 是(9.3-1)式在 $t \geqslant t_0$ 的最大解。

$\forall \varepsilon > 0, t_0 \in I$，设(9.3-1)的零解一致稳定，则对于给定的 $\varphi_1(\varepsilon) > 0, t_0 \in I$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得

$$g(t,t_0,y_0) < \varphi_1(\varepsilon) \qquad t \geqslant t_0$$

当 $0<y_0\leqslant\delta$，这里 $y(t,t_0,y_0)$是(9.3-1)式的任意解。

选取 y_0 使

$$\varphi_2(\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_0}) = y_0$$

则存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$，使得

$$\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_0}\leqslant\delta_1 \text{和} \ \varphi_2(\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_0}\leqslant\delta \tag{9.3-3}$$

同时成立。

现
$$\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_0}\leqslant\delta$$

$$\|\psi(t_0,\cdot)\|_{\partial H}<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$$

则
$$\|\psi(t_0,\cdot)\|p_t<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$$

若不然，设对某些 $t_1>t_0$，有

$$\|\boldsymbol{u}(t_1,\cdot)\|p_{t_1}\geqslant\varepsilon$$

则由条件知，存在一个 $\boldsymbol{x}_0\in\text{int}P_{t_1}$使得

$$\|\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_0)\| = \varepsilon$$

于是由(9.3-2)及条件2)有

$$\varphi_1(\varepsilon)\leqslant V(t_1,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(t_1,\boldsymbol{x}_0))\leqslant r(t_1,t_0,y_0)<\varphi_1(\varepsilon)$$

这是矛盾的，故偏微分方程组(9.3-2)式的零解一致稳定。

定理9.3.2 若定理9.3.1的条件全满足，则(9.3-1)式的平凡解一致渐近稳定蕴涵着(9.2-2)式的零解一致稳定。

证：仿照定理9.3.1可证(9.3-2)式的零解一致稳定。现只须证一致吸引。

$\forall\varepsilon>0,t_0\in I$，给定 $\varphi_1(\varepsilon)>0$，存在 $\delta_0(\varepsilon)>0$ 和 $T=T(\varepsilon)$ 使得

$$\text{当}\ t\geqslant t_0+T,g(t,t_0,y_0)<\varphi_1(\varepsilon) \tag{9.3-4}$$

只要 $0\leqslant y_0\leqslant\delta_0$，选取 $y_0=\varphi_2(\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_0})$，则存在 $\sigma>0$，使得

$$\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_1}\leqslant\sigma \quad \text{和} \quad \varphi_2(\|\psi(t_0,\cdot)\|p_{t_1})\leqslant\delta$$

同时成立。

现设

1) $\| \psi(t_0,\cdot) \| p_{t_0} \leqslant \tilde{\delta}_0$

2) $\| \psi(t_0,\cdot) \| \partial H < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0 + T$

设存在一序列$\{t_k\}$, $t_k \geqslant t_0 + T$ 和 $t_k \to \infty$, 当 $k \to \infty$ 使得 $\| \boldsymbol{u}(t_k, \cdot) \| p_{t_k} \geqslant \varepsilon$ 对某些解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$成立。

于是存在 $\boldsymbol{x}_k \in \mathrm{int} P_{t_k}$, 满足 $\| \boldsymbol{u}(t_k, \boldsymbol{x}_k) \| = \varepsilon$ (9.3-5)

这样利用关系式

$$\varphi_1(\| \boldsymbol{u} \|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant \varphi_2(\| \boldsymbol{u} \|)$$

$$V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})) \leqslant r(t, t_0, y_0)$$

$$y(t, t_0, y_0) < \varphi_1(\varepsilon)$$

有以下矛盾的结果。

$$\varphi_1(\varepsilon) \leqslant V(t_k, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}(t_k, \boldsymbol{x}_k)) \leqslant r(t_k, t_0, y_0) < \varphi_1(\varepsilon)$$

故(9.3-5)式不成立,从而

$$\| \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \|_{P_t} < \varepsilon \qquad \text{当 } t \geqslant t_0 + T$$

恒成立,故(9.2-2)式的零解一致渐近稳定。

§4 一类偏微分方程大系统的稳定性[177]

本节讨论一类偏微分方程大系统的稳定性,利用大系统的分解集结的思想,先对孤立子系统构造平均 Ляпунов 函数,适当控制耦合项的界,特别利用边界条件的特殊性质,推导出一些构造性的稳定性代数判据。

先考虑下列用线性偏微分方程组及边界条件描述的大系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\dfrac{\partial \boldsymbol{u}(t,x)}{\partial x}\right) + B\boldsymbol{u}(t,x) \quad 0 \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant 1 & (9.4\text{-}1) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 & (9.4\text{-}2) \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{u}(t,x) \in C[I \times [0,1], R^n]$, $A(x)$、B 是系数矩阵,具有下列性质

$$A(x) = \mathrm{diag}(A_1(x), A_2(x), \cdots, A_m(x))_{n\times n}$$
$$A_i(x) = \mathrm{diag}(a_i(x), \cdots, a_i(x))_{n_i\times n_i} \qquad (9.4\text{-}3)$$

这里 $\sum_{i=1}^{n} n_i = n, a_i(x) > 0(i = 1,2,\cdots,n)$是物理系数,$a_i(x) \in C^1[0,1], R^+]$。

现分解(9.4-1)式为

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A_i(x), \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial \boldsymbol{x}}) + B_{ii}\overline{\boldsymbol{u}}_i + \sum_{j\neq i} B_{ij}\overline{\boldsymbol{u}}_j \quad i = 1,2,\cdots,m \qquad (9.4\text{-}4)$$

这里 $B_{ij}(i\neq j)$是子系统之间的交互系数矩阵。

$$B = (B_{ij})_{n\times n} \qquad B_{ij} \text{ 为 } n_j \times n_j \text{ 矩阵。}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}_i = \mathrm{col}(u_{n_1+\cdots,n_{i-1}+1}, \cdots, u_{n_1+\cdots,n_i}) \in R^{n_i} \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

考虑每个孤立子系统。

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(A_i(x), \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial \boldsymbol{x}}) + B_{ii}\overline{\boldsymbol{u}}_i \qquad i = 1,2,3,\cdots,m \quad (9.4\text{-}5)$$

具有边界条件

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t}\Big|_{x=1} = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m \quad (9.4\text{-}6)$$

定理9.4.1 若存在 $n_i \times n_i$ 正定矩阵P_i 使得

$$B_{ii}^T P_i + P_i B_{ii} = - I_i \qquad (9.4\text{-}7)$$

这里 I_i 是$n_i \times n_i$ 单位矩阵,则孤立子系统(9.4-5)的平凡解是渐近稳定的。

证:选取平均 Ляпунов 函数为

$$W_i = \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T(t,x) P_i \overline{\boldsymbol{u}}_i(t,x)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由边界条件(9.4-6)式有

$$\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.4\text{-}5)_i} = -\int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \boldsymbol{u}_i \mathrm{d}x + 2\Big\{\overline{\boldsymbol{u}}_i(t,x) P_i A_i(x) \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial x})^T P_i A_i(x) \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial x}\mathrm{d}x\Big\}$$

$$= -\int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x - \int_0^1 (\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x})^2 P_i A_i(x) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} \mathrm{d}x$$

从 $A_i(x) = a_i(x) I_{ni}$ $a_i(x) > 0$，可知 $P_i A_i(x)$ 正定，故有

$$\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t} |_{(9.4\text{-}5)} \leqslant -\int_0^1 \overline{u}_i^T u_i \mathrm{d}x$$

故知定理 9.4.1 结论成立。

(9.4-7)式有正定矩阵解，当且仅当 B_{ii} 为 Hurwitz 矩阵。

定理 9.4.2 若对所有子系统(9.4-5)式，定理 9.4.1 的条件成立，且存在 m 个正数 $d_1, d_2, \cdots, d_m$，使得

$$a_i = d_i - d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \| P_i B_{ij} \| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_j \| P_i B_{ji} \| > 0 \qquad (9.4\text{-}8)$$

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

则(9.4-1)式的平凡解渐近稳定。

证：对于每个孤立子系统(9.4-5)式，选取平均 Ляпунов 函数为

$$W_i = \int_0^1 \overline{u}_i^T(t,x) P_i \overline{u}_i(t,x) \mathrm{d}x$$

且令 $W = \sum_{i=1}^{m} d_i W_i$ 作为系统(9.4-4)式的 Ляпунов 函数，则有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} |_{(9.4\text{-}4)} = \sum_{j=1}^{m} d_i \{ \int_0^1 \overline{u}_i^T (B_{ii}^T P_i + P_i B_{ii}) \overline{u}_i$$

$$+ 2\int_0^1 \overline{u}_i^T P_i [\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} (A_i(x) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} B_{ij} \overline{u}_i] \} \mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^T \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x + 2\sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^1 \overline{u}_i P [\frac{\partial}{\partial x} A_i(x)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x}] \mathrm{d}x + \alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} d_i \int_0^1 \overline{u}_i^T P_i B_{ij} \overline{u}_j \mathrm{d}x$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{m} d_i \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d_i \| P_i B_{ij} \|$$

$$\cdot \left(\int_0^1 \| \overline{\boldsymbol{u}}_i \|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 \| \overline{\boldsymbol{u}}_j \|^2 \mathrm{d}x\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} d_i \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} d_i \| P_i B_{ij} \|$$

$$\cdot \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} d_j \| P_j B_{ji} \| \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} d_i \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x$$

由条件(9.4-8)式可知$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\big|_{(9.4\text{-}4)}$负定,从而定理 9.4.2 结论成立。

考虑下列非线性系统

$$\frac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(A(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right) + B(t,\boldsymbol{x}) + f(t,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})) \tag{9.4-9}$$

具有边界条件(9.4-2)式,且 $A(\boldsymbol{x})$由(9.4-3)式的定义。

分解(9.4-9)式为下列 m 维子系统

$$\frac{\partial \overline{u}_i(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(A_i(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \overline{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) + B_{ii}\overline{u}_i$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} B_{ij}\overline{u}_j + f_i(t_1, \overline{u}_i, \cdots, \overline{u}_m) \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

这里$\overline{\boldsymbol{u}}_i = \mathrm{col}(u_{n_1+\cdots,n_{i-1}+1}, \cdots, u_{n_1+\cdots,n_i}) \in R^{n_i}$

$B = (B_{ij})_{n\times n}$,B_{ij}是$n_i \times n_j$ 矩阵。

$f(t,\boldsymbol{u}) = \mathrm{col}(f_1(t,\boldsymbol{u}), \cdots, f_n(t,\boldsymbol{u}))$,满足 $f(t,0) \equiv 0$,且

$$\| f_i(t,\overline{u}_1,\cdots,\overline{u}_m) \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_i \| \overline{u}_j \| \qquad i = 1,2,\cdots,m \tag{9.4-10}$$

这里 $\beta_i > 0 (j = 1,2,\cdots,m)$是常数。

定理9.4.3 设定理 9.4.1 的条件对(9.4-9)式的所有孤立子系统(9.4-5)式满足,且不等式(9.4-10)式对所有非线性项 f_i $(i = 1,\cdots,m)$成立,若存在正数 $d_1, d_2, \cdots, d_m$,使得

$$\alpha_i = d_i - d_i \| P_i \| \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \beta_j \sum_{j=1}^{m} d_j \| \beta_j \| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} d_j \| P_j B_{ij} \|$$

$$- d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \| P_i B_{ji} \| > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m \qquad (9.4\text{-}11)$$

则非线性大系统(9.4-9)式的平凡解是渐近稳定的。

证:对孤立子系统(9.4-5)式,定义 Ляпунов 函数如下

$$W_i = \int_0^1 \overline{u}_i P_i \overline{u}_i \mathrm{d}x$$

令 $W = \sum_{i=1}^{m} d_i W_i$ 是非线性大系统(9.4-9)式的 Ляпунов 函数,则

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \Big|_{(9.4\text{-}9)} = \sum_{i=1}^{m} d_i \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t} \Big|_{(9.5\text{-}9)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} d_i \int_0^1 \overline{u}_i^T (B_{ii}^T P_i + P_i B_{ii}) \overline{u}_i \mathrm{d}x$$

$$+ 2\int_0^1 \overline{u}_i^T P_i [\frac{\partial}{\partial x}(A_i(x) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x})$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} B_{ij} \overline{u}_j + f_i(t, \overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m)] \mathrm{d}x$$

$$\leqslant - \sum_{i=1}^{m} d_i \int_0^1 \overline{u}_i u_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} d_i \| P_i B_{ij} \| \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i^T \mathrm{d}x$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} d_j \| P_i B_{ji} \| \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} d_i$$

$$\cdot \| P_i \| \beta_i \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_j \| P_j \| \beta_i \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^1 \overline{u}_i^T \overline{u}_i \mathrm{d}x < 0 \quad \text{当 } u \neq 0$$

故(9.4-9)式的平凡解是渐近稳定的。

下面考虑更一般的系统,在很多控制问题中,如多输入耦合控制器,其状况方程能写为下列形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = A_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \qquad 0 \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant 1 \quad (9.4\text{-}12)$$

具有齐次边界条件

$$A_0\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\mid_{x=0,1} = 0 \qquad (9.4\text{-}13)$$

这里 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \in C[A \times [0,1], R^n]$是状态变量,$A_0(\boldsymbol{x})$是一个线性微分算子,若 $n \gg 1$,算子 $A_0(\boldsymbol{x})$ 的特征值的确定是很难的,下面分解(9.4-12)式为下列形式。

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i(t,x)}{\partial t} = A_{ii}(x)\overline{\boldsymbol{u}}_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} A_{ij}(x)\overline{\boldsymbol{u}}_j \qquad i = 1,2,\cdots,m \qquad (9.4\text{-}14)$$

这里 $A_{ij}(\boldsymbol{x})$是可微算子矩阵。

$$\overline{\boldsymbol{u}}_i(t,x) \in C[A \times [0,1], R^n]$$

$$u = \mathrm{col}(\overline{\boldsymbol{u}}_1,\cdots,\overline{\boldsymbol{u}}_m) \in R^n, \sum_{j=1}^{m} n_i = n$$

对于每一个孤立子系统

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} = A_{ii}(\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{u}}_i \qquad (9.4\text{-}15)$$

设存在 Ляпунов 函数

$$W_i = \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T P_i(x)\overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x \qquad (9.4\text{-}16)$$

使得

$$\int_0^1 (\overline{\boldsymbol{u}}_i^T A_{ii}^x(x)P_i(x) + P_i(x)A_{ii}(x))\overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x \leqslant -\lambda_i \int_0^1 \overline{\boldsymbol{u}}_i^T \overline{\boldsymbol{u}}_i \mathrm{d}x \qquad (9.4\text{-}17)$$

这里 $P_i(x)$是正定矩阵,$A_{ii}^*(x)$是 $A_{ii}(x)$的共轭算子,$\lambda_i = \mathrm{const} > 0 (i=1,2,\cdots,m)$,则有

定理 9.4.4 设上述条件(9.4-16)、(9.4-17)成立,且

1) $A_{ii}(x)$ 是有界算子。

$$\| A_{ij}(x)\overline{\boldsymbol{u}}_j \| \leqslant a_{ij}(x) \| \overline{\boldsymbol{u}}_j \| \qquad i,j = 1,2,\cdots,m$$

2)存在 m 个正数$d_i (i=1,2,\cdots,m)$,使得

$$\alpha_i = d_i\lambda_i - d_i p_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} a_{ij} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} d_j p_j a_{ji} > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

这里 $p_i=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\|p_i(x)\|$，$a_{ij}=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}a_{ij}(x)$，$i,j=1,2,\cdots,m$，则(9.4-14)的零解渐近稳定。

证：设 W_i 是由(9.4-16)所定义的 Ляпунов 函数，且

$$W=\sum_{j=1}^{m}d_iW_i$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.4\text{-}14)} &= \sum_{i=1}^{m}d_i\int_0^1\overline{u}_i^T[A_{ii}^*(x)P_i(x)+P_i(x)A_{ii}(x)]\overline{u}_i\mathrm{d}x \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{m}d_i\int_0^1\overline{u}_i^TP_i(x)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}A_{ii}(x)\overline{u}_j\mathrm{d}x \\
&\leqslant -\sum_{i=1}^{m}d_i\lambda_i\int_0^1\overline{u}_i^T\overline{u}_i\mathrm{d}x+2\sum_{i=1}^{m}d_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}P_ia_{ij}\int_0^1\|\overline{u}_i\| \\
&\quad \cdot\|\overline{u}_j\|\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{m}d_i\lambda_i\int_0^1\overline{u}_i^T\overline{u}_i\mathrm{d}x \\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}d_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}P_ia_{ij}\left(\int_0^1\overline{u}_i^T\overline{u}_i\mathrm{d}x+\int_0^1\overline{u}_j^Tu_j\mathrm{d}x\right) \\
&=-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1\overline{u}_i^T\overline{u}_i\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

故定理 9.4.4 的结论成立。

§5 具有反应扩散项的 Gilpin—Ayala 生物竞争模型[183]

众所周知，在生物数学中，Gilpin－Ayala 竞争模型

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t}=r_iN_i\left(1-\left(\frac{N_i}{k_i}\right)^{\theta_i}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}a_{ij}\left(\frac{N_i}{k_i}\right)\right)\quad i=1,2,\cdots,m \tag{9.5-1}$$

是一个重要的模型，它是经典的 Lotka－Voterra 模型的修正模型(当 $\theta_i=1$，(9.5-1)式即为 Lotka－Volterra 模型)，这里，N_i 表示

第 i 个物种的数量(或密度,或某些生物量),$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t}$ 表示这个物种的增长率,r_i 是内禀指数增长率,k_i 是缺乏竞争的传播能力,θ_i 是修正 Lotka-Volterra 模型的参数。

现在考虑具有反应扩散项的 Gilpin-Ayala 竞争系统

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = r_i N_i\left(1 - \left(\frac{N_i}{k_i}\right)^{\theta_i} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} a_{ij}\left(\frac{N_i}{k_i}\right)\right) + \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right) \qquad i = 1,2,\cdots,m \tag{9.5-2}$$

这里 $D_i = (D_i(t,\boldsymbol{x},N) \quad i=1,2,\cdots,m$

$$N = \mathrm{col}(N_1,\cdots,N_m)$$

设 D_i 是充分光滑的,设 Ω 是一个具有测度大于零的 R^l 空间的一个集,$t\in R_+=[0,\infty)$,$\boldsymbol{x}\in\Omega$。

边界条件为

$$\frac{\partial N_i}{\partial \hat{n}} = 0 \qquad \text{当 } t>0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$$

假设区域$\partial\Omega$ 是完全闭合的,$\partial\Omega$ 表Ω 的边界,且 $\bar{n}$ 是边界的法向量。

设 $N^* = \mathrm{col}(N_1^*,N_1^*,\cdots,N_m^*)^T$ 是没有反应项的 Gilpin-Ayala 竞争模型的正的平衡位置,即下列方程

$$\left(\frac{N_i}{k_i}\right)^{\theta_i} + \sum_{j\neq i}^{m} a_{ij}\left(\frac{N_i}{k_i}\right) = 1$$

的解。

下面分 $\theta_i\geqslant 1, 0<\theta_i<1$ 两种情况讨论。

定义 9.5.1 称正的平衡位置 $N=N^*$ 在 $R_+^* \overset{\mathrm{def}}{=} \{N \mid N_i>0, i=1,\cdots,m\}$ 内稳定的,若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $N^0\in R_+^m$,且

$$\| N^0 - N^* \| < \delta(\varepsilon)$$

有 $\quad \| N(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,N^0) - N^* \| < \varepsilon \qquad$ 当 $t\geqslant t_0$

此外,若还存在 $\sigma>0$,使当 $N^0\in R_+^m$,且 $\| N^0 - N^* \| < \sigma$ 时,有

$$\lim_{t\to\infty} N(t,t_0,x_0,N^{(0)}) = N^*$$

则称 $N=N^*$ 在 R_+^m 内是渐近稳定的。

若 $N=N^*$ 在 R_+^m 内是稳定的,且 $\forall N(0)\in R_+^m$,有

$$\lim_{t\to\infty} N(t,t_0,x_0,N^{(0)}) = 0$$

则称 N^* 是在 R_+^m 内全局渐近稳定的。

定理 9.5.1 若 $\theta_i \geqslant 1$,矩阵 $P=(P_{ij})_{m\times m}$ 是一个 M 矩阵,则(9.5-2)式正的平衡位置 $N=N^*$ 在 R_+^m 内全局渐近稳定的。

其中 $p_{ii}=N_i^{*(\theta_i-1)}/k_i^{\theta_i}$ $\quad p_{ij}=-\alpha_{ij}/k_j \quad j\neq i$

证:改写(9.5-1)为

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = r_iN_i((N_i^*/k_i)^{\theta_i}-(N_i/k_i)^{\theta_i}) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_j-N_j^*)$$

$$+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right) \qquad i=1,2,\cdots,m \qquad (9.5\text{-}3)$$

因为 P 是一个 M 矩阵,故存在一正定对角矩阵 $C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_m)$ 使得 $CP+P^TC$ 是正定的,故可构造如下平均 Ляпунов 函数

$$W(N) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{r_i}(N_i-N_i^*$$

$$-N_i^*\ln(\frac{N_i}{N_i^*}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\Omega V(N)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (9.5\text{-}4)$$

显然 $W(N^*)=0 \qquad W(N)>0$,当 $N\neq N^*$ 且

$$W(N^*)\to\infty \qquad \text{当 } N_i\to\infty \qquad \text{或} \quad N_i\to 0^+$$

沿(9.5-2)式的解 $N_i(t,\boldsymbol{x})$ 计算 $W(N)$ 的全导数,便有

$$\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)} = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}V(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial N_i}\frac{\partial N_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$+\int_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{k_i^{\theta_i}}(N_i-N_i^*)(N_i^{*\theta_i}-N_i^{\theta_i})$$

$$-\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{m} c_i\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i-N_i^*)(N_i-N_i^*)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

如果 $N_i \geqslant N_i^*$,因为当 $\theta_i \geqslant 1$ $(\frac{N_i}{N_i^*})\theta_i \geqslant \frac{N_i}{N_i^*}$

故有

$$(N_i - N_i^*)(N_i^{\theta_i} - N_i^{*\theta_i}) = (N_i - N_i^*)N_i^{*\theta_i}((\frac{N_i}{N_i^*})^{\theta_i} - 1)$$

$$\geqslant (N_i - N_i^*)N^{*\theta_i}(\frac{N_i}{N_i^*} - 1)N_i^{*\theta_i - 1}(N_i - N_i^*)^2$$

如果 $N_i \leqslant N_i^*$,则有

$$(N_i - N_i^*)(N_i^{\theta_i} - N_i^{*\theta_i}) = (N_i^* - N_i)(N_i^{*\theta_i} - N_i^{\theta_i}) \geqslant N_i^{*\theta_i - 1}(N_i - N_i^*)^2$$

因此

$$c_i/k_i^{\theta_i}(N_i - N_i^*)(N_i^{*\theta_i} - N_i^{\theta_i}) = -\frac{c_i}{k_i^{\theta_i}}(N_i - N_i^*)(N_i^{\theta_i} - N_i^{*\theta_i})$$

$$\leqslant -c_i\frac{N_i^{*\theta_i - 1}}{k_i^{\theta_i}}(N_i - N_i^*)^2 = -c_i p_{ii}(N_i - N_i^*)^2$$

则

$$\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)} \leqslant \int_\Omega \{\sum_{i=1}^{m} - c_i p_{ii}(N_i - N_i^*)^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{m} c_i p_{ij} \cdot (N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_i p_{ij}(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} D_i(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2})(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

从边界条件$\frac{\partial N_i}{\partial \hat{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ 可推出

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

考虑到$\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}=\frac{N_i^*}{N_i^2}>0$,故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)}&\leqslant-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_ip_{ij}(N_i-N_i^*)(N_j-N_j^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(N-N^*)^T(CP+P^TC)(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&<0\qquad 当 N\neq N^*\end{aligned}$$

这里 $(N-N^*)=[(N_i-N_i^*)\cdots(N_m-N_m^*)]^T$

因此,平衡位置 N^* 是在 R_+^m 内全局渐近稳定的。

例1 考虑下列二维系统

$$\begin{cases}\frac{\partial N_1}{\partial t}=r_1N_1[1-(\frac{N_1}{k_1})^{\theta_1}-\alpha_{12}(\frac{N_2}{k_2})]+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_1\frac{\partial N_1}{\partial \boldsymbol{x}_k}),\\\frac{\partial N_2}{\partial t}=r_2N_2[1-(\frac{N_2}{k_2})^{\theta_1}-\alpha_{21}(\frac{N_2}{k_2})]+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_2\frac{\partial N_2}{\partial \boldsymbol{x}_k})\end{cases}\tag{9.5-5}$$

若 $\alpha_{12}<1,\alpha_{21}<1$, 存在唯一正的平衡位置

$$0<N_1^*<k_1\qquad\qquad 0<N_2^*<k_2$$

若

$$(\frac{N_1^*}{k_1})^{\theta_1-1}(\frac{N_2^*}{k_2})^{\theta_2-1}>\alpha_{12}\alpha_{21}$$

则矩阵 P 是一个 M 矩阵,从而(9.5-5)式正的平衡位置 $N=N^*$ 在 R_+^2 内是全局渐近稳定的。

如取

$$\theta_1=1.6\qquad \alpha_{12}=0.5\qquad k_1=5$$
$$\theta_1=1.5\qquad \alpha_{21}=0.6\qquad k_2=10$$

则有 $N_1^*=3.899\qquad N_2^*=6.567$

因为 $(N_1^*/k_1)^{\theta_1-1}(\frac{N_2^*}{k_2})^{\theta_2-1}=0.698>0.3=\alpha_{12}\alpha_{21}$,则这正的平衡位置是在 R_+^2 内全局渐近稳定的。

用同样的方法，如果矩阵 P 的对角元素占优的条件减弱，则可得到下列局部渐近稳定定理。

定理 9.5.2 设 $\theta_i>0$，假设矩阵 $P=(p_{ij})_{m\times n}$ 是一个 M 矩阵，则(9.5-2)式的正的平衡位置 $N=N^*$ 在 R_+^m 内是渐近稳定的。

这里 $p_{ii}=\theta_i N_i^{*\,\theta_i-1}/k_i^{\theta_i}$，$p_{ij}=-\alpha_{ij}/k_j$，$j\neq i$，若 P 是一个 M 矩阵，则正的平衡位置 $N=N^*$ 是渐近稳定的。

证：因为 P 为 M 矩阵，故存在正定对角矩阵 $C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)$ 使得 $CP+P^TC$ 正定，构造平均 Ляпунов 函数(9.5-4)式，同理有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial n_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\mid_{\partial\Omega}=0$$

且 $\dfrac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}=\dfrac{N_i^*}{N_i^2}>0$，便有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\mid_{(9.5\text{-}3)}\leqslant&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\mid_{\partial\Omega}\\&-\int_\Omega\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}D_i\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&+\int_\Omega\sum_{i=1}^{m}C_i\Big[\frac{N_i^{*\,\theta_i}-N_i^{\theta_i}}{k_i^{\theta_i}}(N_i-N_i^*)\\&-\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i-N_i^*)(N_j-N_j^*)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\\leqslant&\int_\Omega\sum_{i=1}^{m}C_i\Big[\frac{N_i^{*\,\theta_i}-N_i^{\theta_i}}{k_i^{\theta_i}}(N_i-N_i^*)\\&-\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i-N_i^*)(N_j-N_j^*)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

然后进行 Taylor 展开

$$N^{*\,\theta_i}-N^{\theta_i}=-\theta_i^*N_i^{*\,\theta_i-1}(N_i-N_i^*)+0(\|N-N^*\|^2)$$

便有

$$\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\mid_{(9.5\text{-}3)}\leqslant=\int_\Omega\sum_{i=1}^{m}c_i\Big[-\frac{\theta_iN_i^{*\,\theta_i-1}}{k_i^{\theta_i}}(N_i-N_i^*)^2$$

$$+\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i-N_i^*)(N_j-N_i^*)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$+\int_\Omega 0(\|N-N^*\|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\Omega(N-N^*)^T$$

$$\cdot(CP+P^TC)(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$+\int_\Omega 0\|N-N^*\|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}<0$$

当 $N\neq N^*$ 　且 $\|N-N^*\|\ll 1$

这里 $\|\cdot\|$ 表矩阵的欧氏范数。$0\|N-N^*\|$ 表 $\|N-N^*\|$ 的高阶无穷小量。

因此,(9.5-3)式的正的平衡位置 $N=N^*$ 是渐近稳定的。

例 2　考虑例 1 所示的系统。

如果

$$(\frac{N_1^*}{k_1})^{\theta_i-1}(\frac{N_2^*}{k_2})^{\theta_i-1}>\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\theta_1\theta_2} \tag{9.5-6}$$

满足,则(9.5-5)式的正的平衡位置是渐近稳定的。

例如:取

$$\theta_1=0.12 \qquad \alpha_{12}=0.5 \qquad k_1=100$$

$$\theta_2=0.35 \qquad \alpha_{21}=0.6 \qquad k_2=5$$

则系统(9.5-5)式的正的平衡位置为

$$N_1^*=0.35 \qquad N_2^*=4.97$$

因为 $(\frac{N_1^*}{k_1})^{\theta_i-1}(\frac{N_2^*}{k_2})^{\theta_i-1}=145.52>7.14=\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\theta_1\theta_2}$,则这个平衡位置是渐近稳定的。

定义 9.5.2　一个区域 $U\in R_+^m$ 被称为正平衡位置 $N=N^*$ 的一个吸引区域,若对每个 $N_0\in U$, (9.5-3)式所确定的解 $N(t,t_0,N_0)\rightarrow N^*$。

根据定理 9.5.2 我们可分别就 $\theta\geqslant 1$ 和 $0<\theta<1$ 得到(9.5-3)式的平衡位置 $N=N^*$ 的吸引区域。

定理9.5.3 设 $\theta_i \geqslant 1$ 且存在正常数 $\hat{N}_i \in (0, N_i^*]$ $(i=1, 2, \cdots, m)$,使得矩阵 $\hat{P}=(\hat{p}_{ij})$ 是一个 M 矩阵,这里 $\hat{p}_{ij}=\theta_i \hat{N}^{\theta_i-1}/k\theta_{i_i}$,$p_{ij}=-\alpha_{ij}/k_j$,$j \neq i$,则(9.5-3)式的正的平衡位置 $N=N^*$ 是渐近稳定的,且吸收区域为

$$\hat{S}^m = \{N \in R^m \mid 0 < \hat{N}_i < N_i < \infty \quad i = 1,2,\cdots,m\}$$

证:如同定理9.5.2的类似的计算便有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}3)} \leqslant & \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}D_i \\
& \cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}c_i\Big[\frac{N_i^{*\theta_i} - N_i^{\theta_i}}{k_i^{\theta_i}}(N_i - N_i^*) \\
& - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\leqslant & \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}c_i\Big[\frac{(N_i^{*\theta_i} - N_i^{\theta_i})}{k_i^{\theta_i}}(N_i - N_i^*) \\
& - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
= & \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\Big(-c_i\frac{\theta_i\xi_i^{*\theta_i-1}}{k_i^{\theta_i}}(N_j - N_j^*)^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{k_j} \\
& \cdot(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*)\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& + \int_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{m} - c_i\Big(\frac{\theta_i\hat{N}_i^{*\theta_i-1}}{k_i^{\theta_i}}(N_i - N_i^*)^2 \\
& + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{k_j}(N_i - N_i^*)(N_j - N_j^*)\Big)\Big]\mathrm{d}x \\
= & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(N - N^*)^T(C\hat{P} + \hat{P}^T C) \\
& \cdot(N - N^*)\mathrm{d}x < 0 \quad \text{当 } N \neq N^*, N \in \hat{S}^m
\end{aligned}$$

且 ξ_i 是介于 N_i 和 N_i^* 之间的数,这里用到了中值定理,因此,当

$N_0 \in \hat{S}^m$就有$\lim\limits_{t\to\infty} N(t,\boldsymbol{x},N_0)=N^*$。

定理9.5.4 设$0<\theta_i<1$，存在正数$\hat{N}_i>N_i^*$ $(i=1,2,\cdots,m)$，使得矩阵$\hat{Q}(\hat{q}_{ij_{m\times m}})$是一个$M$矩阵，则(9.5-3)式的正的平衡位置$N=N^*$是渐近稳定的，吸收区域为

$$\hat{S}^m \overset{\text{def}}{=} \{N\in R^m,\ 0<N_i<N_i^*<\hat{N}_i \qquad i=1,2,\cdots,m\}$$

这里 $\hat{q}_{ii}=\theta_i\hat{N}_i^{\theta_i-1}/k_i^{\theta_i}$ $\qquad \hat{q}_{ij}=-\alpha_{ij}/k_j$

证明方法是类似于定理9.5.3，故略。

下面考虑更一般的具有扩散的Gilpin－Ayala生态竞争模型

$$\frac{\partial N_i}{\partial t}=r_iN_i(1-\sum_{j=1}^{m}{}_{ij}N_j^{\theta_j})+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}) \quad (9.5\text{-}7)$$

这里 $r_i\,\beta_{ij}$和θ_j 是非负常数。

再用边界条件

$$\frac{\partial N_i}{\partial \hat{n}}=0 \quad , \qquad 当\ t>0 \quad , \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega$$

设$N^*=(N_1^*,\cdots,N_m^*)^T$是

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}N_j^{\theta_j}=1$$

的正数解，即N^*是(9.5-7)式的正的平衡位置。

定理9.5.5 设$\theta_i\geqslant 1$，$B=(\beta_{ij})_{m\times m}$，如果存在一个正定对角矩阵$C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)$使得

$$CB+B^TC$$

是正定的，则(9.5-7)式的平衡位置$N=N^*$在R_+^m内是全局稳定的。

证：改写(9.5-7)式为

$$\frac{\partial N_i}{\partial t}=r_iN_i\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}(N_j^{*\theta_j}-N_j^{\theta_j})+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_i)\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}$$

构造平均Ляпунов函数

$$W(N)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{r_i}(\frac{N_i^{\theta_i}}{\theta_i}-\frac{N_i^{*\theta_i}}{\theta_i}-N_i^{*\theta}\ln(\frac{N_i}{N_i^*}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

就能得到

$$\frac{\mathrm{d}W(N)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.5\text{-}7)} \leqslant -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(N-N^*)^T(CB+B^TC)$$

$$(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big|_{\partial\Omega}$$

$$-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}D_i\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(N-N^*)^T$$

$$\cdot(CB+B^TC)(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} < 0 \quad \text{当 } N\neq N^*$$

因此,N^* 在 R^m_+ 内是全局稳定的。

§6 具有扩散的生态系统的持久性与共存性

从生态平衡的角度上讲,研究一个生态系统的持久性(permance)与共存性(persitence),比研究某一个平衡位置的稳定性与吸引性更有实际意义,也更重要。70 年代,人们开始研究生态 稳定性,从 80 年代起,则重点研究生态系统的持久性与共存性,但集中在由常微分方程描述的生态系统。作为生态系统,扩散是不可避免的,例如移民,动物种群的迁移等等。

本节研究一般具有扩散的时变的生态系统的持久性与共存性。

考虑下列具有扩散的时变非线性生态系统的初边值问题:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big) + N_i f_i(t,N) \qquad i=1,\cdots,l \tag{9.6-1a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{col}\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_1},\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_2},\cdots,\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_m}\Big) = 0 \qquad t\geqslant 0 \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega$$

$$i=1,\cdots,l \tag{9.6-1b}$$

$$N(\boldsymbol{x},0) = N_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{在 } \Omega \text{ 上} \tag{9.6-1c}$$

$$N = \mathrm{col}(N_1,\cdots,N_l)$$

$$\boldsymbol{f}(t,N) = \mathrm{col}(f_1(t,N),\cdots,f_l(t,N)) \in C[I\times R^l, R^l]$$

$\Omega \in R^m$ 为紧集，测度大于 0、D_i、f 充分光滑。以下定义中恒设 $N_0(x)>0$，(9.6.1)表示(9.6-1a)∪(9.6-1b)∪(9.6-1c)。

定义 9.6.1 若(9.6-1a)∪(9.6-1b)∪(9.6-1c)的每个解对 $x\in\Omega$ 一致地成立 $\varliminf_{t\to\infty} N(t,x)>0$[$\varliminf_{t\to\infty} N_i(t,x)>0, i=1,\cdots,r<l$]，则称(9.6-1)是共存的(Persistent)[部分变元 $N_i(i=1,\cdots,r)$共存的]。

定义 9.6.2 若存在紧集 $K_l \subset R_+^l \stackrel{\text{def}}{=} \{N:|N_i>0 \quad i=1,2,\cdots,l\} \subset R_+^r \stackrel{\text{def}}{=} \{N|N_i>0 \quad i=1,2,\cdots,r\}$ 和 $T>0$，使得每个解有 $N(t,0,N_0)\subset K_l$，当 $t\geqslant T$，关于 $x\in\Omega$ 一致成立[$N_i(t,0,N_0)\subset Kr \quad i=1,\cdots,r$，当 $t\geqslant T$，关于 $x\in\Omega$ 一致地成立]，则称(9.6-1)式为持久的[关于部分变元 N_i，$i=1,2,\cdots,r$ 为持久的]。

首先考虑(9.6-1)式的特殊系统，Lotka－Volterra 系统

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = N_i(b_i + \sum_{j=1}^{l} a_{ij}N_j) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}(D_i \frac{\partial N_i}{\partial x_k}) \qquad i = 1,2,\cdots,l \tag{9.6-2a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \hat{n}} = 0 \qquad t>0 \qquad x\in\Omega \tag{9.6-2b}$$

设

$$b_i + \sum_{j=1}^{l} a_{ij}N_i = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,l \tag{9.6-3}$$

有唯一正解。

$N^* = (N_1^*,\cdots,N_l^*)$，即 $N_i^* > 0 \qquad i = 1,2,\cdots,l$

现在考虑(9.6-2)式的扰动系统

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = N_i(b_i + \sum_{j=1}^{l} a_{ij}N_i + \xi_i(t) + \sum_{j=1}^{l}\eta_{ij}(t)N_j) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}(D_i \frac{\partial N_i}{\partial x_k}) \qquad i = 1,2,\cdots,l \tag{9.6-4a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \hat{n}} = 0 \quad x \in \Omega, t > 0 \quad i = 1,2,\cdots,l \tag{9.6-4b}$$

定理9.6.1 设下列条件成立。

1) $D_i(t,x)\geqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,m$

2)扰动适当地小,满足

$$\left| \xi_i(t) + \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(t) N_j^* \right| \leqslant k_i = \text{const} \qquad i = 1,2,\cdots,l$$

3)存在常数对角矩阵

$$C = \text{diag}(c_1,\cdots,c_l) \qquad \text{使得}$$

$$\frac{1}{2} N^T (CA + C\eta(t) + A^T C + \eta^T(t) C) N \leqslant - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i N_i^2 \tag{9.6-5}$$

这里 $\lambda_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,l)$是常数

$$A = (a_{ij})_{l\times l} \qquad \text{且} \qquad \eta(t) = (\eta_{ij}(t))_{l\times l}$$

$$\xi(t) = \text{col}(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))$$

4) 集合 $K_l \overset{\text{def}}{=} \{N \mid \sum_{j=1}^{l} \lambda_i [\mid N_i - N_i^* \mid - \frac{C_i k_i}{2\lambda_i}] \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2\lambda_i (\frac{C_i k_i}{2\lambda_i})^2$ 满足 $K_l \subset R_+^l$,则(9.6-2) 式是持久的。

证:改写(9.6-4a)式为

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = N_i [\sum_{j=1}^{l} a_{ij}(N_i - N_i^*) + \xi_i(t) + \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(t) N_j^* + \sum_{j=1}^{l} \eta_{ij}(t) (N_j - N_j^*)] + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k} (D_i \frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}) \qquad i = 1,2,\cdots,l \tag{9.6-6}$$

对(9.6-6)作平均 Ляпунов 函数

$$W(N) = \int_\Omega V(N) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot [N_i - N_i^* - N_i^* \ln \frac{N_i}{N_i^*}] \mathrm{d}x \tag{9.6-7}$$

显然 $W(N^*) = 0$, $W(N) > 0$,当 $N \neq N^*$,因为 Ω 的测度 MesΩ >0,则当

$$N_i \to 0^+ \text{或}\ N_i \to +\infty (\ i = 1,\cdots,l),\ \dot{W}(N) \to +\infty。$$

沿(9.6-6)式的解计算 $W(N)$的导数 $\dot{W}(N)$,便有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \Big|_{(9.6\text{-}6)} = \int_\Omega (\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t})_{(9.6\text{-}6)} \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial V}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\{[(N(t,x) - N^{*})^{T}(CA + C\eta(t) + A^{T}C$$

$$+ \eta^{T}(t)C)(N(t,x) - N^{*})]$$
$$+ [(N(t,x) - N^{*})^{T}$$
$$\cdot C(\xi(t) + \eta(t)N^{*})]\}dx$$
$$+ \int_{\Omega}\{\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}\sum_{k=1}^{n}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial x_k})\}dx$$
$$\leqslant \int_{\Omega}[-\sum_{j=1}^{l}\lambda_i(N_i(t,x) - N_i^{*})^2 + \sum_{j=1}^{l}c_i(\xi_i(t)$$
$$+ \sum_{j=1}^{l}\eta_{ij}(t)N_j^{*})(N_i(t) - N_j^{*})]dx$$
$$+ \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}(\frac{D_i\partial N_i}{\partial x_k})\mid_{\partial\Omega}$$
$$- \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2})(\frac{\partial N_i}{\partial x_k})^2 dx$$
$$\leqslant \int_{\Omega}[-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(N_i(t,x) - N_i^{*}) + \sum_{i=1}^{l}c_ik_i\mid N_i(t,x)$$
$$- N_i^{*}\mid]dx + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\frac{D_i\partial N_i}{\partial x_k}\mid_{\partial\Omega}$$
$$- \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2})(\frac{\partial N_i}{\partial x_k})^2 dx$$
$$\leqslant \int_{\Omega}[-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(N_i(t,x) - N_i^{*})$$
$$+ \sum_{i=1}^{l}c_ik_{iN_i}(t,x) - N_i^{*}]dx$$
$$\leqslant \int_{\Omega}[-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(\mid N_i(t,x) - N_i^{*}\mid - \frac{c_ik_i}{2\lambda_i})^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(\frac{C_ik_i}{2\lambda_i})^2]dx < 0$$

当$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i[\mid N_i(t,x) - N_i^{*}\mid - \frac{c_ik_i}{2\lambda_i}]^2$

$$> \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (\frac{c_i k_i}{2\lambda_i})^2 \stackrel{\text{def}}{=} L^2 \tag{9.6-8}$$

特别地，有

$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}|_{(9.6\text{-}6)}$在 $K \subset R^l_+$ 的余集 R^L_+/K 是负定的，现在令 K_ε 是 K 中点的所有 ε 领域的闭包，从而是紧集。

现证 $\forall N_0(0,x) \in R^l_+$，存在 $T(N_0(0,x))>0$，使得

$$N(t,0,N_0(0,x)) \subset K_\varepsilon \quad 当\ t \geqslant T(N_0(0,x)) \tag{9.6-9}$$

事实上，如果 $N(t,0,N_0(0,x))$仍停留在集合

$$S = (R^l_+ /K\varepsilon) \cap Q \stackrel{\text{def}}{=} \{N \mid W(N) = \int_\Omega V \mathrm{d}x = W(\hat{N})\}$$

显然，集合 S 是紧集。

令

$$-L = \inf_s \int_\Omega [-\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (|N_i(t,x) - N_i^*| - \frac{C_i k_i}{2\lambda_i})^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (\frac{C_i k_i}{2\lambda_i})^2] \mathrm{d}x$$

则 $\qquad -L<0$

这样，当 $t \to +\infty$

$0 \leqslant W(N(t,x)) \leqslant W(N(0,x)) - L(t-0) \to -\infty$

是不可能的，因此(9.6-9)式成立，定理 9.6.1 证毕。

定理9.6.2 假设定理 9.6.1 的条件 1)，2)成立。

3)存在正定对角矩阵 $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \cdots, c_l)$和常数 $\varepsilon>0$，使得矩阵

$$\frac{1}{2}[CA + C\eta(t) + A^T C + \eta^T(t) C] + \begin{pmatrix} \varepsilon I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{l\times l} \quad (0<r<1)$$

是半负定的，I_r 是 $r \times r$ 单位矩阵。

4)$K_r \stackrel{\text{def}}{=} \{N \in R^r_+ : \sum_{i=1}^{r} [|N_i - N_i^*| - \frac{C_i k_i}{2\varepsilon}]^2 \leqslant (\frac{C_i k_i}{2\varepsilon})^2\} \subset R^r_+$

则系统(9.6-6)式是关于部分变元持久的。

证：再次用平均 Ляпунов 泛函(9.6-7)式，且

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.6\text{-}6)} = & \frac{1}{2}\int_{\Omega}\{(N(t,\boldsymbol{x}) - N^*)^T(CA + C\eta(t) + A^TC \\
& + \eta^TC)(N(t,\boldsymbol{x}) - N^*) \\
& + [(N(t,\boldsymbol{x}) - N^*)^TC(\xi(t) \\
& + \eta(t)N^*)]\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& + \int_{\Omega}\{\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
= & \frac{1}{2}\int_{\Omega}(N(t,\boldsymbol{x}) - N^*)^T\{[CA + C\eta(t) + \\
& A^TC + \eta^T(t)C] + \begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}\}(N(t,\boldsymbol{x}) - N^*) \\
& - \int_{\Omega}(N(t,\boldsymbol{x})-N^*)^T\begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}(N(t,\boldsymbol{x})-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
& + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{r}c_i\xi_i(t) + \sum_{j=1}^{l}N_i^*\eta_{ij}(t)(N_i(t,\boldsymbol{x}) \\
& - N_i^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V}{\partial N_i}(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})\Big|_{\partial\Omega} \\
& - \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2})(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k})^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\leqslant & \int_{\Omega}\{-\sum_{j=1}^{r}\varepsilon(N_i(t,\boldsymbol{x}) - N_i^*)^2 \\
& + \sum_{i=1}^{r}c_ik_i\mid N_i(t,\boldsymbol{x}) - N_i^*\mid\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
\leqslant & \int_{\Omega}\{-\sum_{i=1}^{r}\varepsilon[\mid N_i(t,\boldsymbol{x}) - N_i^*\mid - \frac{c_ik_i}{2\varepsilon}]^2 + \\
& \varepsilon\sum_{i=1}^{r}(\frac{C_ik_i}{2\varepsilon})^2\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} < 0
\end{aligned}
$$

当 $\sum_{i=1}^{r}[\mid N_i(t,\boldsymbol{x}) - N_i^*\mid - \frac{c_ik_i}{2\varepsilon}]^2 > \sum_{i=1}^{r}(\frac{c_ik_i}{2\varepsilon})^2$ (9.6-10)

因此,$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\big|_{(9.6\text{-}6)}$在集合 R_+^r/K_r 内负定,这里 R_+^r/K_r 是K_r 在R^r 中的余集,类似于定理 9.6.1 的证明,可证分量 $N_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,N_r(t,\boldsymbol{x})$进入 K_r 的ε 领域k_ε,故系统(9.6-6)是关于 N_1,

$\cdots, N_r$ 是持久的。

正的平衡位置 $N=N^*$ 在 R^l_+ 内的全局渐近稳定性可视为一种特殊的持久性存在,因此,也不妨在此讨论。

定理 9.6.3 设存在矩阵 $C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_n)>0$,使得 $CA+A^TC$ 是负定的。

1) 若 $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,l)$,且至少有 $D_{i0}(t,\boldsymbol{x})>0$,则(9.6-6)式的正的平衡位置 $N=N^*$ 是在 R^r_+ 内全局渐近稳定的;

2) $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,l)$, 则 $N=N^*$ 是在 R^l_+ 内稳定的,且系统(9.6-6)是共存的。

证:仍用平均 Ляпунов 函数(9.6-7)式

1)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.6\text{-}6)} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{l}\Big\{\frac{\partial V}{\partial N_i}N_i(r_i+\sum_{j=1}^{l}a_{ij}N_j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\Big(\frac{D_i\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\Big\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (N-N^*)^T(CA+A^TC)(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\quad + \int_\Omega \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} \\
&\quad - \int_\Omega \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial V}{\partial N_i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i \\
&\quad \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} <0 \quad 当\ N\neq N^* \quad \exists D_{i_0}>0 & (9.6\text{-}11a) \\ \leqslant 0 \quad 对所有的\ D_i\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,l & (9.6\text{-}11b) \end{cases}$$

(9.6-11a)意味着结论 1)成立。

2)因为 $W(N)>0$,当 $N\neq N^*$, 且 $W(N^*)=0$, 故存在 $\varphi(\|N-N^*\|)\in K$,使得

$$W(N)\geqslant\varphi(\|N-N^*\|) \tag{9.6-12}$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $0<\delta\ll1$, 使得 $\|\hat{N}-N^*\|<\delta$ 蕴涵 $W(\hat{N})\leqslant\varphi(\varepsilon)$, 于是有

$$\varphi(\|N-N^*\|)\leqslant W(N(t,0,\hat{N}))\leqslant W(\hat{N})\leqslant\varphi(\varepsilon) \tag{9.6-13}$$

因此 $\|N(t,\boldsymbol{x})-N^*\|<\varepsilon$, 即(9.6-6)式的平衡位置 N^* 是稳定的。

若系统(9.6-6)式不是共存的,则存在 $\{t_n\}$, $t_n\to\infty$,使得对某些 i_0 成立

$$\lim_{t\to+\infty}N_{i_0}(t_n,0,\boldsymbol{x}\hat{u})=0 \tag{9.6-14}$$

对 $\boldsymbol{x}$ 一致成立,于是,一方面

对所有 $t\geqslant0$,有 $W(N(t,\boldsymbol{x},\hat{u})\leqslant W(\hat{u})\overset{\text{def}}{=}M<+\infty$ (9.6-15)

但另一方面对于$\dfrac{2M}{\text{Mes}\Omega}$有

$$W(N(t_n))\geqslant\frac{2M}{\text{Mes}\Omega}\cdot\text{Mes}\Omega=2M>M \tag{9.6-16}$$

显然,(9.6-15)与(9.6-16)是矛盾的,故系统(9.6-6)是共存的,定理 9.6.3 证毕。

定理 9.6.4 设 $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant0(i=1,2,\cdots,l)$,且存在矩阵 $C=\text{diag}(c_1,\cdots,c_l)>0$ 和常数 ε 使得

$$CA+A^TC+\begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}\leqslant0 \tag{9.6-17}$$

则(9.6-6)式的正平衡位置 N^* 是关于部分变元 $N_1,\cdots,N_r$ 为渐近稳定的,关于部分变元 $N_{r+1},\cdots,N_l$ 是稳定的,系统(9.6-6)式关于 $N_{r+1},\cdots,N_l$ 是共存的。

证:选取 Ляпунов 函数(9.6-7),则有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9.6\text{-}6)}=\frac{1}{2}\int_\Omega(N-N^*)(CA+A^TC)(N-N^*)^T\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Omega}\Big[\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\Big]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(N-N^*)\Big(CA+A^{T}C+\begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}\Big)\\
&\quad\cdot(N-N^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\varepsilon\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{r}|N_i-N_i^*|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial N_i}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\Big|_{\partial\Omega}\\
&\quad-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}D_i\Big(\sum\frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)^2\mathrm{d}x\\
&\quad-\varepsilon\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{r}|N_i(t,\boldsymbol{x})-N_i^*|^2\mathrm{d}x\\
&<0\quad \text{当 } N_i\neq N_j^*\qquad i\in[1,\cdots,r]
\end{aligned}
$$

故 N^* 是关于 $N_1,\cdots,N_r$ 为渐近稳定。

令 $\|N-N^*\|_{l-r}=\|N_{r+1}-N_{r+1}^*,\cdots,N_l-N_l^*\|$

由(9.6-12)、(9.6-13)式有

$$W(N)\geqslant\varphi(\|N-N^*\|)\geqslant\varphi(\|N-N^*\|)_{l-r}$$

且 $\varphi(\|N-N^*\|)_{l-r}\leqslant\varphi(\|N-N^*\|)_{l-r}$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant W(N(t,0,\hat{N}))\\
&\leqslant W(\hat{N})\leqslant\varphi(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

进而　有　$(\|N-N^*\|)_{l-r}<\varepsilon$

即 N^* 关于 $N_{r+1},\cdots,N_l$ 稳定，其持久性的证明是类似于定理9.6.3，略。

下面考虑更一般的具有扩散的生态系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial N_i}{\partial t}=N_if_i(N_1,\cdots,N_l)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big(D_i\frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\Big)\qquad i=1,\cdots l & (9.6\text{-}18a)\\
\dfrac{\partial N_i}{\partial \hat{n}}=0\quad \text{当 } t>0\ \ \boldsymbol{x}\in\Omega & (9.6\text{-}18b)\\
N(0,\boldsymbol{x})=N_0(\boldsymbol{x})\quad \text{在 } \Omega \text{ 上} & (9.6\text{-}18c)
\end{cases}
$$

$\Omega\subset R^n$ 集,$\mathrm{Mes}\Omega>0$,设存在唯一的 $N^*=(N_1^*,\cdots,N_l^*)>0$,使得 $f_i(N_1^*,\cdots,N_l^*)=0$

并考虑(9.6-18a)的扰动系统,有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_i}{\partial t} = N_i f_i(N_1,\cdots,N_l) + u_i(t)N_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left(D_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right) \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \hat{n}} = 0 \quad t>0 \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases} \tag{9.6-19}$$

这里 $u_i(t)$满足$|u_i(t)|\leqslant k_i=\mathrm{const}\quad i=1,2,\cdots n$

仿照定理9.6.1～定理9.6.4,可以证明以下定理。

定理9.6.5 假设:

1)存在常数矩阵$(g_{ij})_{l\times l}$使得

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i}\leqslant g_{ii}<0 \qquad i=1,2,\cdots,l$$

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial N_j}\right|\leqslant g_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,l \quad i\neq j$$

2)存在正定常数矩阵 $C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_l)$使得

$$CG+G^{\mathrm{T}}C\leqslant 0$$

则 $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$,且至少有一个 $D_{i_0}(t,\boldsymbol{x})>0$,蕴涵(9.6-18)式的平衡位置 N^*是在 R_+^l 内全局稳定的。

$D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0(i=1,2,\cdots,l)$,蕴涵 N^*是稳定的,且(9.6-18a)是共存的。

定理9.6.6 设定理9.6.5的条件1)成立。

2) $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0(i=1,2,\cdots,l)$,且存在矩阵 $C=\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_l)>0$ 及常数 $\varepsilon>0$,使得

$$CA+A^{\mathrm{T}}C+\begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}\leqslant 0$$

则(9.6-18a)的正的平衡位置 $N=N^*$关于 $N_1,\cdots,N_r$ 在R_+^l内是渐近稳定的,关于 $N_{r+1},\cdots,N_l$ 是在 R_+^l 内稳定的,系统(9.6-18a)是共存的。

定理 9.6.7 假设

1) $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,l$

2) $|u_i(t)|\leqslant k_i=\text{const} \qquad i=1,2,\cdots,l$

3)存在常数矩阵 $C=\text{diag}(c_1,\cdots,c_l)>0$,使得

$$\frac{1}{2}N^T(CG+G^TC)N\leqslant -\sum_{i=1}^{l}\lambda_i N_i^2$$

4) 集合 $\hat{\Omega}_l=\left\{N:\sum_{i=1}^{l}\lambda_i[\,|N_i-N_i^*|-\frac{C_ik_i}{2\lambda_i}]^2\leqslant\sum_{i=1}^{l}2\lambda_i(\frac{C_ik_i}{2\lambda_i})^2\right\}$

在 R_+^l,即 $\hat{\Omega}_l\subset R_+^l$,则系统(9.6-19)是持久的。

定理 9.6.8 设

1) $D_i(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots,l$

2) $|\boldsymbol{u}_i(t)|\leqslant k_i=\text{const} \qquad i=1,2,\cdots,l$

3)存在 $C=\text{diag}(c_1,\cdots,c_l)$ 和 $\varepsilon>0$,使得 $CA+G^TC+\begin{pmatrix}\varepsilon I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{l\times l}$ $(0<r<l)$半负定。

4) $\Omega_r\overset{\text{def}}{=}\{N:\sum_{i=1}^{r}[\,|N_i-N_i^*|-\frac{k_i}{2\varepsilon}]^2]\leqslant\sum_{i=1}^{r}2(\frac{c_ik_i}{2\varepsilon})^2$

在 Ω_+^r 内,则系统(9.6-19)关于 $N_1,\cdots,N_r$ 是持久的。

这些定理的证明留给读者作为练习,此略。

§7 一类偏泛函微分方程[182]

泛函微分方程与偏微分方程的互相渗透而自然产生的偏泛函微分方程是20世纪60年代开始研究,到70年代才逐渐活跃起来,至今已形成一个重要的分支。

这里,介绍一些较近期的稳定性结果[182]。

考虑下列偏泛函微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_j}\right)u+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}u+c(\boldsymbol{x})u$$

$$+ f\left(t, u, u(t-\tau, x) \frac{\partial u(t-\tau, x)}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial u(t-\tau, x)}{\partial x_n}\right) \tag{9.7-1a}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \qquad t \geqslant 0 \tag{9.7-1b}$$

$$u = \varphi(t, x) \quad t \in [-\tau, 0] \quad x \in \bar{\Omega} \tag{9.7-1c}$$

的稳定性,这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $f(x, 0 \cdots 0) \equiv 0$。

人们把含有时滞的偏微分方程称为偏泛函微分方程,而偏泛函微分方程又可化为 Banach 空间上的泛函微分方程。

令 X 为一实的 Banach 空间, $C = C([-r, 0], X)$,对于 $\varphi \in C$,记 $\|\varphi\|_C = \sup\limits_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} \|\varphi\|_X$,在 X 上考虑下列初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{u} + f(t, \boldsymbol{u}_t) \qquad t \geqslant 0 \tag{9.7-2a}$$

$$\boldsymbol{u}_0 = \varphi \tag{9.7-2b}$$

其中 $A: X \to X$ 是线性算子, $f: I \times C \to X$ 是连续映射, $u_t \overset{\mathrm{def}}{=} u(t + \theta)$, $-r \leqslant \theta \leqslant 0$。

(9.7-2a)∪(9.7-2b)是偏泛微分方程的基本形式,由于它是一种抽象形式,也称为抽象泛函微分方程。

定理 9.7.1 假设下列条件成立。

1) 线性算子 A 是 X 上的一个强连续半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。

2) $f \in C[R_+ \times C, X]$, $f(t, 0) \equiv 0$, 满足局部 Lipschitz 条件

$$\|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)\|_X \leqslant L(t, \|\varphi_1\|_C \|\varphi_2\|_C) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

这里 $L(t, y_1, y_2)$ 是关于 $t \in R^+$, $y_1, y_2 \in R^+$ 连续的,关于 y_1, y_2 单调不减的。

3) $\|T(t)\| \leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t} \quad K > 0 \quad \omega > 0$

4) 存在函数 $G \in C[R_+ \times R_+, R_+]$,它关于第二个变量单调不减,且

$$\|f(t, \varphi)\|_X \leqslant G(t, \|\varphi\|_C) \qquad (t, \varphi) \in R^+ \times C$$

5) 存在 $g \in C([-r, \infty) \times R^+, R^+)$, 使对每个 $p \geqslant 0$, $g(t) = g(t, p)$满足

$$\begin{cases} g(t) \geqslant Kpe^{-\omega t} + \int_0^t Ke^{-\omega(t-s)} G(s, g_s) \mathrm{d}s & t \geqslant 0 \\ g(t) \geqslant Kp & t \in [-r, 0] \quad K \geqslant 1 \end{cases}$$

这里 $g_t = \sup\limits_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} g(t+\theta)$

则 1) (9.7-2a)∪(9.7-2b) 有唯一的全局温和解[下面有定义]

$$u(t, \varphi): [-r, \infty) \to \boldsymbol{x}, \text{且下列不等式成立}$$

$$\| u(t, \varphi) \|_{\boldsymbol{X}} \leqslant \| g(t, \| \varphi \|_C) \qquad t \in [-r, \infty)$$

2)若$\lim\limits_{p \to 0} \sup\limits_{t \geqslant 0} g(t, p) = 0$,则(9.7-2)的平凡解稳定,进而若$\lim\limits_{t \to \infty} g(t, p) = 0$,当$0 < p \ll 1$,则(9.7-2)的平凡解渐近稳定。

证:改写 (9.7-2a)∪(9.7-2b)为下列积分方程

$$\begin{cases} u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, u_s) \mathrm{d}s & t \geqslant 0 \\ u(t) = \varphi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{9.7-3}$$

(9.7-3)式的连续解称为(9.7-2a)∪(9.7-2b) 的温和解。因为(9.7-2a)∪(9.7-2b)与(9.7-3)是不等价的,(9.7-3)式的解的解一般不满足 (9.7-2a)∪(9.7-2b),但(9.7-2a)∪(9.7-2b) 的解必满足(9.7-3) 式。

下面建立(9.7-3)式的迭代求解过程。

选择 $u^{(0)} \in (C[-r, \infty], \boldsymbol{X})$, 使得

$\| u_t^{(0)} \|_C \leqslant g_t \qquad t \geqslant 0 \qquad$ 这里 g_t 表示 $g(t, \| \varphi \|_c)$

例如,选取 $u^{(0)} = \varphi(t)$, $\; -r \leqslant t \leqslant 0, u^{(0)}(t) = T(t)\varphi(0)$, $t \geqslant 0$ 显然

$\| u^{(0)}(t) \|_{\boldsymbol{X}} \leqslant g_t \in [-r, \infty) \qquad$ 故 $\| u_t^{(0)} \|_c \leqslant g_t$

设

$$\begin{cases} u^{(1)}(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, u_s^{(0)}) \mathrm{d}s & t \geqslant 0 \\ u^{(1)}(t) = \varphi(t) & t \in [-r, 0] \end{cases} \tag{9.7-4}$$

一般地,定义 k 次迭代如

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(k)}(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s) f(s, u_s^{(k-1)})\mathrm{d}s & t \geqslant 0 \\ u^{(k)}(t) = \varphi(t) \quad t \in [-r, 0] & k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{9.7-5}$$

从(9.7-4)有

$$\begin{aligned} \| u^{(k)} \|_X &\leqslant K \| \varphi(0) \|_X \mathrm{e}^{-\omega t} + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} \| f(s, u_s^{(0)}) \|_X \mathrm{d}s \\ &\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t} \| \varphi \|_C + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} G(s, \| u_s^{(0)} \|_c)\mathrm{d}s \\ &\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t} \| \varphi \|_C + \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} G(s, g_s)\mathrm{d}s \leqslant g(t) \\ &\qquad t \in [-r, 0] \end{aligned}$$

故有 $\| u^{(1)}(t) \|_X \leqslant \| \varphi \|_C \leqslant K \| \varphi \|_C$

因此,得到

$$\| u^{(1)}(t) \|_X \leqslant g(t) \qquad t \in [-r, \infty) \text{ 或 } \| u_t^{(1)} \|_c \leqslant g_t \quad t \geqslant 0$$

用数学归纳法,能证明对任意自然数有估计式

$$\begin{aligned} &\| u^{(k)}(t) \|_X \leqslant g(t) \qquad t \in [-r, \infty) \text{ 或} \\ &\| u_t^{(k)} \|_C \leqslant g_t \qquad t \geqslant 0, k = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{9.7-6}$$

现在证对任何固定的 $\tilde{T} > 0$,序列$\{u^{(k)}(t)\}$是在$[0, \tilde{T}]$上一致收敛的,$\forall t \in [0, \hat{T}]$ 易知有

$$\begin{aligned} \| u^{(1)}(t) - u^{(0)}(t) \|_X &\leqslant \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, \| u_s^{(0)} \|_C \| u_s^{(0)} \|_C)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, g_s, g_s) g_s \mathrm{d}s \end{aligned}$$

注意 g 和 L 是连续的,设

$$g_t \leqslant N, \; KL(t, g_t, g_t) \leqslant M$$

故有

$$\| u^{(1)} - u^{(0)} \|_X \leqslant MNt$$

显然

$$\| u_t^{(1)} - u_t^{(0)} \| \leqslant MNt$$

用归纳法易证对任意自然数

$$\| u^{(k)} - u^{(k-1)} \|_X \leqslant N \frac{(M\widetilde{T})^k}{k!} \qquad t \in [0, \widetilde{T}]$$

$$\| u_t^{(k)} - u_k^{(k-1)} \|_C \leqslant N \frac{(M\widetilde{T})^k}{k!} \qquad t \in [0, \widetilde{T}]$$

(9.7-7)

因此$\lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)}(t)$在$[0, \hat{T}]$上一致收敛。

令 $\lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)}(t) = u(t)$ 则 $u(t)$在$[0, \hat{T}]$ 上连续。

注意到

$$\| u(t) - T(t)\varphi(0) - \int_0^t T(t-s) f(s, u_s) \mathrm{d}s \|_X$$

$$\leqslant \| u(t) - u^{(k+1)}(t) \|_X + \| \int_0^t (T(t-s) f(s, u_s)$$

$$- f(s, u_s^{(k)})) \mathrm{d}s \|_X \leqslant N(1 + Mt) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{M^n t^n}{n!}$$

即 $u(t)$是(9.7-1a)$\cup$(9.7-1b)的温和解。

现证唯一性,设 $V(t)$是(9.7-3)式的另一个连续解 $\| V_t \|_{c(t)} \leqslant g_t$,这就推出

$$\|(u - v)\|_X \leqslant \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, \|u_s\|_C \|v_s\|_C) \|u_s - v_s\|_C \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_0^t K\mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, g_s, g_s) \| u_s - v_s \|_C \mathrm{d}s$$

$$\leqslant M \int_0^t \| u_s - v_s \|_C \mathrm{d}s$$

这样,得到

$$\| u_t - v_t \|_C \leqslant M \int_0^t \| u_s - v_s \|_C \mathrm{d}s$$

用 Gronwall - Bellman 不等式可得 $u(t) \equiv V(t)$,故唯一性获证。

于是从估计式

$$\| u(t, \varphi) \|_X \leqslant g(t, \| \varphi \|_C) \qquad t \in [-r, \infty]$$

可得下列结论。

若$\lim\limits_{P\to 0} \sup\limits_{t\geqslant 0} g(t, p) = 0$ 则(9.7-1a)的平凡解稳定。

若$\lim\limits_{t\to\infty} g(t,p)=0$　当$0<p\ll 1$,则(9.7-1)的平凡解渐近稳定。

为应用方便,对于分数幂空间,建立类似于定理 9.7.1 的定理。

定理 9.7.2　假设下列条件成立:

1)A 是X 空间上的解析半群 $T(t)$的无穷小生元,对每一个t,$T(t)$是紧的。

2)$\|T(t)\| \leqslant Ke^{-wt}, K>0, \omega>0, t\geqslant 0$

设 $c_\alpha = C([-r,0], X_\alpha)$, $\varphi\in c_\alpha$,记 $\|\varphi\|_{C_\alpha} \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{s\in[-r,0]} \|A^\alpha\varphi(0)\|_X$

3)$f\in[R_+\times C_\alpha, X]$, $f(t,0)\equiv 0$,关于 φ 满足局部 Lipschitz 条件,即

$\|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)\|_X \leqslant L(t, \|\varphi_1\|_{C_\alpha}, \|\varphi_2\|_{C_\alpha})\|\varphi_1-\varphi_2\|_{C_\alpha}$

这里 $L\in C[R_+\times R_+\times R_+, R_+]$是关于第二个,第三个变元是单调不减的。

4)存在 $G\in C[R^+\times R^+, R^+]$它是关于第二个变元单调不减,满足

$$\|f(t,\varphi)\|_X \leqslant G(t, \|\varphi\|_{C_\alpha})$$

5)存在 $g\in C[-r,\infty)\times R_+, R_+]$使得对每个 $p\geqslant 0$,$g(t) \overset{\text{def}}{=} g(t,p)$满足

$$\begin{cases} g(t)\geqslant Ke^{-wt}\|\varphi\|_{C_\alpha} \\ \qquad\qquad + \int_0^t K(t-s)^{-\alpha}e^{-\omega(t-s)}G(s,g_s)\mathrm{d}s \quad t\geqslant 0 \\ g_t\geqslant K\|\varphi\|_{C_\alpha} \qquad\qquad\qquad t\in[-r,0] \end{cases}$$

则(9.7-1a)∪(9.7-2b)有唯一的全局温和解 $u(t,\varphi)$满足

$$\|u(t,\varphi)\|_\alpha \leqslant g(t, \|\varphi\|_{C_\alpha}) \qquad t\in[-r,\infty]$$

若$\lim\limits_{P\to 0}\sup\limits_{t\geqslant 0} g(t,p)=0$　则(9.7-1a)的平凡解稳定。

若$\lim\limits_{t\to\infty} g(t,p)=0$,对于$0<p\ll 1$,则(9.7-1$a$)的平凡解渐近

稳定。

证:应用不动点定理,先定义集合

$$S=\{u\,|\,u\in C([-r,\infty),\boldsymbol{X}_\alpha)\ ,u_0=\varphi\ \|u_t\|_{C_\alpha}\leqslant g_t,t\geqslant 0\}$$

在 S 上定义映射 F

$$\begin{cases}(Fu)(t)=T(t)\varphi(0)+\int_0^t T(t-s)f(s,u_s)\mathrm{d}s & t\geqslant 0\\(Fu)(t)=\varphi(t) & t\in[-r,0]\end{cases}\tag{9.7-8}$$

1)从(9.7-8)式关于 $t\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\|(Fu)(t)\|_\alpha &\leqslant \|T(t)\|\ \|\varphi(0)\|_{X_\alpha}+\left\|\int_0^t A^\alpha T(t-s)\right.\\&\quad\left.\cdot f(s,u_s)\mathrm{d}s\right\|_X\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t}\|\varphi\|_{C_\alpha}\\&\quad+\int_0^t K(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}\|f(s,u_s)\|_X\mathrm{d}s\\&\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t}\|\varphi\|_{C_\alpha}\\&\quad+\int_0^t K(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}G(s,\|u_s\|_{C_\alpha})\mathrm{d}s\\&\leqslant K\mathrm{e}^{-\omega t}\|\varphi\|C_\alpha\\&\quad+\int_0^t K(t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega(t-s)}G(s,g_s)\mathrm{d}s\\&\leqslant g(t)\qquad\qquad t\in[-r,0]\end{aligned}$$

于是有

$$\|(Fa)(t)\|_\alpha\leqslant\|\varphi\|_\alpha\leqslant\|\varphi\|_{C_\alpha}\leqslant K\|\varphi\|_{C_\alpha}\leqslant g$$

从而

$$\|(Fu)(t)\|_\alpha\leqslant g(t,\|\varphi\|_{C_\alpha})\qquad t\in[-r,\infty]$$

它就推出

$$\|(Fu)_t\|_{C_\alpha}\leqslant g_t\qquad t\geqslant 0$$

这样 $\qquad F:S\rightarrow S$

2) 对于 $0\leqslant t_1<t_2$,从(9.7-8)式便有

$$\|(Fu)(t_1)-(Fu)(t_2)\|_\alpha\leqslant\|T(t_1)-(t_2)\|\ \|\varphi\|_{C_\alpha}$$

$$+ \left\| \int_0^{t_1} A^\alpha T(t_1 - s) f(s, u_s) ds \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_2} A^\alpha T(t_2 - s) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$\leqslant \| T(t_1) - T(t_2) \| \| \varphi \|_{C_\alpha} + \left\| \int_0^{t_1} A^\alpha (T(t_1 - s) \right.$$

$$\left. - T(t_2 - s)) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$+ \left\| \int_{t_1}^{t_2} A^\alpha T(t_2 - s) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$\leqslant \| T(t_1) - T(t_2) \| \| \varphi \|_{C_\alpha} + \| T(\varepsilon) - T(t_2 - t_1 + \varepsilon) \|$$

$$\times \left\| \int_0^{t_1 - \varepsilon} A^\alpha T(t_1 - s - \varepsilon) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$+ \left\| \int_{t_1 - \varepsilon}^{t_1} A^\alpha (T(t_1 - s) - T(t_2 - s)) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$+ KM_s \int_0^{t_2 - t_1} s^{-\alpha} e^{-\omega s} ds$$

$$\leqslant \| T(t_1) - T(t_2) \| \| \varphi \|_{C_\alpha} + \| T(\varepsilon) - T(t_2 - t_1 + \varepsilon) \|$$

$$\cdot KM_f \int_0^{t_1 - \varepsilon} s^{-\alpha} e^{-\varepsilon s} ds KM_f \left[\int_0^{\varepsilon} s^{-\alpha} e^{-\tau s} ds \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_2 - t_1 + \varepsilon} s^{-\alpha} e^{-\varepsilon s} ds \right] + 2KM_f \int_0^{t_2 - t_1} s^{-\alpha} e^{-\varepsilon s} ds$$

对于任何固定的 $\tilde{T} > 0$，从 $T(t)$ 的紧性可知：$(Fu)(t)$ 是在 $[0, \hat{T}]$ 内等度连续的，故集合 $\{(Fu)(t), u \in s\}$ 是等度连续的。

3) $\overline{FS}$ 是紧的，为此目的，仅需证明对固定的 $t \in [-r, \hat{T}]$，$\{(Fu)(t), u \in s\}$ ，是相对紧的，注意对于 $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$，当 $t \in [0, \hat{T}]$ 时推得

$$\| A^\beta (Fu)(t) \|_X \leqslant \| T(t) \| \| \varphi \|_{C_\beta}$$

$$+ \left\| \int_0^t A^\beta T(t - s) f(s, u_s) ds \right\|_X$$

$$\leqslant K e^{-\omega t} \| \varphi \|_{C_\beta} + KM_f \int_0^t e^{-\omega s} s^{-\alpha} ds$$

当 $t \in [-r, 0]$ 时有

$$\| A^{\beta}(Fu)(t) \|_{X} \leqslant \| \varphi \|_{\beta} \leqslant \| \varphi \|_{C_{\beta}}$$

这说明$\{A^{\beta}(Fu)(t)\}$在 X 内是有界的，$A^{-\beta}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}_{\alpha}$ 是紧的。

4）映射 F 是连续的，从 f 的连续性知

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \| u(s) - \hat{u}(s) \|_{\alpha} < \delta, \text{有}$$

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant \tilde{T}} \| f(s, u_s) - f(s, \hat{u}_s) \|_{X} < \varepsilon$$

于是当 $t \in [0, \tilde{T}]$, $\sup \| u(s) - \hat{u}(s) \|_{\alpha} < \delta$，有

$$\| (Fu)(t) - (F\hat{u})(t) \|_{\alpha} \leqslant \left\| \int_0^t A^{\alpha} T(t-s)(f(s, \boldsymbol{u}_s) - f(s, \hat{u}_s)) \mathrm{d}s \right\|_{X}$$

$$\leqslant \int_0^t K(t-s)^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, \| \boldsymbol{u}_s \| C_{\alpha}, \| \boldsymbol{u}_s - \hat{u}_s \|_{C_{\alpha}}) \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \varepsilon M \int_0^t s^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\omega s} \mathrm{d}s$$

故 F 是连续的。

根据 Schauder 不动点定理，F 在 S 内有不动点，即(9.7-1a)$\cup$(9.7-2b)式在 $\boldsymbol{X}_{\alpha}$ 内有全局温和解 $u \in C([-r, \infty), \boldsymbol{X}_{\alpha})$，它满足不等式

$$\| u(t, \varphi) \|_{\alpha} \leqslant g(t, \| \varphi \|_{C_{\alpha}}) \qquad t \in [-r, \infty] \tag{9.7-9}$$

5）唯一性，设 $v(t, \varphi)$是(9.7-2a)$\cup$(9.7-2b)式的另一个连续解，$v \in S$ 选取 $\tau > 0$ 充分小，使得

$$M \int_0^{\tau} s^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\omega s} \mathrm{d}s < 1/2$$

则 $\| u(t, \varphi) - v(t, \varphi) \|_{\alpha}$

$$\leqslant \left\| \int_0^t A^{\alpha} T(t-s)(f(t, u_s) - f(s, v_s)) \mathrm{d}s \right\|_{X}$$

$$\leqslant \left\| \int_0^t K(t-s)^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} \cdot L(s, \| u_s \|_{C_{\alpha}}, \| v_s \|_{C_{\alpha}}) \| u_s - v_s \|_{C_{\alpha}} \mathrm{d}s \right.$$

$$\leqslant \left\| \int_0^t K(t-s)^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\omega(t-s)} L(s, g_s, g_s) \right.$$

$$\cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant r} \| u_t - v_t \|_{C_\alpha} \mathrm{d}s$$

$$\leqslant M\int_0^T s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\omega s}\mathrm{d}s \cdot \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \| u_t - v_t \|_{C_\alpha}$$

$$< \frac{1}{2} \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \| u_k - v_t \|_{C_\alpha}$$

于是有 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \| u_t - v_t \|_{C_\alpha} \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0\leqslant t\leqslant \tau} \| u_k - v_t \|_{C_\alpha}$

从而 $u(t,\varphi)\equiv v(t,\varphi) \quad t\in[0,\tau]$,反复上述程序,可得到

$$u(t,\varphi)\equiv v(t,\varphi),\ t\in R_+$$

6) 稳定和渐近稳定性。

由于(9.7-9)式成立,显然 $\lim\limits_{p\to 0}\sup\limits_{t\geqslant 0} g(t,p)=0$ 蕴涵(9.7-1)的平凡解稳定。

$\lim\limits_{t\to\infty} g(t,p)=0 \quad 0<p\ll 1$,蕴涵(9.7-2$a$)的平凡解渐近稳定。

§8 Лурье 型偏泛函微分方程[182]

文献[182]研究了更一般的偏泛函微分方程的稳定性,并将常微分方程中所建立的 Лурве 控制系统绝对稳定的充要条件[78]及此派生出的充分条件成功地推广到偏泛函微分方程,本节予以介绍。

设 X 是一个实的 Banach 空间,$X^n = \overbrace{X\times X\cdots X}^{n}$,$X^m = \overbrace{X\times\cdots\times X}^{m}$,$X^p = \overbrace{X\times\cdots\times X}^{p}$,$m+p=n$,$C=C([-r,0],X)$,$C^k=C([-r,0],X^k)$($k=m,p,n$),$\varphi\in C^n$,$\psi\in C^m$,$\eta\in C^p$,记 $\|\varphi\|_{C^n} = \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} |\varphi|_{X^n}$,$\|\psi\|_{C^m} = \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} |\psi|_{X^m}$,$\|\eta\|_{C^p} = \sup|\eta|_{X^p}$。

考虑下列抽象泛函微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{u}+L(t,\boldsymbol{u}_t)+f(t,\boldsymbol{u}_t) & t\geqslant t_0>0\\ \boldsymbol{u}=\varphi(t) & t\in[t_0-r,t_0]\end{cases}$$

(9.8-1)

这里 $\boldsymbol{u}=\mathrm{col}(u_1,\cdots u_n)\in X^n$, $\boldsymbol{x}=\mathrm{col}(u_1,\cdots u_m)\in X^m$, $\boldsymbol{y}=\mathrm{col}(u_{m+1},\cdots u_n)\in X^p$, $L=\mathrm{col}(L_1,\cdots L_m)$, $\boldsymbol{\varphi}=\mathrm{col}(\varphi_1,\cdots\varphi_n)=\mathrm{col}(\psi_1,\cdots\psi_m,\eta_{m+1},\cdots\eta_n)=\mathrm{col}(\psi,\eta)$, $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}(t+\theta)$, A 是 X^n 上的线性算子。

假设(9.8-1)式满足整体存在唯一性定理条件,下面来研究稳定性。

引理 9.8.1 如果下列线性问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{v}+L(t,\boldsymbol{v}_t)\\ \boldsymbol{v}=\varphi(t) & t\in[t_0-r,t_0]\end{cases}\tag{9.8-2}$$

的部分变元解 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$满足下列不等式

$$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\|_{C^m}\leqslant K(t_0)\|\varphi\|_{C^m}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\varepsilon(\xi)\mathrm{d}\xi}\tag{9.8-3}$$

这里 $\varepsilon(t)\in C[R_+,R]$, $K(t)\in C[R_+,R_+]$

则存在 Ляпунов 泛函

$$V(t,\varphi)\in C[R_+\times C^n,R_+]$$

它具有下列性质

1) $\|\psi\|_{C^m}\leqslant V(t,\varphi)\leqslant K(t)(\|\psi\|_{C^m}+\|\eta\|_{C^p})$

2) $\|V(t,\varphi)-V(t,\tilde{\varphi})\|\leqslant K(t)(\|\psi-\tilde{\psi}\|_{C^m}+\|\eta-\tilde{\eta}\|_{C^p})$

3) $D^+V|_{(9.8\text{-}2)}\leqslant-\varepsilon(t)V(t,\varphi)$

证: 构造下列 Ляпунов 泛函

$$V(t,\varphi)=\sup_{r\geqslant0}\|\boldsymbol{x}_{t+r}(t,\varphi)\|_{C^m}\mathrm{e}^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(s)\mathrm{d}s}$$

显然,性质 1)成立,其次

$$\|V(t,\varphi)-V(t,\tilde{\varphi})\|=\sup_{\tau\geqslant0}\|\boldsymbol{x}_{t+\tau}(t,\varphi)\|_{C^m}\mathrm{e}^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(\xi)\mathrm{d}\xi}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+\tau}(t,\tilde{\varphi}) \|_{C^m} e^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(\xi)d\xi} | \\
&\leqslant \sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+\tau}(t,\varphi-\tilde{\varphi}) \| e^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(\xi)d\xi} \\
&\leqslant K(t) \| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{C^n} \\
&\leqslant K(\| \psi - \tilde{\psi} \|_{C^m} + \| \eta - \tilde{\eta} \|_{C^p}
\end{aligned}
$$

故性质 2)成立。

$$
\begin{aligned}
D^+V|_{(9.8\text{-}2)} &\overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(V(t+h, v_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)) \\
&= \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\Big(\sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+h+\tau}(t+h, v_{t+h}(t,\varphi)) \|_{C^m} e^{\int_{t+h}^{t+h+\tau}\varepsilon(s)ds} \\
&\quad - \sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+h}(t,\varphi) \|_{C^m} e^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(s)ds} \Big) \\
&= \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\Big(\sup_{\tau\geqslant h} \| \boldsymbol{x}_{t+\tau}(t,\varphi) \|_{C^m} e^{\int_{t+h}^{t+\tau}\varepsilon(s)ds} \\
&\quad - \sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+h}(t,\varphi) \|_{C^m} e^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(s)ds} \Big) \\
&\leqslant \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\Big(\sup_{\tau\geqslant 0} \| \boldsymbol{x}_{t+\tau}(t,\varphi) \| \Big)_{C^m} e^{\int_t^{t+\tau}\varepsilon(s)ds} \\
&\quad \cdot (e^{-\int_t^{t+\tau}\varepsilon(s)ds} - 1) \\
&\leqslant -\varepsilon(t) V(t,\varphi)
\end{aligned}
$$

故性质 3)成立，$V(t,\varphi)$的连续性是显然的，因此引理 9.8.1 证毕。

引理 9.8.2

1)如果(9.8-2)式的部分变元解 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$满足(9.8-3)式，且存在 $W(t,r)\in C[R^+\times R^+, R^+]$，它关于 r 单调不减，使得

$$
| f(t,\varphi) |_{X^n} \leqslant W(t, \| \psi \|_{C^m})
$$

2)下列系统

$$
\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = -\varepsilon(t)z + K(t)W(t,z) \\ 2(t_0) = z_0 \geqslant V(t_0,\varphi) \end{cases} \tag{9.8-4}
$$

的初值问题在 R^+上存在的最大右行解

$$
z_M(t,t_0,z_0)
$$

则(9.8-1)式的部分变元解有估计式

$$\| x_t(t_0,\varphi) \|_{C^m} \leqslant z_M(t,t_0,z_0) \quad t \geqslant t_0 \qquad (9.8\text{-}5)$$

证:根据引理 9.8.1 知存在满足性质 1)、2)、3)的泛函 $V(t,\varphi)$,计算 $D^+ V|_{(9.8\text{-}1)}$有

$$\begin{aligned} D^+|_{(9.8\text{-}1)} &\overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(V(t+h, v_{t+h}(t,\varphi)) - V(t,\varphi)) \\ &\quad + \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}(V(t+h, u_{t+h}(t,\varphi)) \\ &\quad - V(t+h, v_{t+h}(t,\varphi))) \\ &\leqslant -\varepsilon(t)V(t,\varphi) + \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{\| u_{t+h} - v_{t+h} \|_{C^m}}{h} \end{aligned} \qquad (9.8\text{-}6)$$

由常数变易法公式,有

$$u_{t+h} - v_{t+h} = \int_t^{t+h} U(t+h,s)X_0 f(s,u_s)\mathrm{d}s$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{u_{t+h} - v_{t+h}}{h} &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,s)X_0 f(s,u_s)\mathrm{g}s \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (U(t+h,s)X_0 f(s,u_s) - f(t,\varphi))\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (U(t+h,s) - U(t,t))X_0 f(t,\varphi)\mathrm{d}s + X_0 f(t,\varphi) \end{aligned}$$

这就蕴涵

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \| u_{t+h} - v_{t+h} \|_{C^n}/h \leqslant | f(t,\varphi) |_{x_n} \qquad (9.8\text{-}7)$$

将(9.8-7)式代入(9.8-6)式,便有

$$\begin{aligned} D^+ V|_{(9.8\text{-}1)} &\leqslant -\varepsilon(t)V(t,\varphi) + K(t) | f(t,\varphi) |_{X^n} \\ &\leqslant -\varepsilon(t)V(t,\varphi) + K(t)W(t, \| \psi \|_{C^n}) \\ &\leqslant -\varepsilon(t)V(t,\varphi) + K(t)W(t, V(t,\varphi)) \end{aligned}$$

计及 $\varphi \in C^n$ 的任意性,便有

$$\begin{aligned} D^+ V(t,u_t(t_0,\varphi)) &\leqslant -\varepsilon(t)V(t,u_t(t_0,\varphi)) \\ &\quad + K(t)W(t,V(t,u_t(t_0,\varphi))) \end{aligned}$$

由比较定理及引理 9.8.1 的性质 1),可得

$$\| \boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi) \|_{C^m} \leqslant V(t,\boldsymbol{u}_t(t_0,\varphi)) \leqslant Z_M(t,t_0,z_C)$$

引理 9.8.2 获证。

可以仿照常微分方程中关于稳定,一致稳定,一致渐近稳定,全局一致渐近稳定,全局指数稳定等定义来定义(9.8-1)式平凡解的相应的稳定性。

定理9.8.1 设引理 9.8.2 的条件满足,且 $W(t,r)\leqslant L(t)r$,则有下列结论。

1) $\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s \geqslant \gamma(t_0)$ 蕴涵(9.8-1)式的平凡解关于部分变元 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$ 稳定。

2) $\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s \geqslant \gamma = \text{const}$,且 $K(t)=K=\text{const}$,蕴涵(9.8-1)式的平凡解关于部分变元 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$ 一致稳定。

3) $\int_{t_0}^{\infty}(\varepsilon(t)-K(t)L(t))\mathrm{d}s = \infty$ 蕴涵(9.8-1)式的平凡解关于 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$ 全局渐近稳定。

4) $\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s \Rightarrow \infty$ 关于 t_0 一致,当 $t-t_0\to\infty$,蕴涵(9.8-1)式的平凡解关于 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$ 全局一致渐近稳定。

5) $\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s \geqslant \gamma(t-t_0)\quad t_0>0, r>0$ 蕴涵(9.8-1)式的平凡解关于 $\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)$ 全局指数稳定。

证:考虑下列方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = (-\varepsilon(t)+K(t)L(t))z \\ z(t_0) = z_0\end{cases} \tag{9.8-8}$$

不难得到

$$z(t,t_0,z_0) = z_0 \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s}$$

设 $z_0 = V(t_0,\varphi)$,由比较定理和引理 9.8.1 的性质 1),有

$$\| \boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi) \| \leqslant V(t,\boldsymbol{u}_t(t_0,\varphi)) \leqslant z(t,t_0,z_0)$$

$$\leqslant z_0 e^{-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s}$$

$$\leqslant V(t_0,\varphi)e^{-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s}$$

$$\leqslant K(t_0)(\|\psi\|_{C^m}+\|\eta\|_{C^p})e^{-\int_{t_0}^{t}(\varepsilon(s)-K(s)L(s))\mathrm{d}s}$$

故定理9.8.1结论成立。

定理9.8.2 如果

1)存在 $V(t,\varphi)=(V_1(t,\varphi),\cdots,V_l(t,\varphi))^T$，它的 Frechet 导数存在且关于 φ 连续，又存在 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_l)^T,\lambda_i\in R$，使得

i) $\|V(t,\varphi)\|\geqslant\|\psi\|_{C^m}$

ii) $\dot{V}_i|_{(9.8\text{-}2)}\leqslant-\lambda_i\psi_i(\|\varphi\|_{C^n})$

2)存在 $b_{ij}(t)\in C[I,R^+](i\neq j)$ 和 $W_i(t,z_1,\cdots,z_n)\in C[I\times R_+^l,R]$，$W_{ij}$关于$z_1,\cdots,z_l$ 是拟单调不减的，使得

$$D^+V_i(t_1,\varphi,z_0,f(t,\varphi)\leqslant\sum_{j=1}^{l}b_{ij}V_j+\lambda_i\psi_i+W_i(t,V)$$

3)初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{j=1}^{l}b_{ij}z_j+W_i(t,z_1,\cdots,z_l)\\ z_j(t_0)=z_{i0}\geqslant V_i(t_0,\varphi)\qquad i=1,2,\cdots,l\end{cases}\tag{9.8-9}$$

有在 R_+ 上的最大右行解 $z_M(t,t_0,z_0)=(z_{1M},\cdots z_{lM})^T$，则有

$$\|\boldsymbol{x}_t(t_0,\varphi)\|_{C^m}\leqslant\|z_M(t,t_0,z_0)\|\tag{9.8-10}$$

证：沿(9.8-1)式的解计算 $V(t,\varphi)$的导数，有

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(9.8\text{-}1)}\leqslant&\dot{V}|_{(9.8\text{-}2)}+\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}(V(t+h,\boldsymbol{u}_{t+h}(t,\varphi))\\&-V(t+h,v_{t+h}(t,\varphi)))\\\leqslant&\dot{V}|_{(9.8\text{-}2)}+\overline{\lim_{h\to0^+}}DV(t+h,v_{t+h})(\boldsymbol{u}_{t+h}-v_{t+h})/h\end{aligned}$$

由常数变易法公式，有

$$\boldsymbol{u}_t=U(t,t_0)\varphi+\int_{t_0}^{t}U(t,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s$$

$$=v_t(t_0,\varphi)+\int_{t_0}^{t}U(t,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s$$

于是有 $\dfrac{\boldsymbol{u}_{t+h}-v_{t+h}}{h}=\dfrac{1}{h}\int_t^{t+h}\boldsymbol{U}(t+h,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s$

从而

$$\begin{aligned}\dot{V}_i\mid_{(9.8\text{-}1)}\leqslant &-\lambda_i\psi_i(\|\varphi\|_{C^m})\\ &+\overline{\lim_{h\to 0^+}}DV_i(t+h,v_{t+h})\\ &\frac{1}{h}\int_t^{t+h}U(t+h,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\boldsymbol{U}(t+h,s)\boldsymbol{X}_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\boldsymbol{U}(t+h,s)X_0(f(s,\boldsymbol{u}_s)-f(t,\varphi))\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(\boldsymbol{U}(t+h,s)-\boldsymbol{U}(t,t))X_0f(t,\varphi)\mathrm{d}s\\ &+X_0f(t,\varphi)\end{aligned}$$

这就推出

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\boldsymbol{U}(t+h,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s\leqslant X_0f(t,\varphi)$$

进而有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{h\to 0^+}}DV_i(t+h,v_{t+h})\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\boldsymbol{U}(t+h,s)X_0f(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant DV_i(t,\varphi)X_0f(t,\varphi)\leqslant DV_i(t,\varphi,X_0f(\boldsymbol{x},\varphi))\\ &\dot{V}_i|_{(9.8\text{-}1)}\leqslant-\lambda_i\psi_i(\|\varphi\|_{C^m})+DV_i(t,\varphi,X_0f(t,\varphi))\\ &\leqslant\sum_{j=1}^{l}b_{ij}V_j+W_i(t,V_1,\cdots,V_l)\end{aligned}\tag{9.8-11}$$

即 $\dot{V}|_{(9.8\text{-}1)}\leqslant BV+W(t,V)$

由于 φ 是任意的，故有

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{u}_t)\leqslant BV(t,\boldsymbol{u}_t)+W(t,V(t,\boldsymbol{u}_t))\tag{9.8-12}$$

根据条件 3)和比较原理以及条件 1)，有

$$\|\boldsymbol{x}_t(t,\varphi)\|_{C^m}\leqslant\|V(t,\varphi)\|\leqslant\|z_M(t,t_0,z_0)\|$$

下面，在 Banach 空间 X 中定义内积$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，使之成为希尔伯

特空间。

考虑 Лурье 型抽象泛函微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{u}+L(t,\boldsymbol{u}_t)+\boldsymbol{b}f(t,\sigma_t) & t\geqslant t_0\geqslant 0\\ \boldsymbol{u}=\varphi \quad t\in[t_0-r,t_0] & \sigma_{t_0}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}\end{cases} \tag{9.8-13}$$

这里 $L=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(t,\theta)\varphi(\theta)$

$f\in C[I\times C^n,X] \qquad (f(t,\sigma_t),\sigma_t)c>0 \quad$ 当 $\sigma_t\neq 0$

$\boldsymbol{u}=\mathrm{col}(u_1,\cdots,u_n) \qquad \boldsymbol{b}=\mathrm{col}(b_1,\cdots,b_n) \quad \boldsymbol{c}=\mathrm{col}(c_1,\cdots,c_n)$

及

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{y}+L(t,\boldsymbol{y}_t)+bf_1(t,\tilde{\sigma}_t) & t\geqslant t_0>0\\ y=\varphi_1(t) \quad t\in[t_0-\tau,t_0] & \tilde{\sigma}=c^T\boldsymbol{u}-\rho\xi\end{cases} \tag{9.8-14}$$

这里 $\boldsymbol{y}=\mathrm{col}(u_1,\cdots,u_n,\xi) \qquad \boldsymbol{b}=\mathrm{col}(b_1,\cdots,b_{n+1})$

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{col}(L_1,\cdots,L_{n+1})=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta_1(t,\theta)\varphi_1(\theta)$$

$f_1\in C[I\times C^{n+1},X] \qquad (f_1(t,\tilde{\sigma}_t),\tilde{\sigma}_t)>0 \quad$ 当 $\tilde{\sigma}_t\neq 0$

(9.8-3)与(9.8-4)式中 A 是 $T(t)$在 $X^n(X^{n+1})$空间上的强连续半群的无穷小生成元,$f_1(t,0)\equiv 0$,$f(t,0)\equiv 0$。

仿照常微分方程描述的非线性控制系统的分类,不妨设(9.8-13)、(9.8-14)式分别为直接控制和间接控制。

定义 9.8.1 满足上述限制的任意 $f(f_1)$,(9.8-13)[(9.8-14)]式的零解是全局渐近稳定的,称(9.8-13)[(9.8-14)]式的零解是绝对稳定的。

首先讨论(9.8-13)式的绝对稳定性,不妨设 $c_n\neq 0$ 。

作变换 $w=G(g_{ij})\boldsymbol{u}$, 其中

$$g_{ij}=\begin{cases}1 & & i=j=1,2,\cdots,n-1\\ 0 & i\neq j & i=1,\cdots,n-1 \quad j=1,\cdots,n\\ c_j & & j=1,2,\cdots,n \quad i=n\end{cases}$$

则(9.8-13)化为

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \hat{A}\boldsymbol{w} + \hat{L}(t, \boldsymbol{w}_t) + \hat{b}f(t, \boldsymbol{w}_{nt}) & t \geqslant t \\ \boldsymbol{w} = \hat{\varphi} & t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (9.8\text{-}13')$$

这里　$\boldsymbol{w} = \mathrm{col}(\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{n-1}, \boldsymbol{w}_n) = \mathrm{col}(u_1, \cdots, u_{n-1}, \sigma)$

$\hat{A}$ 和 $\hat{L}$ 与 A 和 L 有同样的性质。

定理 9.8.3　若下列线性问题

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = A\boldsymbol{v} + L(t, v_t) & t \geqslant t_0 \\ v = \varphi & t \in [t_0 - r, t_0] \end{cases} \quad (9.8\text{-}15)$$

的解 $V_t(t_0, \varphi)$满足不等式

$$\| V_t(t_0, \varphi) \|_{C^n} \leqslant K \| \varphi \|_{C^n} e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad \alpha > 0$$

则(9.8-13)式的平凡解绝对稳定的充要条件是(9.8-13)式的零解关于部分变元 $w_{nt}(t_0, \varphi)$绝对稳定。

证:必要性,设(9.8-13)式的零解绝对稳定,设 $\| C \| = M$,则存在 $\delta(\varepsilon) > 0$,使得

$$\| \boldsymbol{u}_t(t, \varphi) \|_{C^n} < \varepsilon / M \qquad t \geqslant 0$$

$\forall \varepsilon > 0$,当 $\| \varphi \|_{C^n} < \delta$, 及其 $w = Gu$, $\hat{\varphi} = G\varphi$ 或 $\varphi = G^{-1}\hat{\varphi}$, 故有

$$\| \hat{w}_{nt}(t_0, \hat{\varphi}) \|_C \leqslant \| C \| \ \| \boldsymbol{u}_t(t_0, \varphi) \|_{C^n} < \varepsilon \qquad t \geqslant t_0$$

当 $\| \hat{\varphi} \|_{C^n} < \delta / \| G^{-1} \|$

对任何 $\varphi \in C^n$, 因为$\lim\limits_{t \to \infty} \| \boldsymbol{u}_t(t_0, \varphi) \|_{C^n} = 0$

便有

$$\lim \| w_{nt}(t_0, \hat{\varphi}) \|_C \leqslant M \lim_{t \to \infty} \| \boldsymbol{u}_t(t_0, \varphi) \|_{C^n} = 0$$

必要性获证。

充分性,设(9.8-13)的零解关于部分变元 $w_{nt}(t_0, \hat{\varphi})$绝对稳定,根据常数变易法公式,(9.8-13)式的任意非零解可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t(t_0, \varphi) &= u(t, t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} u(t, s) X_0 b f(s, \sigma_s) ds \\ &= u(t, t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{U}(t, s) X_0 b f(s, W_{ns}(t_0, \hat{\varphi})) ds \end{aligned}$$

于是

$$\| u_t(t_0,\varphi) \|_{C^n} \leqslant K e^{-\alpha(t-t_0)} \| \varphi \|_{C^n} + \int_{t_0}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} \| b \| \ | f(s, w_{ns}(t_0, \hat{\varphi})) |_X ds$$

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $w_{nt}(t_0,\hat{\varphi}) \to 0$, 存在 $t^* > t_0$, 使得

$$\int_{t^*}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} \| b \| \ | f(s, w_{ns}(t_0, \hat{\varphi})) |_x ds < \varepsilon/3$$

加之,f 是连续的,计及(9.8-13)式的解关于始值的连续性及它的零解关于 $w_{nt}(t_0,\hat{\varphi})$ 的绝对稳定性,故存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\int_{t}^{t^*} K e^{-\alpha(t-s)} \| b \| \ | f(s, w_{ns}(t_0, \hat{\varphi})) |_X ds < \varepsilon/3$$

当 $\| \varphi \|_{C^n} < \delta_1(\varepsilon)$, $\| \hat{\varphi} \|_{C^n}$充分小。

取 $\delta_2(\varepsilon) < \varepsilon/3k$,令 $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$ 便有

$$\| u_t(t_0,\varphi) \| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \| \varphi \|_{C^n} < \delta(\varepsilon)$$

这就说明(9.8-13)的零解是稳定的。

现证 $\| u_t(t_0,\varphi) \|_{C^n} \to 0$,当 $t \to +\infty$, 从

$$\begin{aligned} u_t(t_0,\varphi) &= U(t,t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} U(t,s) X_0 b f(s,\sigma_s) ds \\ &= U(t,t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} U(t,s) X_0 b f(s, w_{ns}(t_0,\hat{\varphi})) ds \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \| u_t(t_0,\varphi) \|_{C^n} &\leqslant K e^{-\alpha(t-s)} \| \varphi \|_{C^n} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} K e^{-\alpha(t-s)} \| b \| | f(s, w_{ns}(t_0,\hat{\varphi})) |_x ds < \varepsilon \\ &= K e^{-\alpha(t-t_0)} \| \varphi \|_{C^n} \\ &\quad + \frac{K \int_{t_0}^{t} K e^{\alpha s} \| b \| \ | f(s, w_{ns}(t_0,\hat{\varphi})) |_X ds}{e^{\alpha t}} \end{aligned}$$

应用 L′Hospital 法则便有

$$0 \leqslant \lim \| u_t(t_0,\varphi) \| \leqslant \lim_{t \to \infty} K e^{-\alpha(t-t_0)} \| \varphi \|_{C^n}$$

$$+\lim_{t\to\infty}\|b\|\frac{|f(s,w_{ns}(t_0,\hat{\varphi}))|_X}{\alpha}$$
$$=0$$

故(9.8-13)式的零解是绝对稳定的。

下面讨论间接控制(9.8-14)式,作变换

$$W=G(g_{ij})y$$

其中矩阵 $G(g_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$定义为

$$g_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1,2,\cdots,n\\ 0 \quad i\neq j & j=1,2,\cdots,n+1 \quad i=1,2,\cdots,n\\ c_j & j=1,2,\cdots,n \quad i=n+1\\ -\rho & i=j=n+1\end{cases}$$

则(9.8-14)能化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\hat{A}w+\hat{L}(t,W_t)+\hat{b}f_1(t,w_nt) & t\geqslant t_0\\ w=\hat{\varphi}_1 & t\in[t_0-r,t_0]\end{cases}\tag{9.8-14′}$$

这里 $\quad \mathrm{col}(w_1,\cdots,w_n,w_{n+1})=\mathrm{col}(u_1,\cdots,u_n,\sigma)$

$\hat{A}$ 和$\hat{L}$ 分别与A 和L 具有同样的性质。

定理9.8.4 若下列线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\hat{A}v+\hat{L}(t,v_t) & t\geqslant t_0\\ v=\varphi_1 & t\in[t_0-r,t_0]\end{cases}$$

满足下列不等式

$$\|v_t(t_0,\varphi_1)\|_{C^n}\leqslant K\|\varphi_1\|_{C^{n+1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\qquad \alpha>0$$

则(9.8-14)式的零解绝对稳定的充要条件是(9.8-14′)式的零解关于部分变元 $W_{n+1}(t_0,\hat{\varphi}_1)$ 绝对稳定。

可以仿定理9.8.3证明,故略。

第十章　随机微分方程与随机泛函微分方程

本章介绍 Itô 型随机微分方程及随机泛函微分方程(包括随机微分差分方程)所描述的系统的各种稳定性,假设读者熟悉随机微分方程的基本理论,从而开门见面只介绍稳定性。§1　叙述不带时滞的随机微分方程的解依概率稳定的几个基本定理;§2　介绍此类系统的解的几乎必然指数稳定性及均方指数稳定性;§3－§4　分别给出随机中立型微分方程的几乎必然指数稳定性和均方指数稳定性的最新结果;§5　介绍随机中立型大系统的均方指数稳定的不同于§4 的方法和结果,因为滞后型随机微分方程总可视为中立型随机微分方程的特例,故从§3－§5 中可以推出相应的滞后型随机微分方程的相应的各种稳定性,§6　介绍随机滞后型泛函微分方程的几乎必然指数稳定性及 p 阶矩指数稳定性,§7　给出随机中立型泛函微分方程的几乎必然指数稳定性和 p 阶矩指数稳定性的 Разумихин 型定理,§8　简略地列举对随机神经网络的应用。

§1　随机微分方程依概率稳定性[197~199]

本节,叙述随机微分方程的解依概率稳定的几个基本定理。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是具有自然滤度$\{\mathscr{F}_+\}_{t\geqslant 0}$的完备概率空间,设 $W(t)=(W_1(t),\cdots,W_m(t))^T$　$(t\geqslant 0)$,是一个 m 维的布朗(Brown)运动,定义在此概率空间上。

设 $R_+=[0,\infty)$, 设 $f\in[R_+\times R^n,R^n]$

$\boldsymbol{g}\in[R_+\times R^n,R^{n\times m}]$都是 Borel 可测函数。

考虑 Itô 型随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t)) \cdot \\ \qquad \mathrm{d}W(t) \quad t \geqslant t_0 & (10.1\text{-}1) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 & (10.1\text{-}2) \end{cases}$$

假设(10.1-1)∪(10.1-2)式的解是整体存在唯一的。

且进而设

$$\boldsymbol{f}(t,0) \equiv 0 \qquad \boldsymbol{g}(t,0) \equiv 0 \qquad t \geqslant t_0$$

故(10.1-1)式有零解 $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$。

记 $C^{1,2}[R_+ \times S_h, R_+]$表示定义在 $R_+ \times S_h$ 上的非负函数 $V(t,\boldsymbol{x})$全体,而 $S_h:\{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| < h\} \subset R^n$,为 n 维空间包含原点的邻域,$V(t,\boldsymbol{x})$关于$(t,\boldsymbol{x})$分别有连续的一阶导数和二阶导数。

根据 Itô 公式,现对于(10.1-1)式定义一个微分算子

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[g(t,x) \cdot g^T(t,x)]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

如果 L 作用在函数 $V(t,\boldsymbol{x}) \in C^{1,2}[R_+ \times S_h, R_+]$上则有

$$LV(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left[\boldsymbol{g}^T(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 V(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\right] \tag{10.1-3}$$

这里 $\frac{\partial V}{\partial t} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n \times n} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n}$ 应用 Itô 公式,若 $\boldsymbol{x}(t) \in S_h$,则有

$$\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t)) = LV(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}W(t) \tag{10.1-4}$$

这也说明微分算子 L 定义的由来。

下面将看到,用 Ляпунов 直接法来研究随机微分方程的稳定

性与常微分方程稳定性有许多类似之处,只是用 $LV(t,\boldsymbol{x}(t))$ 来代替常微分方程中 V 函数沿解的导数 $\dot{V}(t,\boldsymbol{x}(t))$ 。

定义 10.1.1 若 $\forall\varepsilon_1\in(0,1)$ 和 $\forall\varepsilon_2>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t_0)$,使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$, 有

$$P\{\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon_2,t\geqslant t_0\}\geqslant 1-\varepsilon_1 \quad (10.1\text{-}5)$$

则称(10.1-1)式的零解是随机稳定的或是依概率稳定的。

反之,便称(10.1-1)式的零解是随机不稳定的。

定义 10.1.2 若(10.1-1)式的零解随机稳定,又 $\forall\eta\in(0,1)$, $\exists\sigma_0=\sigma(\eta,t_0)>0$, 使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\sigma_0$,有

$$P\{\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=0\}\geqslant 1-\eta \quad (10.1\text{-}6)$$

则称(10.1-1)式的零解是随机渐近稳定的或依概率渐近稳定的。

若上述定义中 σ 可任意大,则称(10.1-1)式的零解是随机全局渐近稳定的。

定理 10.1.1 若存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}(R_+\times S_h,R_+)$ 使得

$$LV(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0 \qquad \forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S_h \quad (10.1\text{-}7)$$

则(10.1-1)式的零解是随机稳定的。

证:因为 $V(t,\boldsymbol{x})$正定,故 $V(t,0)\equiv 0$,且存在 $\varphi\in K$ 使得

$$\varphi(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x}) \qquad \forall(t,\boldsymbol{x})\in R_+\times S_h \quad (10.1\text{-}8)$$

$$\forall\varepsilon_1\in(0,1),\varepsilon_2>0,\text{设 }\varepsilon_2<h$$

由 $V(t,\boldsymbol{x})$的连续性及 $V(t_0,0)=0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t_0)>0$ 使得

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\sup_{x\in S_\delta}V(t_0,\boldsymbol{x})\leqslant\varphi(\varepsilon_2) \quad (10.1\text{-}9)$$

易知 $\delta<\varepsilon_2$。

$\forall\boldsymbol{x}_0\in S_\delta$,简记 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$, 设 τ 是$\boldsymbol{x}(t)$从 S_{ε_2}首次超出的时间,即

$$\tau=\inf\{t\geqslant t_0\ \boldsymbol{x}(t)\overline{\in}S_{\varepsilon_2}\}$$

由 Itô 公式，$\forall t \geqslant t_0$，有

$$(V(\tau \wedge t), \boldsymbol{x}(\tau \wedge t)) = V(t_0, \boldsymbol{x}_0) + \int_{t_0}^{\tau \wedge t} LV(s, \boldsymbol{x}(s)) \mathrm{d}s$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau \wedge t} \frac{\partial V(s, \boldsymbol{x}(s))}{\partial \boldsymbol{x}} g(s, \boldsymbol{x}(s)) \mathrm{d}B(s) \tag{10.1-10}$$

则(10.1-9)式两边取数学期望且利用条件 $LV \leqslant 0$，便得到

$$E(V(\tau \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau \wedge t))) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) \tag{10.1-11}$$

注意到

$\| \boldsymbol{x}(\tau \wedge t) \| = \| \boldsymbol{x}(\tau) \| = \varepsilon_2$ 若 $\tau \leqslant t$，由(10.1-8)式便有

$$E(V(\tau \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau \wedge t))) \geqslant E[I_{\{\tau \leqslant t\}} V(\tau, \boldsymbol{x}(\tau))]$$
$$\geqslant \varphi(\varepsilon_2) P\{\tau \leqslant t\}$$

于是，由(10.1-9)及(10.1-11)式，就可推出

$$P\{\tau \leqslant t\} \leqslant \varepsilon_1$$

令 $t \to \infty$，便可得 $P\{\tau < \infty\} \leqslant \varepsilon$，于是

$$P\{ | \boldsymbol{x}(t) | < \varepsilon_2 \quad \text{对所有 } t \geqslant t_0 \} \geqslant 1 - \varepsilon_1$$

定理10.1.2 若存在正定的具有无穷小上界的函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C^{1,2}[[t_0, \infty) \times S_h, R_+]$，使得 $LV(t, \boldsymbol{x})$ 是负定的，则(10.1-1)式的零解是随机渐近稳定的。

证：定理 10.1.2 的条件蕴涵定理 10.1.1 的条件，故(10.1-1)式的零解是随机稳定的。

由假设知 $V(t, 0) \equiv 0$，且存在 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in K$，使得

$$\varphi_1(\| \boldsymbol{x} \|) \leqslant V(t, \boldsymbol{x}) \leqslant \varphi_2(\| \boldsymbol{x} \|)$$

及

$$LV(t, \boldsymbol{x}) \leqslant -\varphi_3(\| \boldsymbol{x} \|)$$
$$\forall (t, \boldsymbol{x}) \in [t_0 + \infty) \times S_h \tag{10.1-12}$$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$ 由定理 10.1.1 知存在 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$

使得

$$P\{ \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \| < \frac{h}{2} \} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4} \tag{10.1-13}$$

$\forall\ \boldsymbol{x}_0 \in S_{\delta_0}$简记 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$

设 $\alpha < \beta < \|\boldsymbol{x}_0\|$ 是任意的,选取 $0 < \alpha < \beta$ 充分小。

使得
$$\frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi_1(\beta)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \tag{10.1-14}$$

定义停时 $\tau_\alpha = \inf\{t \geqslant t_0, \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \alpha\}$

和 $\tau_h = \inf\{t \geqslant t_0, \|\boldsymbol{x}(t)\| \geqslant h/2\}$

由 Itô 公式和(10.1－12)能推出对 $\forall\ t \geqslant t_0$有

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant EV(\tau_\alpha \wedge T_n \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau_\alpha \wedge \tau_h \wedge t)) \\
&= V(t_0, \boldsymbol{x}_0) + E\int_{t_0}^{\tau_\alpha \wedge \tau_h \wedge t} L(s, \boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \\
&\leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) - \varphi_2(\alpha)E(\tau_\alpha \wedge \tau_h \wedge t - t_0)
\end{aligned}
$$

因此
$$
\begin{aligned}
(t - t_0)P\{\tau_\alpha \wedge T_h \geqslant t\} &\leqslant E(T_\alpha \wedge T_h \wedge t - t_0) \\
&\leqslant \frac{V(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\varphi_3(\alpha)}
\end{aligned}
$$

这就直接推出 $P\{\tau_\alpha \wedge \tau_h < \infty\} = 1$。

因此,由(10.1-13)式,有 $P\{\tau_h < \infty\} \leqslant \varepsilon/4$

故
$$
\begin{aligned}
1 = P\{\tau_\alpha \wedge \tau_h < \infty\} &\leqslant P\{\tau_\alpha < \infty\} + P\{\tau_h < \infty\} \\
&\leqslant P\{\tau_\alpha < \infty\} + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}
$$

这就推出
$$P\{\tau_\alpha < \infty\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4} \tag{10.1-15}$$

选取 θ 充分大,使

$$P\{\tau_\alpha < \theta\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

则

$$
\begin{aligned}
&P\{\tau_\alpha \wedge \tau_h \wedge \theta\} \geqslant P\{\tau_\alpha < \theta\} \cap \{\tau_h = \infty\} \\
&\geqslant P\{\tau_\alpha < \theta\} - P\{\tau_h < \infty\} \geqslant 1 - \frac{3\varepsilon}{4}
\end{aligned} \tag{10.1-16}
$$

现定义两个停时

$$\sigma = \begin{cases} T_\alpha & 若\ T_\alpha < T_h \wedge \theta \\ \infty & 其它 \end{cases}$$

且 $$T_\beta = \inf\{t > \sigma \quad | \boldsymbol{x}(t) | \geqslant \beta\}$$

用 Itô 公式能指出,对 $\forall t \geqslant 0$ 有

$$EV(\tau_\beta \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau_\beta \wedge t)) \leqslant E(V(\sigma \wedge t, \boldsymbol{x}(\sigma \wedge t)))$$

注意到

$$V(\tau_\beta \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau_\beta \wedge t)) = V(\sigma \wedge t, \boldsymbol{x}(\sigma \wedge t)) = V(t, \boldsymbol{x}(t))$$

在 $\omega \in \{\tau_\alpha \geqslant \tau_h \wedge \theta\}$ 便有

$$E(I_{\{\tau_\alpha < T_h \wedge \theta\}} V(\tau_\beta \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau_\beta \wedge t))) \leqslant E[I_{\{\tau_\alpha < \tau_h \wedge \theta\}} EV(\tau_\alpha \boldsymbol{x}(\tau_h))]$$

利用(10.1-16)式和事实$\{\tau_\beta \leqslant t\} \subset \{\tau_\alpha < \tau_n \wedge \theta\}$可进而得到

$$\varphi_1(\beta) P\{\tau_\beta \leqslant t\} \leqslant \varphi_2(\alpha)$$

这样,连同(10.1-14)式便可得到

$$P\{\tau_\beta \leqslant t\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

同样利用(10.1-16)式可推出

$$P\{\sigma < \infty\ 且\ \tau_\beta = \infty\} \geqslant P\{\tau_\alpha < \tau_h \wedge \theta\} - P\{\tau_\beta < \infty\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

但这就意味着

$$P\{\omega : \limsup_{t \to \infty} \| \boldsymbol{x}(t) \| \leqslant \beta\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

因为 β 是任意的,故有

$$P\{\omega : \limsup_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

定理10.1.3 若存在具有无穷小上界的径向无界正定函数 $V(t, \boldsymbol{x}) \in C^{1,2}[(t_0, +\infty) \times R^n, R_+]$,使得 $LV(t, \boldsymbol{x})$是负定的,则(10.1-1)式的零解是随机全局渐近稳定的。

证:定理 10.1.3 的条件显然蕴涵定理 10.1.1 的条件成立,故(10.1-1)式的零解是随机稳定的,现只需证明,对于$\forall \boldsymbol{x}_0 \in R^n$有

$$P(\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = 0) = 1 \qquad (10.1\text{-}17)$$

仍简记 $\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$, $\forall \varepsilon \in (0,1)$,因为 $V(t, \boldsymbol{x})$是径向无界的,故能找到一个 $h > |\boldsymbol{x}_0|$ 充分大,使得

$$\inf_{t \geqslant t_0, \|x\| \geqslant h} V(t, \boldsymbol{x}) \geqslant \frac{4V(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\varepsilon} \qquad (10.1\text{-}18)$$

定义停时

$$T_h = \inf\{t \geqslant t_0 \ \| \boldsymbol{x}(t) \| \geqslant h\}$$

用 Itô 公式,能指出对任意的 $t \geqslant t_0$,有

$$EV(t \wedge \tau_h, \boldsymbol{x}(\tau_h \wedge t)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}_0) \qquad (10.1\text{-}19)$$

用(10.1-18)式有

$$EV(\tau_h \wedge t, \boldsymbol{x}(\tau_n \wedge t)) \geqslant \frac{4V(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\varepsilon} P \quad (\tau_h \leqslant t) \qquad (10.1\text{-}20)$$

则从(10.1-20)式有

$$P\{\tau_h \leqslant t\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

令 $t \to \infty$ 便有

$$P\{\tau_h < \infty\} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

于是 $$P\{|\boldsymbol{x}(t)| \leqslant h \text{ 对所有 } t \geqslant t_0\} \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4} \qquad (10.1\text{-}21)$$

然后,我们用定理 10.1.2 同样的方法能给出

$$P\{\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = 0\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

由于 ε 的任意性,故结论(10.1-17)式成立。

例 1　考虑一个 n 维的随机微分方程组

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(t)\boldsymbol{x}\mathrm{d}B(t) \qquad (10.1\text{-}22)$$

这里 $f(t), g_i(t)$是 $n \times n$ 的 Borel 可测矩阵函数。

若存在一个对称正定常数矩阵 $Q_{n \times n}$使得

$$Qf(t) + f^T(t)Q + \sum_{i=1}^{m} g_i^T(t)Qg_i(t)$$

关于 $t \geqslant t_0$ 一致负定,即

$$\lambda_{\max}(Q\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{f}^T(t)Q + \sum_{i=1}^{m} g_i^T(t)Qg_i(t)) \leqslant -\lambda < 0 \qquad (10.1\text{-}23)$$

一致成立，则(10.1-22)式的零解随机全局渐近稳定，这里 $\lambda_{max}(A)$表示矩阵 A 的最大特征值。

证：作 $V(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}$，则 $V(t,\boldsymbol{x})$是正定的具有无穷小上界和径向无界的。

$$LV(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(Q\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{f}^T(t)Q+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{g}_i^T(t)Q\boldsymbol{g}_i(t))\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant-\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2$$

故 $LV(t,\boldsymbol{x})$是负定的，由定理 10.1.3 可知(10.1-22)式的零解是随机全局渐近稳定的。

§2 随机微分方程指数稳定性[197]

本节，考虑随机微分方程(10.1-1)∪(10.1-2)式的零解的几乎必然指数稳定性及均方指数稳定性，先介绍前者。

定义 10.2.1 称(10.1-1)式的零解几乎必然指数稳定，若 $\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$，有

$$\lambda\overset{\text{def}}{=}\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{t}\lg\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<0\qquad\text{a.s.}\tag{10.2-1}$$

其中 λ 称为(10.1-1)式的解的 Ляпунов 指数。

因此，(10.1-1)式的稳定是几乎必然指数稳定的，当且仅当 $\lambda<0$。

仍设(10.1-1)∪(10.1-2)的解存在唯一，且

$$\boldsymbol{f}(t,0)\equiv0,\boldsymbol{g}(t,0)\equiv0$$

引理10.2.1 $\forall\,\boldsymbol{x}_0\neq0,\boldsymbol{x}_0\in R^n$则

$$P\{\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\neq0,t\geqslant t_0\}=1\tag{10.2-2}$$

即，几乎所有从非零出发的任何轨道永不达到原点。

证：若(10.2-2)式不真，则存在某些 $\boldsymbol{x}_0\neq0$，使得 $P\{\tau<\infty\}>0$，这里 τ 是相应的解首次达到零的时间，即

$$\tau=\inf\{t\geqslant t_0,\boldsymbol{x}(t)=0\}$$

简记 $x(t) \overset{\text{def}}{=} x(t,t_0,x_0)$，相对于 $P(B)>0$ 能找到一对常数 $T>t_0$ 和 $\theta>1$ 充分大，这里

$$B=\{\tau\leqslant T,\text{且}\ \|x(t)\|\leqslant\theta-1\quad\text{对所有}\ t_0\leqslant t\leqslant\tau\}$$

但由标准假设，存在一个正常数 K_θ，使得

$$\text{对所有}\ |x|\leqslant\theta$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T$$

有
$$\|f(t,x)\|\vee\|g(t,x)\|\leqslant K_\theta\|x\|$$

令 $V(t,x)=\|x\|^{-1}$，则对于 $0<\|x\|\leqslant\theta$ 和 $t_0\leqslant t\leqslant T$

$$\begin{aligned}LV(t,x)&=-\|x\|^{-3}x^Tf(t,x)+\frac{1}{2}(-\|x\|^{-3}\|g(t,x)\|^2)\\&\quad+3\|x\|^{-5}\|x^Tg(t,x)\|^2\\&\leqslant\|x\|^{-2}\|f(t,x)\|+\|x\|^{-3}\|g(t,x)\|^2\\&\leqslant K_\theta\|x\|^{-1}+K_\theta^2\|x\|^{-1}=K_\theta(1+K_\theta)V(t,x)\end{aligned}$$

现在，对 $\forall\varepsilon\in(0,\|x_0\|)$ 定义停时为

$$\tau_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\inf\{t\geqslant t_0\quad\|x(t)\|\in(\varepsilon,\theta)\}$$

由 Itô 公式

$$\begin{aligned}&E[\mathrm{e}^{-K_\theta(1+K_\theta)(\tau_\varepsilon\wedge T-t_0)}V(\tau_\varepsilon\wedge T,x(\tau_\varepsilon\wedge T))]=V(x_0,t_0)\\&+E\int_{t_0}^{\tau_\varepsilon\wedge T}\mathrm{e}^{-K_\theta(1+K_\theta)(s-t_0)}[-(K_\theta(1+K_\theta))V(s,x(s))\\&+LV(s,x(s))]\mathrm{d}s\leqslant\|x_0\|^{-1}\end{aligned}$$

计及 $\omega\in\beta,\tau_\varepsilon\leqslant T,\ \|x(\tau_\varepsilon)\|=\varepsilon$

上不等式蕴涵

$$E[\mathrm{e}^{-K_\theta(1+K_\theta)(T-t_0)}\varepsilon^{-1}I_B]\leqslant|x_0|^{-1}$$

因此
$$P(B)\leqslant\varepsilon\|x_0\|^{-1}\mathrm{e}^{K_\theta(1+K_\theta)(T-t_0)}$$

令 $\varepsilon\to0$，便得到 $P(B)=0$ 与 $P(B)$ 的定义矛盾，引理获证。

定理 10.2.1 假设存在函数 $V\in C^{1,2}[[t_0,+\infty)\times R^n,R_+]$ 和常数 $p>0,c_1>0,c_2\in R,c_3\geqslant0$，使得对一切 $x\neq0$ 和 $t\geqslant t_0$ 有

1) $c_1\|x\|^p\leqslant V(t,x)$

2) $LV(t,\boldsymbol{x}) \leqslant c_2 V(t,\boldsymbol{x})$

3) $\left|\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\right|^2 \geqslant c_3 V^2(t,\boldsymbol{x})$

则 $$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant -\frac{c_3-2c_2}{2p} \quad \text{a.s.} \qquad (10.2\text{-}3)$$

对一切 $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 成立。

特别地,若 $c_3 > 2c_2$, 则(10.1-1)式的零解几乎必然指数稳定。

证:对于 $\boldsymbol{x}_0 = 0$, (10.2-3)式自然成立,因为 $\boldsymbol{x}(t,t_0,0) \equiv 0$ 设 $\forall\, \boldsymbol{x}_0 \neq 0$, 记 $\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,由引理 10.2.1 对所有 $t \geqslant t_0$, $\boldsymbol{x}(t) \neq 0$ 几乎必然成立,应用 Itô 公式与条件 2)便有

$$\lg V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant \lg V(t_0,\boldsymbol{x}_0) + c_2(t-t_0) + M(t) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\left|\frac{\partial V(s,\boldsymbol{x}(s))}{\partial \boldsymbol{x}}g(s,\boldsymbol{x}(s))\right|^2}{V^2(s,\boldsymbol{x}(s))}\mathrm{d}s \qquad (10.2\text{-}4)$$

这里 $$M(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{\frac{\partial V(s,\boldsymbol{x}(s))g(s,\boldsymbol{x}(s))}{\partial \boldsymbol{x}}}{V(s,\boldsymbol{x}(s))}\mathrm{d}B(s)$$

是一个具有始值 $M(t_0)=0$ 的连续鞅, $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$,设 $n=1,2\cdots$ 用指数鞅不等式,有

$$P\left\{\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+n}\left[M(t) - \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\left|\frac{\partial V(s,\boldsymbol{x}(s))}{\partial \boldsymbol{x}}g(s,\boldsymbol{x}(s))\right|^2}{V^2(s,\boldsymbol{x}(s))}\mathrm{d}s > \frac{2}{\varepsilon}\lg n\right]\right\} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

应用著名的 Borel - Cantelli 引理,可知对几乎所有 $\omega \in \Omega$,存在整数 $\eta_0 = \eta_0(\omega)$, 使得若 $\eta \geqslant \eta_0$ 有

$$M(t) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\lg n + \frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\left|\frac{\partial V(s,\boldsymbol{x}(s))}{\partial \boldsymbol{x}}g(s,\boldsymbol{x}(s))\right|^2}{V^2(s,\boldsymbol{x}(s))}\mathrm{d}s$$

对所有 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+n$,代此不等式到(10.2-4)式,并应用定理

10.2.2 条件 3)，便有

$$\lg V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant \lg V(t_0,\boldsymbol{x}_0) - \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] \cdot (t - t_0) + \frac{2}{\varepsilon}\lg n$$

对所有 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + n, n \geqslant n_0$ 几乎必然成立。

因此，对几乎所有 $\omega \in \Omega$，若 $t_0 + n - 1 \leqslant t \leqslant t_0 + n, n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{t}\lg V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant -\frac{t-t_0}{2t}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] + \frac{\lg V(t_0,\boldsymbol{x}_0) + \frac{2}{\varepsilon}\lg n}{t_0 + n - 1}$$

这就推出

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg V(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2] \qquad \text{a.s.}$$

最后，用条件 1)便能得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \frac{(1-\varepsilon)c_3 - 2c_2}{2p} \qquad \text{a.s.}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性，故(10.2-3)式成立。

推论 10.2.1 假设存在函数 $V(t,\boldsymbol{x}) \in C^{1,2}[[t_0, +\infty) \times R^n, R_+]$ 和正数 p, α, λ，使得对所有 $\boldsymbol{x} \neq 0, t \geqslant t_0$，有

$$a \mid \boldsymbol{x} \mid^p \leqslant V(t,\boldsymbol{x})$$

且
$$LV(t,\boldsymbol{x}) \leqslant -\lambda V(t,\boldsymbol{x})$$

则
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg \|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant -\frac{\lambda}{p} \qquad \text{a.s.}$$

对所有的 $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$ 成立，即(10.1-1)的零解是几乎必然指数稳定的。

推论可从定理 10.2.2 中取 $c_1 = \alpha, c_2 = -\lambda$ 和 $c_3 = 0$ 而直接得出。

例 1　考虑二维随机方程组

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{x}_2(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2(t) = (-2\boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_2(t))\mathrm{d}t + (\boldsymbol{x}_2(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1(t))\mathrm{d}B(t) \end{cases} \tag{10.2-5}$$

的零解的几乎必然指数稳定性。

作 Ляпунов 函数

$$V(t,\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_2^2$$

则

$$V(t,\boldsymbol{x}) \geqslant 2\boldsymbol{x}_1^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2^2 + \boldsymbol{x}_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$\begin{aligned} LV(t,\boldsymbol{x}) &= -(2 - \frac{1}{4})\boldsymbol{x}_1^2 - (4 - 1 - 1)\boldsymbol{x}_2^2 \\ &\quad + (4 - 2 - 4 + 1)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 \\ &= -(1 + \frac{3}{4})\boldsymbol{x}_1^2 - 2\boldsymbol{x}_2^2 - \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \\ &\leqslant -\boldsymbol{x}_1^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2^2 \\ &\leqslant -\frac{1}{2}V(t,\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

根据推论 10.2.1 有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lg\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\| \leqslant -\frac{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} \qquad \text{a.s.}$$

故(10.2-5)式的零解是几乎必然指数稳定的。

现介绍随机微分方程均方指数稳定性。

仍考虑(10.1-1)∪(10.1-2),它们满足本章§1 所给出的基本假设,本节将介绍(10.1-1)式的零解的均方指数稳定性。

定义 10.2.2 称(10.1-1)式的零解是均方指数稳定的,若存在正常数 λ 和 c 使得(10.1-1)∪(10.1-2)的解满足

$$E(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|^2) \leqslant c\|\boldsymbol{x}_0\|^2 \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} \qquad \forall\, \boldsymbol{x}_0 \in R^n \tag{10.2-6}$$

从(10.2-6)式立即可得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg(E\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|^2)<0 \tag{10.2-7}$$

定理 10.2.2 若存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}[[t_0,+\infty)\times R^n, R_+]$ 及常数 $c_1>0, c_2>0, c_3>0$,使得

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant c_2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

和

$$LV(t,\boldsymbol{x})\leqslant -c_3\|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{10.2-8}$$

成立。

则有 $$E(\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)\|^2)\leqslant\frac{c_2}{c_1}\|\boldsymbol{x}_0\|^2\mathrm{e}^{-c_3(t-t_0)}\quad t\geqslant t_0 \tag{10.2-9}$$

$\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$

即(10.1-1)式的零解是均方指数稳定的。

证:$\forall\,\boldsymbol{x}_0\in R^n$ 且记 $\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,对每个 $n\geqslant|\boldsymbol{x}_0|$ 定义停时

$$T_n=\inf\{t\geqslant t_0:\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqslant n\}$$

显然,当 $n\to\infty$, $T_n\to\infty$,几乎必然成立,由 Itô 公式,能推出对 $t\geqslant t_0$,有

$$E[\mathrm{e}^{c_3(t\wedge\tau_n-t_0)}V(t\wedge\tau_n,\boldsymbol{x}(t\wedge\tau_n))]=V(t_0,\boldsymbol{x}_0)$$
$$+E\int_{t_0}^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{c_3(t-t_0)}[c_3V(s,\boldsymbol{x}(s))+LV(s,\boldsymbol{x}(s))]\mathrm{d}s$$

利用条件,便可得到

$$c_1\mathrm{e}^{c_3(t\wedge\tau_n-t_0)}E\|\boldsymbol{x}(t\wedge\tau_n)\|^2$$
$$\leqslant E[\mathrm{e}^{c_3(t\wedge\tau_n-t_0)}V(\boldsymbol{x}(t\wedge\tau_n),(t\wedge\tau_n))]$$
$$\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)\leqslant c_2\|\boldsymbol{x}_0\|^2$$

令 $n\to\infty$ 便得到

$$c_1\mathrm{e}^{c_3(t-t_0)}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\leqslant c_2\|\boldsymbol{x}_0\|^2$$

这就推出结论(10.2-9)式。

推论 10.2.2 假设存在一个对称正定的 $n\times n$ 矩阵 Q 及正常数 c_1,使得对于任意的 $(t,\boldsymbol{x})\in[(t_0+\infty)\times R^n]$,有

$$x^TQf(t,x)+\frac{1}{2}\text{trace}[g^T(t,x)Qg(t,x)]\leqslant -c_1x^TQx$$

则(10.1-1)式的零解均方指数稳定。

证:作 Ляпунов 函数

$$V(t,x)=x^TQx$$

令 $\lambda_{\min}(Q)$,$\lambda_{\max}(Q)$分别表示对称矩阵 Q 的最小最大特征值,易于验证

$$LV(t,x)=(x^TQf(t,x))+\frac{1}{2}\text{trace}[g^T(t,x)Qg(t,x)]$$

$$\leqslant -c_1x^TQx\leqslant -c_1V(t,x)$$

$$\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2\leqslant V(t,x)\leqslant\lambda_{\max}(Q)d\|x\|^2$$

故定理 10.2.3 的条件满足,从而推论的结论成立。

§3 中立型随机微分差分方程的几乎必然指数稳定性[192、193]

本节,考虑以下半线性中立型微分差分方程组

$$\begin{cases}\mathrm{d}[x(t)-Cx(t-\tau)]=[Ax(t)+Bx(t-\tau)]\mathrm{d}t\\ \qquad +\sigma[t,x(t)x(t-\tau)]\mathrm{d}w(t) \qquad\qquad t\geqslant 0 \\ x(t)=\xi(t)\qquad -\tau\leqslant t\leqslant 0\end{cases}\qquad(10.3\text{-}1)$$

这里 A、B、C 是 $n\times n$ 常数矩阵 $\sigma\in C[R_+\times R^n\times R^n, R^{n\times n}]$,且 σ 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件。

设 $W(t)=(W_1(t),\cdots,W_n(t))^T$ 是在具有自然滤波$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$(即 $\mathscr{F}_t=\sigma(\omega(s):0\leqslant s\leqslant t)$)的完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 n 维 Brown 运动。

以 A^T 表示 A 的转置,$\|\cdot\|$ 表示欧氏范数,即 $\|x\|=\sqrt{x^Tx}$,$x\in R^n$,$\|A\|$ 表示 A 的算子范数,即:$\|A\|=\sup\{|Ax|:x=1\}$。设 $\tau>0$,以 $e^b_{g0}([-r,0]:R^n)$表示所有连续有界 R^n 值随机过程 $\xi(s)(-\tau\leqslant s\leqslant 0)$的全体,其中 $\xi(s)$对每个 s 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的。

称一个适应过程 $\mathscr{F}_tx(t)$,$-\tau\leqslant t<\infty$ (设 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_0$,$-\tau\leqslant t\leqslant$

0)是(10.3-1)式的解,如果它满足始值条件和每个 $t\geqslant 0$ 满足下列积分表达式

$$x(t)-Cx(t-\tau)=\xi(0)-C\xi(-\tau)+\int_0^t[Ax(s)+Bx(s-\tau)]ds+\int_0^t\sigma(s,x(s),x(s-\tau))dw(s) \quad (10.3\text{-}2)$$

易证:(10.3-1)式有唯一解,先限制 $t\in[0,\ \tau]$,这时(10.3-2)式变为

$$x(t)=\xi(0)+C(\xi(t-\tau)-\xi(-\tau))+\int_0^t[Ax(s)+B\xi(s-\tau)]ds+\int_0^t\sigma(s,x(s),\xi(s-\tau))dw(s) \quad (10.3\text{-}3)$$

可以仿本章§2给出(10.3-1)式零解几乎必然指数稳定性的定义。

由随机微分方程理论可知(10.3-3)式在$[0,\ \tau]$内有唯一解,类似地可知(10.3-2)式在$[\tau,2\tau]$,$[2\tau,3\tau]$,…有唯一解,故在 $t\geqslant 0$ 上有唯一解,以 $x(t,\xi)$表示其唯一解,且易知解连续,平方可积。

设 $\sigma(t,0,0)\equiv 0$, 故(10.3-1)有零解 $x(t,0)\equiv 0$ 。

下面先证明两条引理,对于研究中立型随机微分方程的几乎必然指数稳定性是很有用的,以 a.s. 简记为几乎必然成立。

引理 10.3.1 设 $M(t)(t\geqslant 0)$ 是具有 $M(0)=0$ a.s. 的局部鞅,设 $x(t),t\geqslant 0$ 是非负 $\mathscr{F}_t$ 适应过程,使得

$$Ex(0)<\infty$$

若

$$x(t)\leqslant x(0)+M(t)\qquad t\geqslant 0\quad \text{a.s.} \quad (10.3\text{-}4)$$

则

$$\limsup_{t<\infty}x(t)<\infty\qquad \text{a.s.} \quad (10.3\text{-}5)$$

证:定义 $y(t)=x(0)+M(t),t\geqslant 0$, 则 $y(t)$是非负鞅,因此是一个非负特殊半鞅,用 Lipster 和 Shiryayer 定理[219]知有 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$几乎必然存在且是有限的,故(10.3-5)式成立。

引理 10.3.2 设 $G\in[R^n,R^n]$是一个 Borel 可测函数,使得

$k\in(0,1)$。

$$\| G(x) \| \leqslant k \| x \| \qquad x \in R^n \qquad (10.3\text{-}6)$$

令 $\varphi(t)(-\tau\leqslant t<\infty)$，是一个 *Borel* 可测 R^n 值函数，设 $\alpha>0, K>0$ 且

$$e^{\alpha t} \| \varphi(t) - G(\varphi(t-\tau)) \|^2 \leqslant K \quad \text{对一切 } t \geqslant 0, \text{有} (10.3\text{-}7)$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \lg \| \varphi(t) \| \leqslant - \frac{\alpha \wedge \beta}{2} \qquad (10.3\text{-}8)$$

这里
$$\beta = -\frac{2}{\tau}\lg k > 0$$

证：设 $\theta\in(k,1)$ 是任意的，注意到

$$\begin{aligned}
&\| \varphi(t) - G(\varphi(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant \| \varphi(t) \|^2 - 2 \| \varphi(t) \| \, \| G(\varphi(t-\tau)) \| + \| G(\varphi(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant \| \varphi(t) \|^2 - \theta \| \varphi(t) \|^2 - \theta^{-1} \| G(\varphi(t-\tau)) \|^2 + \| G(\varphi(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant (1-\theta) \| \varphi(t) \|^2 - k^2(\theta^{-1}-1) \| \varphi(t-\tau) \|^2
\end{aligned}$$

于是有

$$\| \varphi(t) \|^2 \leqslant \frac{1}{1-\theta} \| \varphi(t) - G(\varphi(t-\tau)) \|^2 + \frac{k^2}{\theta} \| \varphi(t-\tau) \|^2 \quad (10.3\text{-}9)$$

令
$$\beta_\theta = \frac{1}{\tau} \lg\left(\frac{\theta}{k^2}\right)$$

且 $\forall \varepsilon\in(0,\alpha\wedge\beta_0)$，从(10.3-9)和(10.3-7)可推出，对任意 $T>0$ 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant T} [e^{\varepsilon t} \| \varphi(t) \|^2] \\
&\leqslant \frac{K}{1-\theta} + \frac{k^2}{\theta} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} [e^{\varepsilon t} \| \varphi(t-\tau) \|^2] \\
&\leqslant \frac{K}{1-\theta} + \frac{k^2 e^{\varepsilon\tau}}{\theta} \left(\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} \| \varphi(t) \|^2 + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} [e^{\varepsilon t} \| \varphi(t) \|^2] \right)
\end{aligned}$$

因为 $k^2 e^{\varepsilon\tau}/\theta<1$，故有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} [e^{\varepsilon t} \| \varphi(t) \|^2] \leqslant \left(\frac{k}{1-\theta} + \frac{k^2 e^{\varepsilon\tau}}{\theta} \sup_{-\tau\leqslant t\leqslant 0} \| \varphi(t) \|^2 \right) \cdot \left[1 - \frac{k^2 e^{\varepsilon\tau}}{\theta} \right]^{-1} \qquad (10.3\text{-}10)$$

因为 $T>0$ 是任意的，从而有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\varphi(t)\|\leqslant-\frac{\varepsilon}{2}$$

最后，令 $\varepsilon\to\alpha\wedge\beta_0,\theta\to1$ 便得结论(10.3-8)式。

定理 10.3.1 假设存在一个对称负定的 $n\times n$ 矩阵 D，使得矩阵

$$H=\begin{pmatrix}A+A^T+D & B-A^TC\\ B^T-C^TA & -D-C^TB-B^TC\end{pmatrix}$$

负定，以 $-\lambda$ 表示 H 的最大特征值，设 $\|C\|<1$，且存在 $\mu\in[0,\lambda)$，使得

$$\operatorname{trace}[\sigma^T(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\leqslant\mu\|\boldsymbol{x}\|^2+\lambda\|\boldsymbol{y}\|^2$$
$$\forall(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R_+\times R^n\times R^n \qquad (10.3\text{-}11)$$

则对 $\forall\xi\in\mathscr{C}_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg\|\boldsymbol{x}(t,\xi)\|\leqslant-\frac{\alpha\wedge\beta}{2} \qquad (10.3\text{-}12)$$

这里 $\alpha\in(0,\lambda-\mu)$是方程

$$2\alpha+\alpha e^{\alpha\tau}(2\|C\|^2+\tau\|D\|^2)=\lambda-\mu \qquad (10.3\text{-}13)$$

的唯一根。

且
$$\beta=-\frac{2}{\tau}\lg(\|C\|)>0$$

换言之(10.3-1)式的零解是几乎必然指数稳定的。

证： 固定任意始值 ξ 简记 $\boldsymbol{x}(t)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{x}(t,\xi)$，构造 Ляпунов 函数

$$V(\xi,t)=\|\xi\|^2+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{x}^T(t+s)D\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s$$
$$(\xi,t)\in R^n\times[0,\infty) \qquad (10.3\text{-}14)$$

对 $V(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau),t)$用 Itô 公式，首先用假设条件，便有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\\
&\quad=2(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau))^T\\
&\qquad\times[A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-\tau)]\mathrm{d}t+\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t)\\
&\qquad+\operatorname{trace}(\sigma^T(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau)))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\boldsymbol{x}^T(t)D\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^T(t-\tau)D\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}t\\
\leqslant&(\boldsymbol{x}^T(t),\boldsymbol{x}^T(t-\tau))H\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\tau)\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&+(\mu\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\lambda\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2)\mathrm{d}t\\
&+2(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau))^T\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t)\\
\leqslant&-(\lambda-\mu)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\mathrm{d}t+2(\boldsymbol{x}(t)\\
&-C\boldsymbol{x}(t-\tau))^T\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t)
\end{aligned}\tag{10.3-15}
$$

设 $\alpha\in(0,\lambda-\mu)$是(10.3-13)的唯一解,再次应用 Itô 公式就能推得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\alpha t}V(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau),t))\\
&=\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}V(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\\
&\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}(2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+2\|C\|^2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2+\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|\boldsymbol{x}(t\\
&\quad+s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\alpha t}(-(\lambda-\mu)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\mathrm{d}t+2(\boldsymbol{x}(t)\\
&\quad-C\boldsymbol{x}(t-\tau))^T\times\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t))\\
&=\mathrm{e}^{\alpha t}(-(\lambda-\mu-2\alpha)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+2\alpha\|C\|^2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2\\
&\quad+\alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|\boldsymbol{x}(t+s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}t\\
&\quad+2\mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{x}(t)-C\boldsymbol{x}(t-\tau))^{\tau}\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t)
\end{aligned}\tag{10.3-16}
$$

从 0 到 $v>0$ 对上式两边进行积分,便能得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\alpha v}EV(\boldsymbol{x}(v)-C\boldsymbol{x}(v-\tau),v)\\
&\quad\leqslant c_1+M(v)+\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}[-(\lambda-\mu-2\alpha)\mid\boldsymbol{x}(t)\mid^2+2\alpha\|C\|^2\\
&\quad\cdot\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2+\alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|\boldsymbol{x}(t+s)\|^2\mathrm{d}s]\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{10.3-17}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\zeta_1=V(\xi(0)-C\xi(-\tau),0)\leqslant 2\|\xi(0)\|^2+2\|C\|^2\|\xi(-\tau)\|^2\\
+\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

且

$$M(v) = 2\int_0^v e^{\alpha t}(x(t) - Cx(t-\tau))^T\sigma(t, x(t), x(t-\tau))dw(t)$$

它是一个连续鞅，具有

$$\int_0^v e^{\alpha t} \| x(t-\tau) \|^2 dt \leqslant c_2 + e^{\alpha\tau}\int_0^v e^{\alpha t} \| x(t) \|^2 dt \tag{10.3-18}$$

这里 $$\zeta_2 = e^{\alpha\tau}\int_{-\tau}^0 \| \zeta(s) \|^2 ds$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^v e^{\alpha t}\int_{-\tau}^0 \| x(t+s) \|^2 ds dt &= \int_0^v e^{\alpha t}\int_{t-\tau}^t \| x(s) \|^2 ds dt \\ &= \int_{-\tau}^v \left(\int_{s\vee 0}^{(s+\tau)\wedge v} e^{\alpha t} dt\right) \| x(s) \|^2 ds \\ &\leqslant \int_{-\tau}^v \tau e^{\alpha(s+\tau)} \| x(s) \|^2 ds \\ &\leqslant \tau\zeta_2 + \tau e^{\alpha\tau}\int_0^v e^{\alpha s} \| x(s) \|^2 ds\end{aligned} \tag{10.3-19}$$

代(10.3-18)、(10.3-19)式到(10.3-17)式中去应用(10.3-13)式便有

$$e^{\alpha v}V(x(v) - Cx(v-\tau), v) \leqslant \zeta_1 + \alpha\zeta_2(2 \| C \|^2 + \tau \| D \|^2) + M(v) \tag{10.3-20}$$

显然 $\zeta_1 + \alpha\zeta_2(2 \| C \|^2 + \tau \| D \|^2)$ 是有界 $\mathscr{F}_0$ 可测随机变量，因为 $\xi \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}_0}([-r, 0], R^n)$。

应用引理 10.3.1 到(10.3-20)式可知，存在一个有限的随机变量 ξ_3，使得

$$\begin{aligned}e^{\alpha v} \| x(v) - Cx(v-\tau) \|^2 &\leqslant e^{\alpha v}V(x(v) - Cx(v-\tau), v) \\ &\leqslant \zeta_3 \quad 对所有的\ v \geqslant 0\ 成立\end{aligned} \tag{10.3-21}$$

这样，同引理 10.3.2 蕴涵结论(10.3-12)式成立。

如取 $D = 0$，则有：

推论 10.3.1 假设对称矩阵

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} A + A^T & B - A^TC \\ B^T - C^TA & -C^TB - B^TC \end{pmatrix}$$

负定，$-\lambda$ 是 $\bar{H}$ 的最大特征值，设 $\| C \| < 1$，且设 $\mu \in [0, \lambda)$ 使得

$$\operatorname{trace}[\sigma^T(t,x,y)\sigma(t,x,y)] \leqslant \mu \|x\|^2 + \lambda \|y\|^2$$
$$\forall (t,x,y) \in R_+ \times R^n \times R^n$$

则(10.3-1)式的零解几乎必然指数稳定。

推论 10.3.2 设对称矩阵 $A+A^T$ 负定，$-\eta$ 表示 $A+A^T$ 的最大特征值，且设 $\|C\|<1$

且 $$\frac{\eta}{2} > \|C^TB\| + \|B-A^TC\|$$

令 $$\lambda = \frac{\eta}{2} - \|C^TB\| - \|B-A^TC\|$$

进而设存在 $\mu\in[0,\lambda)$，使得

$$\operatorname{trace}[\sigma^T(t,x,y)\sigma(t,x,y)] \leqslant \mu \|x\|^2 + \lambda \|y\|^2$$
$$(t,x,y) \in R_+ \times R^n \times R^n \qquad (10.3\text{-}22)$$

则(10.3-1)的零解是几乎必然指数稳定的，同时，解的最高的Ляпунов 指数不超过 $-(\alpha\wedge\beta)/2$，这里 $\alpha\in(0,\lambda-\mu)$是下列方程的唯一解

$$2\alpha + \alpha e^{\alpha\tau}\left(2\|C\|^2 + \tau\left[\frac{\eta}{2} + |C^TB|\right]^2\right) = \lambda - \mu$$

β 为定理 10.3.1 中所定义。

证：令 $D=\theta I$，这里 I 是 $n\times n$ 单位矩阵。有

$$\theta = \frac{\eta}{2} + \|C^TB\|$$

设矩阵 H 与定理 10.3.1 中同样定义，要求 H 是负定的，且它的最大特征值不超过 $-\lambda$，事实上 $\forall(x,y)\in R^n$，有

$$\begin{aligned}(x^T,y^T)H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= x^T(A+A^T)x + \theta|x|^2 \\ &\quad + 2x^T(B-A^TC)y - \theta|y|^2 - 2y^TC^TBy \\ &\leqslant -(\eta-\theta)\|x\|^2 + 2\|B-A^TC\|\,\|x\|\,\|y\| \\ &\quad - (\theta - 2\|C^TB\|)\|y\|^2 \\ &\leqslant -(\eta-\theta-\|B-A^TC\|)\|x\|^2 - (\theta - 2\|C^TB\| \\ &\quad - \|B-A^TC\|)\|y\|^2 = -\lambda(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

故结论成立。

推论10.3.3 设定理 10.3.1 中除了条件(10.3-11)式代之以

$$\text{trace}[\sigma^T(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \leqslant \mu_1 \|\boldsymbol{x}\|^2 + \mu_2 \|\boldsymbol{y}\|^2$$

$$\text{对所有的}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n$$

其他条件不变,这里 $\mu_1 \in (0,\lambda)$, $\mu_2 \in (\lambda, 2\lambda)$使得

$$\mu_1 + \mu_2 < 2\lambda$$

则(10.3-1)式的零解几乎必然指数稳定。

此外,(10.3-1)式的解的 Ляпунов 指数估计为

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \lg \|\boldsymbol{x}(t,\xi)\| \leqslant -\frac{\alpha \wedge \beta}{2} \qquad (10.3\text{-}23)$$

这里 β 如同定理 10.3.1 中所定义的,$\alpha \in (0, 2\lambda - \mu_1 - \mu_2)$是方程式

$$2\alpha + e^{\alpha\tau}(\mu_2 - \lambda + 2\alpha\|C\|^2 + \alpha\tau\|D\|^2) = \lambda - \mu_1 \qquad (10.3\text{-}24)$$

的解。

证:仍用定理 10.3.1 的证明中一些记号,用 Itô 公式,能指出对任何 $V \geqslant 0$,有

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} EV(\boldsymbol{x}(t) - C\boldsymbol{x}(v-\tau), v) \\ & \leqslant \zeta_1 + M(v) + \int_0^v e^{\alpha t}\Big[-(\lambda - \mu - 2\alpha)|\boldsymbol{x}(t)|^2 \\ & \quad + (\mu_2 - \lambda + 2\alpha\|C\|^2)\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2 \\ & \quad + \alpha\|D\|^2 \int_{-\tau}^0 \|\boldsymbol{x}(t+s)\|^2 ds\Big] dt \end{aligned} \qquad (10.3\text{-}25)$$

这里 ξ_1 和 $M(v)$如同定理 10.3.1 的证明中所定义的。代替(10.3-18)和(10.3-19)式到(10.3-25)式中,应用(10.3-24)式便能得到

$$e^{\alpha v} EV(\boldsymbol{x}(v) - C\boldsymbol{x}(v-\tau), v) \leqslant \zeta_4 + M(v)$$

这里 ξ_4 是一个有界 $\mathscr{F}_0$ 可测随机变量,余下的证明如同定理 10.3.1 一样证明。

推论 10.3.4 假设对称矩阵 $A + A^T$ 是负定的,以 $-\eta$ 表示 $A + A^T$ 的最大特征值,设 $\|C\| < 1$ 和

$$\frac{\eta}{2} > \| C^T B \| + \| B - A^T C \|$$

令 $$\lambda = \frac{\eta}{2} - \| C^T B \| - \| B - A^T C \|$$

进而设存在一对常数 $\mu_1 \in (0, \lambda)$, $\mu_2 \in (\lambda, 2\lambda)$, 使得

$$\mu_1 + \mu_2 < 2\lambda$$

且

$$\mathrm{trace}[\sigma^T(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \leqslant \mu_1 \| \boldsymbol{x} \|^2 + \mu_2 \| \boldsymbol{y} \|^2$$
$$\forall (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n$$

则(10.3-1)式的平凡解几乎必然指数稳定。

其证明方法如同推论 10.3.2。

例 1 考虑一个一维半线性中立型随机微分方程

$$\mathrm{d}[\boldsymbol{x}(t) - c\boldsymbol{x}(t-\tau)] = [-a\boldsymbol{x}(t) + b\boldsymbol{x}(t-\tau)]\mathrm{d}t + \sigma(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{10.3-26}$$

这里 a、b、c 是常数,$\sigma \in C[R_+ \times R \times R, R^m]$,这类方程经常出现在化学工程中。

设$|c|<1$ $\quad a > |cb| + |b+ac|$

进而假设存在常数 $\mu < a - |cb| - |b+ac|$ 使得

$$|\sigma(t, x, y)|^2 \leqslant \mu |x|^2 + [a - |cb| - |b+ac|] |y|^2$$
$$\forall (t, x, y) \in R_+ \times R \times R \tag{10.3-27}$$

根据上面的推论,可知(10.3-26)式的零解几乎必然指数稳定,进而最高 Ляпунов 指数不超过 $-(\alpha \wedge \beta)/2$。这里

$\alpha \in (0, a - |cb| - |b+ac| - \mu)$是下列方程

$$2\alpha + \alpha e^{\alpha\tau}[2c^2 + \tau(a + |cb|)^2] = a - |cb| - |b+ac| - \mu \tag{10.3-28}$$

$\beta = -2\tau^{-1}\lg|c|$ 的唯一解。

例如 令 $a=3$ $b=2$ $c=-0.5$ $\tau=0.01$ $\mu=0.5$, 则方程(10.3-28)变为

$$2\alpha + 0.66ac^{0.01\alpha} = 1$$

它的解是

$$\alpha = 0.37558 \qquad \beta = -200\lg 0.5 > \alpha$$

Ляпунов 最高指数不超过-0.18779。

例 2　考虑一个 2 维随机中立型微分方程

$$\begin{aligned} d[x(t) - Cx(t-\tau)] &= [Ax(t) + Bx(t-\tau)]dt \\ &+ \sigma(t, x(t), x(t-\tau))dw(t) \end{aligned} \qquad (10.3\text{-}29)$$

这里　$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$\sigma \in C[R_+ \times R^2 \times R^2, R^{2\times m}]$ 是局部 Lipschitz 连续的，且

$$\text{trace}[\sigma^T(t,x,y)\sigma(t,x,y)] \leqslant 0.3\|x\|^2 + \|y\|^2$$

对一切$(t,x,y) \in R_+ \times R^2 \times R^2$ 成立。

选取　$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

则对称矩阵 H 有形式

$$H = \begin{pmatrix} -3.0 & 0 & -0.3 & -2.1 \\ 0 & -3.0 & 1.2 & 1.5 \\ -0.3 & 1.2 & -2.8 & -0.1 \\ -2.1 & 1.5 & -0.1 & -4.8 \end{pmatrix}$$

易验证 H 是负定矩阵，它的最大特征值是-0.84888，不难算出 $\|C\| = 0.423607$。

因此，根据定理 10.3.1 可知方程(10.3-29)的零解是几乎必然指数稳定的，其最高 Ляпунов 指数不超过$-(\alpha \wedge \beta)/2$，这里 $\alpha \in (0, 0.39776)$ 是

$$2\alpha + e^{\alpha\tau}(0.1511 + 0.358886\alpha + 25\alpha\tau) = 0.54888 \qquad (10.3\text{-}30)$$

的根。

且　$\beta = 1.1717998/\tau$，例如　取 $\tau = 0.01$，则方程(10.3-30)便变为

$$2\alpha + e^{0.01\alpha}(0.15111 + 0.608886\alpha) = 0.54888 \qquad (10.3\text{-}31)$$

它有解

$$\alpha = 0.15232 < \beta = 171.7998$$

故其最高 Ляпунов 指数不超过 -0.07616。

下面将上面的关于半线性随机中立型的结果推广到非线性中立型微分方程组。

考虑 n 维系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}[\boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}(t-\tau))] = f(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + \sigma(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t) \qquad t \geqslant 0 \\ \boldsymbol{x}(t) = \xi(t) \qquad -\tau \leqslant t \leqslant 0 \end{cases} \tag{10.3-32}$$

这里 $\omega(t), \sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\xi$ 与前面的假设一样。

$\boldsymbol{f} \in [R_+ \times R^n \times R^n, R^n]$ 是局部 Lipschitz 连续的,满足线性增长条件。

$G \in C[R^n, R^n]$ 满足

$$\| G(\boldsymbol{x}) \| \leqslant k \| \boldsymbol{x} \| \qquad \forall \boldsymbol{x} \in R^n \tag{10.3-33}$$

在这些假设下,(10.3-32)有唯一解,记为 $\boldsymbol{x}(t, \xi)$。同时还设

$$\boldsymbol{f}(t, 0, 0) \equiv 0 \qquad \sigma(t, 0, 0) \equiv 0$$

故(10.3-32)有零解 $\qquad \boldsymbol{x}(t, 0) \equiv 0$

定理 10.3.2 设(10.3-33)式成立,$k \in (0,1)$,且存在一个对称负定的 $n \times n$ 矩阵 D 和两个常数 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \in [0, \lambda_1)$,使得

$$2(\boldsymbol{x} - G(\boldsymbol{y}))^T f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{x}^T D \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y} + \mathrm{trace}[\sigma^T(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \leqslant -\lambda_1 \| \boldsymbol{x} \|^2 + \lambda_2 \| \boldsymbol{y} \|^2 \\ \forall (t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n \tag{10.3-34}$$

则(10.3-32)式的零解几乎必然指数稳定,且最高 Ляпунов 指数有估计式

$$\lim_{t \to \infty} \sup \frac{1}{t} \lg \| \boldsymbol{x}(t, \xi) \| \leqslant -\frac{\alpha \wedge \beta}{2} \tag{10.3-35}$$

这里 $\alpha \in (0, \lambda_1 - \lambda_2)$ 是方程

$$2\alpha + \alpha \mathrm{e}^{\alpha\tau}(\lambda_2 + 2\alpha k^2 + \alpha\tau \| D \|^2) = \lambda_1 \tag{10.3-36}$$

唯一解。且

$$\beta = -\frac{2}{\tau}\lg k > 0$$

此定理的证明可用定理 10.3.1 的同样的方法证明,故略。

定理 10.3.3 设(10.3-33)式成立,且 $k \in (0,1)$,并设存在一个对称正定的 $n \times n$ 矩阵 D 和两个常数 $\lambda_1 \geqslant 0$ 及 $\lambda_2 > \lambda_1$,使得

$$2(\boldsymbol{x} - G(\boldsymbol{y}))^T f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{x}^T D\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y} + \text{trace}[\sigma^T(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \leqslant \lambda_1 \|\boldsymbol{x}\|^2 - \lambda_2 \|\boldsymbol{y}\|^2$$

$$\forall (t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n \qquad (10.3\text{-}37)$$

设 λ 是D 的最小特征值,若 $\lambda_1 < \lambda$,则(10.3-32)式的零解是几乎指数稳定的,其 Ляпунов 指数有估计式

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lg\|\boldsymbol{x}(t,\xi)\| < -\frac{\alpha \wedge \beta}{2} \qquad (10.3\text{-}38)$$

这里 β 如定理 10.3.1 所定义的,$\alpha \in (0,\lambda)$是下列方程

$$\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau\|D\|^2 e^{\alpha\tau} = \lambda \wedge (\lambda_2 - 2\alpha k^2)e^{\alpha\tau} \qquad (10.3\text{-}39)$$

的最大解。

证:因为 $\lambda_1 < \lambda \wedge \lambda_2$, 方程(10.3-39)至少有一个解,但至多有有限多个解在$(0,\lambda)$之中,故最大解是唯一存在的。固定始值 ξ,记

$$\boldsymbol{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}(t,\xi)$$

设 $V(\xi,t)$是如同定理 10.3.1 中(10.3-14)式所定义。

再用 Itô 公式和条件(10.3-37)便能指出 $\forall v > 0$,有

$$e^{\alpha v}V(\boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)),v) \leqslant \zeta_5 + M(v) + \int_0^v e^{\alpha t}[(\lambda_1 + 2\alpha)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2 - (\lambda_2 - 2\alpha k^2) \cdot \|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2 + \alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^0 \|\boldsymbol{x}(t+s)\|^2 ds]dt \qquad (10.3\text{-}40)$$

这里 ξ_5 和 ξ_6 是有界 $\mathscr{F}$可测随机变量,且 $M(v)$是具有 $M(0)=0$ 几乎必然成立的连续鞅,注意

$$\int_0^v e^{\alpha t} \| x(t-\tau) \|^2 dt \geqslant e^{\alpha\tau} \int_0^{(v-\tau)\vee 0} e^{\alpha t} \| x(t) \|^2 dt \tag{10.3-41}$$

代(10.3-19)到(10.3-40)式中且应用(10.3-39)便有

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} V(x(v) - G(x(v-\tau)), v) \\ & \quad \leqslant \zeta_6 + M(v) + [\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau \| D \|^2 e^{\alpha\tau}] \int_{(v-\tau)\vee 0}^{v} e^{\alpha t} \| x(t) \|^2 dt \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} \| x(v) - G(x(v-\tau)) \|^2 + \lambda e^{\alpha v} \int_{v-\tau}^{v} \| x(t) \|^2 dt \\ & \quad \leqslant \zeta_6 + M(v) + [\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau \| D \|^2 e^{\alpha\tau}] e^{\alpha\tau} \int_{(v-\tau)\vee 0}^{v} \| x(t) \|^2 dt \end{aligned}$$

由(10.3-39)式,便能推出

$$e^{\alpha v} \| x(v) - G(x(v-\tau)) \|^2 \leqslant \zeta_6 + M(v) \quad \text{对所有 } v \geqslant 0 \text{ 成立。}$$

故从引理 10.3.1 和引理 10.3.2 推知结论成立。

例 3　考虑一个 n 维非线性中立型随机微分方程

$$\begin{aligned} d[x(t) - G(x(t-\tau))] &= [f_1(x(t)) + f_2(x(t-\tau))]dt \\ &\quad + \sigma(t, x(t), x(t-\tau)) dw(t) \end{aligned} \tag{10.3-42}$$

这里 G 和 $\sigma(t, x, y)$ 是如前面所定义。

$f_1, f_2 \in C[R^n, R^n]$ 是局部 Lipschitz 连续函数。

假设存在正数 $\gamma_i (1 \leqslant i \leqslant 6)$,使得

$$x^T f_1(x) \leqslant -\gamma_1 \| x \|^2 \qquad -G^T(y) f_2(y) \leqslant -\gamma_2 \| y \|^2$$

$$\| f_1(x) \| \leqslant \gamma_3 \| x \| \qquad \| f_2(y) \| \leqslant \gamma_4 \| y \|$$

$$\mathrm{trace}[\sigma^T(t, x, y) \sigma(t, x, y)] \leqslant \gamma_5 \| x \|^2 + \gamma_6 \| y \|^2$$

对所有 $t \geqslant 0$,及 $x, y \in R^n$ 成立。计算

$$\begin{aligned} & 2(x - G(y))^T (f_1(x) + f_2(y)) + \mathrm{trace}[\sigma^T(t, x, y) \sigma(t, x, y)] \\ & \quad \leqslant -2\gamma_1 \| x \|^2 - 2\gamma_2 \| y \|^2 + 2k\gamma_3 \| x \| \, \| y \| \\ & \qquad + 2\gamma_4 \| x \| \, \| y \| + \gamma_5 \| x \|^2 + \gamma_6 \| y \|^2 \\ & \quad \leqslant -(2\gamma_1 - k\gamma_4 - \gamma_4 - \gamma_5) \| x \|^2 + (-2\gamma_2 \end{aligned}$$

$$+ k\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6) \| y \|^2$$

因此,由定理 10.3.3,当 $D=0$,若

$$2\gamma_1 - k\gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_5 > 0$$

$$2\gamma_1 + 2\gamma_2 > 2k\gamma_3 + 2\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6$$

则方程(10.3-42)的零解是几乎必然指数稳定的。

§4 中立型随机微分差分方程的均方指数稳定性[198]

本节仍考虑随机中立型微分差分方程,(10.3-1)式全部沿用本章§3中的一切记号,但考虑其系统(10.3-1)的零解的均方指数稳定性,(10.3-1)式的零解的均方指数稳定性的定义可以仿本章§2进行。

引理 10.4.1 设 $G \in C[R^n, R^n]$ 是 Borel 可测函数,使得对某 $k \in (0,1)$,有

$$\| G(x) \| \leqslant k \| x \| \qquad \forall x \in R^n \tag{10.4-1}$$

设 $x(t)(-\tau \leqslant t < \infty)$ 是 n 维均方可积随机过程,使得

$$E \| x(t) - G(x(t-\tau)) \|^2 \leqslant K e^{-\alpha t} \qquad t \geqslant 0 \tag{10.4-2}$$

这里 α, K 是两个正数

则
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \lg(E \| x(t) \|^2) \leqslant -(\alpha \wedge \beta) \tag{10.4-3}$$

这里
$$\beta = -\frac{1}{\tau} \lg k > 0$$

证明:因为

$$\begin{aligned}
&\| x(t) - G(x(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant \| x(t) \|^2 - 2 \| x(t) \| \| G(x(t-\tau)) \| + \| G(x(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant \| x(t) \|^2 - k \| x(t) \|^2 - k^{-1} \| G(x(t-\tau)) \|^2 + \| G(x(t-\tau)) \|^2 \\
&\geqslant (1-k) \| x(t) \|^2 - k(1-k) \| x(t-\tau) \|^2
\end{aligned}$$

从(10.4-2)式推得

$$E \| x(t) \|^2 \leqslant \frac{K}{1-k} e^{-\alpha t} + kE \| x(t-\tau) \|^2$$

对所有的 $t \geqslant 0$ 成立。 (10.4-4)

设 $k = 0,1,2,\cdots$

$$\varphi_k = \sup_{(k-1)\tau \leqslant t \leqslant k\tau} E \| \boldsymbol{x}(t) \|^2$$

从(10.4-4)可得

$$\varphi_k \leqslant \frac{K}{1-k} \mathrm{e}^{-\alpha(k-1)\tau} + k\varphi_{k-1} \quad 对所有的\ k \geqslant 1\ 成立。 \quad (10.4-5)$$

固定自然数 $k_0 \geqslant 1$,使得

$$\frac{K}{1-k} \mathrm{e}^{-\alpha(k_0-1)\tau} \leqslant 1$$

设 $\gamma = \alpha \wedge \beta$,计及 $k = \mathrm{e}^{-\beta\tau} \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma\tau}$。

则从(10.4-5)式可得

$$\varphi_k \leqslant \mathrm{e}^{-\gamma(k-k_0)\tau} + \mathrm{e}^{-\gamma\tau}\varphi_{k-1} \qquad 对一切\ k > k_0。 \quad (10.4-6)$$

由归纳法可证

$$\varphi_k \leqslant (k - k_0)\mathrm{e}^{-\gamma(k-k_0)\tau} + \mathrm{e}^{-\gamma(k-k_0)\tau}\varphi_{k_0}$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{k\tau} \lg \varphi_k \leqslant -2\gamma$$

由 φ_k 的定义,直接可得

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \lg(E \| \boldsymbol{x}(t) \|^2) \leqslant -2\gamma$$

定理10.4.1 假设存在一个对称半正定矩阵 D,使得对称矩阵

$$H = \begin{pmatrix} A + A^T + D & B - A^T C \\ B^T - C^T A & -D - C^T B - B^T C \end{pmatrix}$$

负定,且令 $-\lambda$ 表示 H 的最大特征值,$\| C \| < 1$。

可设存在 $\mu \in [0, \lambda)$,使得

$$\mathrm{trace}[\sigma^T(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \leqslant \mu \| \boldsymbol{x} \|^2 + \lambda \| \boldsymbol{y} \|^2 \quad (10.4-7)$$

对所有 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n$ 成立。

则(10.4-1)式的零解是均方指数稳定的,最高二阶矩 Ляпунов 指

数有估计式

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg(E\parallel x(t;\xi)\parallel^2)\leqslant-(\alpha\wedge\beta)\quad(10.4\text{-}8)$$

这里 $\alpha\in(0,\lambda-\mu)$是方程

$$2\alpha+\alpha e^{\alpha\tau}(2\parallel C\parallel^2+\tau\parallel D\parallel^2)=\lambda-\mu\quad(10.4\text{-}9)$$

的根,且

$$\beta=-\frac{1}{\tau}\lg(\parallel C\parallel)>0$$

证:固定任意的始值 ξ,简记 $x(t)\overset{\text{def}}{=}x(t,\xi)$,构造 Ляпунов 函数

$$V(x,t)=\parallel x\parallel^2+\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s)Dx(t+s)\mathrm{d}s$$

$$\forall(x,t)\in R^n\times[0,\infty)\quad(10.4\text{-}10)$$

应用 Itô 公式到 $V(x(t)-Cx(t-\tau),t)$,且应用假设条件,能推出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}V(x(t)-Cx(t-\tau),t)\\
&=2(x(t)-Cx(t-\tau))^T([Ax(t)+Bx(t-\tau)]\mathrm{d}t\\
&\quad+\sigma(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t))+\mathrm{trace}(\sigma^T(t,x(t),\\
&\quad x(t-\tau))\sigma(t,x(t),x(t-\tau)))\mathrm{d}t\\
&\quad+(x^T(t)Dx(t)-x^T(t-\tau)Dx(t-\tau))\mathrm{d}t\\
&\leqslant(x^T(t),x^T(t-\tau))H(x^T(t),x^T(t-\tau))^T\mathrm{d}t\\
&\quad+(\mu\parallel x(t)\parallel^2+\lambda\parallel x(t-\tau)\parallel^2)\mathrm{d}t\\
&\quad+2(x(t)-Cx(t-\tau))^T\sigma(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t)\\
&\leqslant-(\lambda-\mu)\parallel x(t)\parallel^2\mathrm{d}t+2(x(t)-Cx(t-\tau))^T\\
&\quad\cdot\sigma(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t)
\end{aligned}\quad(10.4\text{-}11)$$

设 $\alpha\in(0,\lambda-\mu)$是方程(10.4-9)式的解,再次用 Itô 公式便有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(e^{\alpha t}V(x(t)-Cx(t-\tau),t))\\
&=\alpha e^{\alpha t}V(x(t)-Cx(t-\tau),t)\mathrm{d}t+e^{\alpha t}\mathrm{d}V(x(t)-Cx(t-\tau),t)\\
&\leqslant\alpha e^{\alpha t}(2\parallel x(t)\parallel^2+2\parallel C\parallel^2\parallel x(t-\tau)\parallel^2+\parallel D\parallel^2
\end{aligned}$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\|x(t+s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\alpha t}(-\lambda-\mu)\|x(t)\|^2\mathrm{d}t$$

$$+2(x(t)-Cx(t-\tau))^T\sigma(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t)$$

$$=\mathrm{e}^{\alpha t}(-(\lambda-\mu-2\alpha)\|x(t)\|^2+2\alpha\|C\|^2\|x(t-\tau)\|^2$$

$$+\alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|x(t+s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{\alpha t}(x(t)$$

$$-Cx(t-\tau))^T\sigma(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t) \qquad (10.4\text{-}12)$$

对(10.4-12)式两边从 0 到 $v>0$ 积分，且取数学期望，便有

$$\mathrm{e}^{\alpha v}EV(x(v)-Cx(v-\tau),v)\leqslant c_1$$

$$+\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}\Big(-(\lambda-\mu-2\alpha)E\|x(t)\|^2+2\alpha\|C\|^2E\|x(t-\tau)\|^2$$

$$+\alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}E\|x(t+s)\|^2\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \qquad (10.4\text{-}13)$$

这里

$$c_1=2E\|\xi(0)\|^2+2\|C\|^2|E\xi(-\tau)|^2+\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}E\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s$$

但是 $\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}E\|x(t-\tau)\|^2\mathrm{d}t\leqslant c_2+\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}E\|x(t)\|^2\mathrm{d}t$

$$(10.4\text{-}14)$$

这里 $c_2=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{-\tau}^{0}E\|\xi(s)\|^2\mathrm{d}s$

进而有 $\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}\int_{-\tau}^{0}E\|x(t+s)\|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha t}\int_{t-\tau}^{t}E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\tau}^{v}\Big(\int_{s\vee 0}^{(s+\tau)\wedge v}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t\Big)E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\int_{-\tau}^{v}\tau\mathrm{e}^{\alpha(s+\tau)}E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\tau c_2+\tau\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^v\mathrm{e}^{\alpha s}E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s \qquad (10.4\text{-}15)$$

代(10.4-14)、(10.4-15)式到(10.4-13)式去，便有

$$\mathrm{e}^{\alpha v}EV(x(v)-Cx(v-\tau),v)$$

$$\leqslant c_3+(-(\lambda-\mu-2\alpha)+\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}(2\|C\|^2+\tau\|D\|^2))$$

$$\cdot\int_v^0\mathrm{e}^{\alpha s}E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant c_3 \qquad (10.4\text{-}16)$$

这里 $$c_3 = c_1 + \alpha c_2(2\|C\|^2 + \tau\|D\|^2) \tag{10.4-17}$$

因此 $E|x(v) - Cx(v-\tau)|^2 \leqslant c_3 e^{-\alpha v}$ 对一切 $v \geqslant 0$ 成立。

最后,结论(10.4-8)式从引理 10.4.1 可得。

若在定理 10.4.2 取 $D=0$,便可得到推论 10.4.3。

推论 10.4.1 若对称矩阵

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} A + A^T & B - A^T C \\ B^T - C^T A & -C^T B - B^T C \end{pmatrix}$$

是负定的,以 $-\lambda$ 表示 $\overline{H}$ 的最大特征值,且设 $\|C\|<1$,又设存在 $\mu \in [0,\lambda)$,使得

$$\text{trace}[\sigma^T(t,x,y)\sigma(t,x,y)] \leqslant \mu\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2$$
$$\forall (t,x,y) \in R_+ \times R^n \times R^n$$

则(10.3-1)式的平凡解是均方程数稳定的。

推论 10.4.2 假设矩阵 $A + A^T$ 负定,且以 $-\eta$ 表示 $A + A^T$ 的最大特征值,又设 $\|C\|<1$, $\frac{\eta}{2} > \|C^T B\| + \|B - A^T C\|$

令 $\lambda = \frac{\eta}{2} - \|C^T B\| - \|B - A^T C\|$

进而假设存在 $\mu \in [0,\lambda)$,使得

$$\text{trace}[\sigma^T(t,x,y)\sigma(t,x,y)] \leqslant \mu\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2$$
$$\forall (t,x,y) \in R_+ \times R^n \times R^n \tag{10.4-18}$$

则(10.3-1)式的零解是均方指数稳定的,进而其解的最高二阶矩 Ляпунов 指数不超过 $-(\alpha \wedge \beta)$,这里 $\alpha \in (0, \lambda - \mu)$是方程

$$2\alpha + \alpha e^{\alpha\tau}\left(2\|C\|^2 + \tau\left[\frac{\eta}{2} + \|C^T B\|\right]^2\right) = \lambda - \mu \tag{10.4-19}$$

的解,β 如定理 10.4.1 所定义。

证:令 $D = \theta I$, I 为 $n \times n$ 单位矩阵

$$\theta = \frac{\eta}{2} + \|C^T B\|$$

令矩阵 H 如定理 10.4.1 所定义,验证 H 负定,它的最大特征值不超过 $-\lambda$,事实上 $\beta \forall x, y \in R^n$,有

$$(x^T, y^T)H\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^T(A + A^T)x + \theta \| x \|^2$$
$$+2x^T(B - A^TC)y - \theta |y|^2 - 2y^TC^TBy \leqslant -(\eta - \theta) \| x \|^2$$
$$+2 \| B - A^TC \| \| x \| \| y \| - (\theta - 2 \| C^TB \|) \| y \|^2$$
$$\leqslant -(\eta - \theta - \| B - A^TC \|) |x|^2 - (\theta - 2 \| C^TB \|$$
$$- \| B - A^TC \|) \| y \|^2 = -\lambda(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

因此,从定理 10.4.1 可知结论成立。

定理10.4.2 设定理 10.4.1 的条件(10.4-7)式以

$$\mathrm{trace}[\sigma^T(t, x, y)\sigma(t, x, y)] \leqslant \mu_1 \| x \|^2 + \mu_2 \| y \|^2$$
$$\forall (t, x, y) \in R_+ \times R^n \times R^n \tag{10.4-20}$$

这里 $\mu_1 \in (0, \lambda), \mu_2 \in (\lambda, 2\lambda)$ 使得

$$\mu_1 + \mu_2 < 2\lambda$$

替代其它条件均成立。

则(10.3-1)的零解是均方指数稳定的,进而其解的最高二阶矩 Лапунов 指数有估计式

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(E \| x(t; \xi) \|^2) \leqslant -(\alpha \wedge \beta) \tag{10.4-21}$$

这里 $\alpha \in (0, 2\lambda - \mu_1 - \mu_2)$ 是方程

$$2\alpha + e^{\alpha\tau}(\mu_2 - \lambda + 2\alpha \| C \|^2 + \alpha\tau \| D \|^2) = \lambda - \mu_1 \tag{10.4-22}$$

的根,且

$$\beta = -\frac{1}{\tau}\lg(\| C \|) > 0.$$

证: 与定理 10.4.1 证明同样的方法,用 Itô 公式便有

$$dV(x(t) - Cx(t - \tau), t)$$
$$\leqslant -(\lambda - \mu_1) \| x(t) \|^2 dt + (\mu_2 - \lambda) \| x(t - \tau) \|^2 dt$$
$$+ 2(x(t) - Cx(t - \tau))^T \sigma(t, x(t), x(t - \tau)) dw(t)$$

从而

$$d(e^{\alpha t} V(x(t) - Cx(t - \tau), t))$$
$$\leqslant e^{\alpha t}(-(\lambda - \mu_1 - 2\alpha) \| x(t) \|^2 + (\mu_2 - \lambda + 2\alpha \| C \|^2)$$

$$\cdot \|x(t-\tau)\|^2) + \alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}\|x(t+s)\|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$+ 2\mathrm{e}^{\alpha t}(x(t) - Cx(t-\tau))^T\sigma(t, x(t), x(t-\tau))\mathrm{d}w(t)$$

故对 $\forall\, v \geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\alpha v}EV(x(v) - Cx(v-\tau), v) \\
&\quad\leqslant c_1 + \int_0^v \mathrm{e}^{\alpha t}(-(\lambda - \mu - 2\alpha)E\|x(t)\|^2 + (\mu_2 - \lambda \\
&\quad + 2\alpha\|C\|^2)E\|x(t-\tau)\|^2 \\
&\quad + \alpha\|D\|^2\int_{-\tau}^{0}E\|x(t+s)\|^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{10.4-23}$$

代(10.4-14)、(10.4-15)式到不等式(10.4-23)中,便有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\alpha v}EV(x(v) - Cx(v-\tau), v) \\
&\leqslant c_5 + (-(\lambda - \mu_1 - 2\alpha) + \mathrm{e}^{\alpha\tau}(\mu_2 - \lambda + 2\alpha\|C\|^2 \\
&+ \alpha\tau\|D\|^2))\int_0^v \mathrm{e}^{\alpha s}E\|x(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant c_5
\end{aligned}$$

因而

$$E\|x(v) - Cx(v-\tau)\|^2 \leqslant c_5\mathrm{e}^{-\alpha v} \qquad \text{对所有 } v \geqslant 0 \text{ 成立。} \tag{10.4-24}$$

这里 c_5 是常数。

现从引理 10.4.1 可知结论成立。

推论 10.4.3 设对称矩阵 $A + A^T$ 负定,且以 $-\eta$ 表示它的最大特征值,且设 $\|C\| < 1$,及

$$\frac{\eta}{2} > \|C^TB\| + \|B - A^TC\|$$

令 $\lambda = \dfrac{\eta}{2} - \|C^TB\| - \|B - A^TC\|$

进而假设存在 $\mu_1 \in (0, \lambda)$, $\mu_2 \in (\lambda, 2\lambda)$, 使得

$$\mu_1 + \mu_2 < 2\lambda$$

且 $\quad \mathrm{trace}[\sigma^T(t, x, y)\sigma(t, x, y)] \leqslant \mu_1\|x\|^2 + \mu_2\|y\|^2$

$$\forall (x, y) \in R^n \times R^n$$

则(10.3-1)的零解是均方指数稳定的。

此推论可用推论 10.4.2 同样的方法,但要用定理 10.4.2 代定理 10.4.1,即可证之。

下面考虑非线性中立型随机微分系统(10.3-32)式满足前面关于(10.3-32)和(10.3-33)式的一切假设。

定理 10.4.3 设(10.3-33)式成立,$k\in(0,1)$,且存在一个对称非负的 $n\times n$ 矩阵 D 和两个常数 $\lambda_1>0$ 及 $\lambda_2\in[0,\lambda_1)$,使得

$$2(\boldsymbol{x}-G(y))^T f(t,\boldsymbol{x},y)+\boldsymbol{x}^T D\boldsymbol{x}-y^T Dy$$
$$+\mathrm{trace}[\sigma^T(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\leqslant-\lambda_1\|\boldsymbol{x}\|^2+\lambda_2\|\boldsymbol{y}\|^2$$
$$\text{对一切}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R_+\times R^n\times R^n \tag{10.4-25}$$

成立。

则(10.3-32)式的平凡解是均方指数稳定的,且最高二阶矩 Ляпунов 指数有估计式

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\lg(E\|\boldsymbol{x}(t;\xi)\|^2)\leqslant-(\alpha\wedge\beta) \tag{10.4-26}$$

这里 $\alpha\in(0,\lambda_1-\lambda_2)$是方程

$$2\alpha+\alpha e^{\alpha\tau}(\lambda_2+2\alpha k^2+\alpha\tau\|D\|^2)=\lambda_1 \tag{10.4-27}$$

的唯一解,且

$$\beta=-\frac{1}{\tau}\lg k>0$$

证:仍用 Ляпунов 函数

$$V(\boldsymbol{x},t)=\|\boldsymbol{x}\|^2+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{x}^T(t+s)D\boldsymbol{x}(t+s)\mathrm{d}s$$

并用 Itô 公式及条件(10.4-25)式便有

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}(t-\tau)),t)$$
$$\leqslant(-\lambda_1\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\lambda_2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2)\mathrm{d}t$$
$$+2(\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^T\sigma(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t)$$

设 $\alpha\in(0,\lambda_1-\lambda_2)$是方程(10.4-27)的唯一解,则有

$$\mathrm{d}(e^{\alpha t}V(\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}(t-\tau)),t))$$
$$\leqslant e^{\alpha t}(-(\lambda_1-2\alpha)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+(\lambda_2+2\alpha k^2)\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|^2)$$

$$+ \alpha \| D \|^2 \int_{-\tau}^{0} \| \boldsymbol{x}(t+s) \|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{x}(t) - G(\boldsymbol{x}(t-\tau)))^T \sigma(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau))\mathrm{d}w(t) \tag{10.4-28}$$

从 0 到任意 $v \geqslant 0$ 积分这不等式的两边，且取数学期望，应用(10.4-14)、(10.4-15)式便能得到

$$\mathrm{e}^{\alpha v} EV(\boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)), v) \leqslant c_6 \quad (10.4\text{-}28)$$

c_6 是一个常数，因为 D 是半正定的，从 $V(\boldsymbol{x}, t)$ 的定义可看出

$$E \| \boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)) \|^2 \leqslant c_6 \mathrm{e}^{-\alpha v} \qquad \forall v \geqslant 0$$

从引理 10.4.1 可知结论成立。

若在上述定理中 $D=0$ 便得到推论 10.4.4。

推论 10.4.4 设(10.3-33)成立，且 $k \in (0,1)$，假设存在两个常数 $\lambda_1 > 0$ 和 $\lambda_2 \in [0, \lambda_1)$，使得

$$2(\boldsymbol{x} - G(\boldsymbol{y}))^T f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \operatorname{trace}[\sigma^T(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \leqslant -\lambda_1 \| \boldsymbol{x} \|^2 + \lambda_2 \| \boldsymbol{y} \|^2 \tag{10.4-29}$$

对一切 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R_+ \times R^n \times R^n$ 成立。

则(10.3-32)式的零解是均方指数稳定的。

定理 10.4.4 设(10.3-32)式成立，且 $k \in (0,1)$，假设存在对称正定的 $n \times n$ 矩阵 D 和两个常数 $\lambda_1 \geqslant 0$ 和 $\lambda_2 > \lambda_1$，使得

$$2(\boldsymbol{x} - G(\boldsymbol{y}))^T f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{x}^T D \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y} + \operatorname{trace}[\sigma^T(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sigma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \leqslant -\lambda_1 \| \boldsymbol{x} \|^2 + \lambda_2 \| \boldsymbol{y} \|^2 \tag{10.4-30}$$

对一切 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R^+ \times R^n \times R^n$ 成立，且设 λ 是 D 的最小特征值，若 $\lambda_1 < \lambda$，则方程(10.3-32)是均方指数稳定的，且最高的二阶矩 Ляпунов 指数有估计式

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \lg(E \| \boldsymbol{x}(t; \xi) \|^2) \leqslant -(\alpha \wedge \beta) \tag{10.4-31}$$

这里 $\alpha \in (0, \lambda)$ 是方程

$$\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau \| D \|^2 \mathrm{e}^{\alpha\tau} = \lambda \wedge (\lambda_2 - 2\alpha k^2) \mathrm{e}^{\alpha\tau} \tag{10.4-32}$$

的最大解,且

$$\beta = -\frac{1}{\tau}\lg k > 0$$

证:用前面同样的记号,因为$\lambda_1 < \lambda \wedge \lambda_2$,方程(10.4-32)至少有一个解,但至多有有限个解在(0,1)内,因此,最大解恒唯一存在,用 Itô 公式和条件(10.4-30)式便能推出对 $\forall v > 0$,有

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} EV(\boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)), v) \\ & \leqslant c_7 + \int_0^v e^{\alpha t}\Big((\lambda_1 + 2\alpha)E \mid \boldsymbol{x}(t) \mid^2 - (\lambda_2 - 2\alpha k^2)E \parallel \boldsymbol{x}(t-\tau) \parallel^2 \\ & \quad + \alpha \parallel D \parallel^2 \int_{-\tau}^0 E \parallel \boldsymbol{x}(t+s) \parallel^2 ds\Big) dt \end{aligned} \tag{10.4-33}$$

此处,c_7 和 c_8 均为常数,计及

$$\int_0^v e^{\alpha t} E \parallel \boldsymbol{x}(t-\tau) \parallel^2 dt \geqslant e^{\alpha\tau}\int_0^{(v-\tau)\vee 0} e^{\alpha t} E \parallel \boldsymbol{x}(t) \parallel^2 dt \tag{10.4-34}$$

代这个不等式和(10.4-15)式到(10.4-33)式并利用(10.4-32)式便能得到

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} EV(\boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)), v) \\ & \leqslant c_8 + [\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau \parallel D \parallel^2 e^{\alpha\tau}]\int_{(v-\tau)\vee 0}^v e^{\alpha t} E \parallel \boldsymbol{x}(t) \parallel^2 dt \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & e^{\alpha v} E \mid \boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)) \mid^2 + \lambda e^{\alpha v}\int_{v-\tau}^v E \parallel \boldsymbol{x}(t) \parallel^2 dt \\ & \leqslant c_8 + [\lambda_1 + 2\alpha + \alpha\tau \parallel D \parallel^2 e^{\alpha\tau}] e^{\alpha t}\int_{(v-\tau)\vee 0}^v E \parallel \boldsymbol{x}(t) \parallel^2 dt \end{aligned}$$

此外,c_7 和 c_8 均为常数。从而有

$E \mid \boldsymbol{x}(v) - G(\boldsymbol{x}(v-\tau)) \mid^2 \leqslant c_8 e^{-\alpha v}$　　对所有 $v \geqslant 0$ 成立。

故从引理 10.4.1 推知结论成立。

例 1　仍考虑本章§3 中的例 2

取 $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$　则

$$H=\begin{bmatrix}-3.0 & 0 & -0.3 & -2.1\\ 0 & -3.0 & 1.2 & 1.5\\ -0.3 & 1.2 & -2.8 & -0.1\\ -2.1 & 1.5 & -0.1 & -4.8\end{bmatrix} \qquad (10.4\text{-}35)$$

是负定的，它的最大特征值是 -0.84888。不难验证 $\|C\|=0.423607$。因此，由定理 10.4.4，可知方程是均方指数稳定的，且最高二阶矩 Ляпунов 指数不大于 $-(\alpha\wedge\beta)$，$\alpha\in(0,0.39776)$ 是方程

$$2\alpha+e^{\alpha\tau}(0.15111+0.358886\alpha+25\alpha\tau)=0.54888 \qquad (10.4\text{-}36)$$

的根，且

$$\beta=0.858999/\tau$$

例如取 $\tau=0.01$，则方程(10.4-36)变为

$$2\alpha+e^{0.01\alpha}(0.15111+0.608886\alpha)=0.54888$$

此方程有解 $\alpha=0.15232<\beta=85.8999$。
故在此情况下二阶矩 Ляпунов 指数不超过 -0.15232。

§5 随机中立型大系统的均方稳定性[191]

考虑由下列中立型随机微分方程描述的大系统

$$\begin{cases} d[x(t)-(C_{ij}(t))x(t-\tau)]=[\mathrm{diag}(\overline{A}_{11}(t),\cdots,\\ \quad \overline{A}_{rr}(t))x+(A_{ij}(t))x(t)+(B_{ij}(t))x(t-\tau)]dt\\ \quad +\sigma(x,x(t))x(t-\tau)d\omega(t) & (10.5\text{-}1)\\ x(t)=\varphi(t) \qquad t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0 & (10.5\text{-}2)\end{cases}$$

其中 $\overline{A}_{ii}(t)$ 是在 $t\geqslant t_0$ 的上 $n_i\times n_i$ 连续矩阵函数，$A_{ij}(t)$，$B_{ij}(t)$，$C_{ij}(t)$ 是 $t\geqslant0$ 上的 $n_i\times n_j$ 连续矩阵函数，$i,j=1,2,\cdots,r$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$，$\omega(t)=(\omega_1(t),\cdots,\omega_m(t))^T$ 是定义在具有自然滤波 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},p)$ 上的 Brown 运动，$\sigma(t,x,y)\in C[R_+\times R^n\times R^n,R^{n\times m}]$，令

$$x=(x_1,\cdots,x_r)^T \qquad \overline{\varphi}=(\overline{\varphi}_1,\cdots,\overline{\varphi}_r)^T$$

$$\boldsymbol{x}_i, \overline{\varphi}_i \in R^{n_i} \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

$$\sigma(t,\boldsymbol{x},y) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t,\boldsymbol{x},y) \\ \sigma_{22}(t,\boldsymbol{x},y) \\ \cdots \\ \sigma_{rr}(t,\boldsymbol{x},y) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ii}(t,\boldsymbol{x},y) \in R^{n_i \times n_i} \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

设 $\sigma(t,\boldsymbol{x},y)$是局部 Lipschitz 连续的,且对$\forall\, \boldsymbol{x},y \in R^n$,有

$$\| \sigma_{ii}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{r}(l_{ij}^2(t) \| \boldsymbol{x}_j \|^2 + \hat{l}_{ij} \| \boldsymbol{y}_j \|^2) \quad i=1,2,\cdots,r$$

因此,σ 满足线性增长条件(10.5-1)$\cup$(10.5-2)式有唯一解,$\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)$表示(10.5-1)$\cup$(10.5-2)式之解。

显然 $\sigma(t,0,0)\equiv 0$,故(10.5-1)式有平衡位置 $\boldsymbol{x}(t,0,0)=0$。

设 $K_{ii}(t,t_0)$是线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} = \overline{A}_{ii}(t)\boldsymbol{x}_i \tag{10.5-3}$$

的 Cauchy 矩阵解(即标准基本解矩阵),$i=1,2,\cdots,r$。

先建立常数变易法公式。

引理 10.5.1 考虑中立型随机微分方程

$$\mathrm{d}[\boldsymbol{x}(t) - C(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)] = A(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}\omega(t) \tag{10.5-4}$$

这里 $A(t)$,$C(t)$是在 $t \geqslant t_0$ 上的连续的 $n \times n$ 矩阵函数,$f(t)$是在 $t \geqslant t_0$ 连续的 $n \times m$ 矩阵函数,$g(t)$是在 $t \geqslant t_0$ 连续的 n 维向量函数。

则有下列的常数变易法公式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) = {} & K(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) - k(t,t_0)C(t_0)\boldsymbol{x}(t_0-\tau) + C(t)\boldsymbol{x}(t-\tau) \\ & + \int_{t_0}^{t} K(t,\boldsymbol{x})A(s)C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} K(t,s)g(s)\mathrm{d}s \\ & + \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)\mathrm{d}\omega(s) \qquad \text{成立} \end{aligned} \tag{10.5-5}$$

这里 $K(t,t_0)$是下列常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x} \quad t \geqslant t_0 \tag{10.5-6}$$

的 Cauchy 矩阵解。

证:由 Itô 公式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}[K(t,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}(s) - C(s))\boldsymbol{x}(s-\tau)] = \frac{\mathrm{d}K(t,\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}s} \\
&\quad \cdot[\boldsymbol{x}(s) - C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)]\mathrm{d}s + K(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}[\boldsymbol{x}(s) - C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)] \\
&\quad = -K(t,\boldsymbol{x})A(s)[\boldsymbol{x}(s) - C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)]\mathrm{d}s \\
&\quad + K(t,\boldsymbol{x})[A(s)\boldsymbol{x}(s) + g(s)]\mathrm{d}s + f(s)\mathrm{d}\omega(s)
\end{aligned} \tag{10.5-7}$$

对(10.5-7)式两边进行积分便有

$$\begin{aligned}
&K(t,t)[\boldsymbol{x}(t) - C(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)] - K(t,t_0)[\boldsymbol{x}(t_0) - C(t_0) \\
&\qquad \boldsymbol{x}(t_0-\tau)] = -\int_{t_0}^{t} K(t,s)A(s)[\boldsymbol{x}(s) - C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)]\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} K(t,s)[A(s)\boldsymbol{x}(s) + g(s)]\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)\mathrm{d}\omega(s) \\
&\qquad = \int_{t_0}^{t} K(t,s)A(s)C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} K(t,s)A(s)g(s)\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)\mathrm{d}\omega(s)
\end{aligned} \tag{10.5-8}$$

即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= K(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) - K(t,t_0)C(t_0)\boldsymbol{x}(t_0-\tau) + C(t)\boldsymbol{x}(t-\tau) \\
&+ \int_{t_0}^{t} K(t,s)A(s)C(s)\boldsymbol{x}(s-\tau)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} K(t,s)g(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)\mathrm{d}\omega(s)
\end{aligned} \tag{10.5-9}$$

引理 10.5.1 获证。

定理 10.5.1 假设下列条件满足:

1)存在连续函数 $\lambda_i(t), u(t) \in C[I,R], u(t) < \lambda_i(t)$,及常数 M_i、η_i,使得

$$\| K_{ii}(t,t_0) \| \leqslant \sqrt{\frac{M_i}{7r}} e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda_i(t_1) dt_1} \quad t \geqslant t_0 \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{10.5-10}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_1}^{t} \lambda_i(t_2) dt_2} dt_1 \leqslant \eta_i \qquad t \geqslant t_0 \quad i = 1,2,\cdots,r \tag{10.5-11}$$

2)存在常数矩阵 $H=(h_{ij})_{r\times r}$使得

$I_{r\times r}-H$ 是一个 M 矩阵,且

$$\eta_i M_i \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_1}^{t} (\lambda_i(t_2) dt_2 - u(t_2)) dt_2} \| A_{ij}(t_1) \|^2 dt_1$$

$$+ \eta_i M_i \int_{t_1}^{t-\tau} e^{-\int_{t_1+\tau}^{t} \lambda_i(t_2) dt_2 + \int_{t_1}^{t} u(t_2) dt_2} \| B_{ij}(t_1+\tau) \|^2 dt_1$$

$$+ \eta_i M_i \int_{t_0}^{t-\tau} e^{-\int_{t_2+\tau}^{t} \lambda_i(t_2) dt_2 + \int_{t_1}^{t} u(t_2) dt_2} \| \overline{A}_{ij}(t_1+\tau) \|^2 \| C_{ij}(t_1+\tau) \|^2 dt_1$$

$$+ \int_{t_0}^{t} M_i e^{-\int_{t_1}^{t} (2\lambda_i(t_2) - u(t_2) dt_2} l_{ij}^2(t_1) dt_1$$

$$+ \int_{t_0}^{t-\tau} M_i \cdot e^{-\int_{t_1+\tau}^{\tau} 2\lambda_i(t_2) dt_2 + \int_{t_1+\tau}^{t} -(a\lambda_i(t_2+ut_2)) dt_2} l_{ij}^2(t_1) dt_1$$

$$+ 7r \| C_{ij}(t) \|^2 \cdot e^{-\int_{t-\tau}^{t} u(t_1) dt_1} \leqslant h_{ij} \quad t \geqslant t_0 \quad i,j = 1,2,\cdots,r$$

则(10.5-1)式的解有估计式

$$\mathrm{col}(E \| \boldsymbol{x}_1(t) \|^2, \cdots, E \| \boldsymbol{x}_r(t) \|^2)$$

$$\leqslant (I-H)^{-1} \mathrm{col}(M_1^*, \cdots, M_r^*) e^{-\int_{t_0}^{t} u(t_1) dt_1}$$

这里 $M_i^*(i=1,2,\cdots,r)$是一些正的常数。

证:对任意始值 $\overline{\Phi}$,令 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\varphi)$,由引理 10.5.1,有

$$\boldsymbol{x}_i(t) = K_{ii}(t,t_0)\boldsymbol{x}_i(t_0) - K_{ii}(t,t_0)\sum_{j=1}^{r} C_{ij}(t_0)\boldsymbol{x}_j(t_0-\tau)$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} C_{ij}(t)\boldsymbol{x}_j(t-\tau) + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t_1)\overline{A}_{ii}(t_1)\sum_{j=1}^{r} C_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j(t_1-\tau)$$

$$\cdot dt_1 + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t_1,t_1)\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t_1,t_1)$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} B_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j(t_1-\tau)\mathrm{d}t_1 + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t_1,t_1)\sigma_{ii}$$

$$\cdot (t_1,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}(t_1-\tau)\mathrm{d}w(t_1) \quad t \geqslant t_0 \quad i=1,2,\cdots r \tag{10.5-12}$$

现定义 Picard 逼近

$$\boldsymbol{x}^m(t)=\overline{\Phi}(t) \quad t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0 \quad m=0,1,2,\cdots$$

$$\boldsymbol{x}_i^{(0)}(t)=K_{ii}(t,t_0)\overline{\Phi}_i(t_0)-K_{ii}(t,t_0)\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t_0)\overline{\Phi}_j(t_0-\tau)$$

$$t\geqslant t_0 \quad i=1,2,\cdots,r \tag{10.5-13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^{(m)}(t) = {} & \boldsymbol{x}_i^{(0)}(t) + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t,t_1)\sum_{j=1}^{r}A_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1)\mathrm{d}t_1 \\ & + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t,t_1)\sum_{j=1}^{r}B_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1-\tau)\mathrm{d}t_1 \\ & + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t,t_1)A_{ii}(t_1)\sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t_1)\boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1-\tau)\mathrm{d}t_1 \\ & + \sum_{j=1}^{r}C_{ij}(t)\boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t-\tau) + \int_{t_0}^{t} K_{ii}(t,t_1)\overline{\sigma}_{ii}(t_1,\boldsymbol{x}^{(m-1)}) \\ & \cdot (t_1)\boldsymbol{x}^{(m-1)}(t_1-\tau)\mathrm{d}\omega(t_1) \quad t\geqslant t_0 \quad i=1,2,\cdots,r\end{aligned} \tag{10.5-14}$$

为同标准的证明存在唯一的 Picard 逐步逼近程序[参考 Friedman][199],能证明在 L^2 内,$\boldsymbol{x}^{(m)}(t)\rightarrow\boldsymbol{x}(t)$,当 $m\rightarrow\infty$,因为

$$\| K_{ii}(t,t_0) \| \leqslant\sqrt{\frac{M_i}{7r}}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\lambda_i(t)\mathrm{d}t_1} \qquad \lambda_i(t) > \mu(t)$$

则存在正数 $\hat{M}_i$,使得

$$E\| \boldsymbol{x}_i^{(0)}(t) \|^2\leqslant\frac{\hat{M}_i}{7}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1} \qquad i=1,2,\cdots,r \qquad t\geqslant t_0 \tag{10.5-15}$$

由 Hölder 不等式,能证明

$$E\| \boldsymbol{x}_i^{(m)}(t) \|^2 \leqslant \hat{M}_{ii}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$+ 7E\int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \| \mathrm{d}t_1 \cdot \int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \|$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} \| A_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ 7r\int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \| \mathrm{d}t_1 \cdot \int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \|$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} \| B_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1 - \tau) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ 7r \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t - \tau) \|^2$$

$$+ 7r\int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| l_{ij}^2(t_1) \| E \| \boldsymbol{x}^{(m-1)}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ 7r\int_{t_0}^{t} \| K_{ii}(t,t_1) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| \hat{l}_{ij}^2 \| E \| \boldsymbol{x}^{(m-1)}(t_1 - \tau) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$\leqslant \hat{M}_i \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$+ M_i \eta_i \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \sum_{j=1}^{r} \| A_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ M_i \eta_i \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \sum_{j=1}^{r} \| B_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1 - \tau) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ M_i \eta_i \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \cdot \| \overline{A}_{ii}(t_1) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}$$

$$\cdot (t_1 - \tau) \|^2 \mathrm{d}t_1 + \tau r \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1 - \tau) \|^2$$

$$+ \int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} 2\lambda_i(t_1)\mathrm{d}t_1} \sum_{j=1}^{r} l_{ij}^2(t_1) E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ \int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t} 2\lambda_i(t_1)\mathrm{d}t_1} \sum_{j=1}^{r} \hat{l}_{ij}^2(t_1) E \| \boldsymbol{x}_j^{(m-1)}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$\leqslant \hat{M}_i \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \mu(t_1)\mathrm{d}t_1} + M_i \eta_i \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} \| B_{ij}(t_1 + \tau) \|^2 E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1 e^{-\int_{t_0}^{t} \mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$+ M_i \eta_i \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2}$$

$$\cdot \| \overline{A}_{ii}(t_1 + \tau) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1 + \tau) \|^2 E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$\cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \mu(t_1)\mathrm{d}t_1} + M_i \eta_i \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0} \lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} \| \bar{l}_{ii}(t_1+\tau) \|^2 E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1 e^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$+ M_i\eta_i \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t_0}\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \cdot \sum_{j=1}^{r} \| A_{ij}(t_1) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{m-1}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ M_i\eta_i \int_{t_0}^{t-\tau} \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t}\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \cdot \sum_{j=1}^{r} \| B_{ij}(t_1+\tau) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{m-1}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ M_i\eta_i \int_{t_0}^{t-\tau} \mathrm{e}^{-\int_{t_1-\tau}^{t}\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2}$$

$$\cdot \| \overline{A_{ij}}(t_1+\tau) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1+\tau) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{m-1}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ 7r \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t) \|^2 E \| \boldsymbol{x}_j^{m-1}(t-\tau) \|^2$$

$$+ M_i \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}2\lambda_i(t_1)\mathrm{d}t_1} \sum_{j=1}^{r} l_{ij}^2(t_1) E \| \boldsymbol{x}^{m-1}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ M_i \int_{t_0}^{t-\tau} \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t}2\lambda_i(t_1)\mathrm{d}t_1} \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{ij}^2(t_1) E \| \boldsymbol{x}^{m-1}(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1 \qquad (10.5\text{-}16)$$

$$\hat{M}_i + \int_{t_0-\tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0}\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \sum_{j=1}^{r} \| B_{ij}(t_1+\tau) \|^2 E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ \int_{t_0-\tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0}2\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2} \| \overline{A}_{ii}(t_1+\tau) \|^2 \sum_{j=1}^{r} \| C_{ij}(t_1+\tau) \|^2$$

$$\cdot E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1$$

$$+ \frac{1}{\eta_i} \int_{t_0-\tau}^{t_0} \mathrm{e}^{-\int_{(t_1+\tau)\wedge t_0}^{t_0}2\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{r} \bar{l}_{ij}^2(t_1+\tau) \| E \| \Phi_j(t_1) \|^2 \mathrm{d}t_1 m_i\eta_i \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$\leqslant M_i^* \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1} \qquad (i=1,2,\cdots,r) \qquad (10.5\text{-}17)$$

这里，M_i^* 是一些正常数。

进而可得到

$$\mathrm{col}(E\| \boldsymbol{x}_0^{(0)}(t) \|^2, \cdots, E\| \boldsymbol{x}_r^{(0)}(t) \|^2) \leqslant \mathrm{col}(\hat{M}_1, \cdots, \hat{M}_r)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$\leqslant \mathrm{col}(\hat{M}_1^*, \cdots, \hat{M}_r^*)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1} \qquad (10.5\text{-}18)$$

$$E\| \boldsymbol{x}_i^{(1)} \|^2 \leqslant M_i^* \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1}$$

$$
\begin{aligned}
&+ M_i\eta_i\int_{t_0}^{t} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}(\lambda_i(t_2)-\mu(t_2))\mathrm{d}t_2}\sum_{j=1}^{r}\|A_{ij}(t_1)\|^2 \\
&\cdot M_j^* dt_1 \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} + M_i\eta_i\int_{t_0}^{t-\tau} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t}(\lambda_i(t_2)-\mu(t_2))\mathrm{d}t_2} \\
&\cdot \sum_{j=1}^{r}\|B_{ij}(t_1+\tau)\|^2 M_j^* \,\mathrm{d}t_1 \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \\
&+ M_i\eta_i\int_{t_0}^{t-\tau} M_i \mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t}(\lambda_i(t_2)-\mu(t_2))\mathrm{d}t_2}\|\overline{A}_{ii}(t_1+\tau)\|^2 \\
&\cdot \sum_{j=1}^{r}\|C_{ij}(t_1+\tau)\|^2 M_j^* dt_1 \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \\
&+ 7r\sum_{j=1}^{r}\|C_{ij}(t)\|^2 M_j^* \,\mathrm{e}^{-\int_{t-\tau}^{t}\mu(t_1)\mathrm{d}t_1-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \\
&+ M_i\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\int_{t_1}^{t}(2\lambda_i(t_1)-\mu(t_1))\mathrm{d}t_1}\sum_{j=1}^{r} l_{ij}^2 t_1 M_j^* \,\mathrm{d}t_1 \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \\
&+ M_i\int_{t_0}^{t\tau}\mathrm{e}^{-\int_{t_1+\tau}^{t}2\lambda_i(t_2)\mathrm{d}t_2+\int_{t_1}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \\
&\cdot \sum_{j=1}^{r}\hat{l}_{ij}^2(t_1)M_j^* \,\mathrm{d}(t_1)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \qquad i = 1,\cdots,r
\end{aligned}
\tag{10.5-19}
$$

改写(10.5-19)式为向量形式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{col}(E\|x_1^{(1)}(t)\|^2,\cdots,E\|x_r^{(1)}(t)\|^2) \\
\leqslant &(I_{r\times r}+H)\mathrm{col}(M_1^*,\cdots,M_r^*)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2} \qquad t\geqslant t_0
\end{aligned}
\tag{10.5-20}
$$

归纳法能证明对任何自然数，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{col}(E\|x_1^{(m)}(t)\|^2,\cdots,E\|x_r^{(m)}(t)\|^2) \\
\leqslant &(I_{r\times r}+H+\cdots+H^m)\mathrm{col}(M_1^*,\cdots,M_r^*)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)\mathrm{d}t_2}
\end{aligned}
\tag{10.5-21}
$$

成立。

因为$(I-H)_{r\times r}$是一个M矩阵，H的谱半径$\rho(H)<1$，故

$\sum_{m=0}^{\infty}H^m$收敛，且 $\qquad \sum_{m=0}^{\infty}H^m = (I-H)^{-1}\geqslant 0$

于是有

$$\text{col}(E\|x_1^{(m)}(t)\|^2,\cdots,E\|x_r^{(m)}(t)\|^2)$$

$$\to\text{col}(E\|x_1(t)\|^2,\cdots,E\|x_r(t)\|^2)\qquad \text{当 } m\to\infty \quad (10.5\text{-}22)$$

最后便得到估计式

$$\text{col}(E\|x_1(t)\|^2,\cdots,E\|x_r(t)\|^2)$$

$$\leqslant(1-H)^{-1}\text{col}(M_1^*,\cdots,M_r^*)e^{-\int_{t_0}^{t}\mu(t_2)dt_2}\qquad(10.5\text{-}23)$$

定理 10.5.1 获证。

定理10.5.2 若定理 5.2 的所有条件满足，则

1) $\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)dt_1\geqslant\alpha(t-t_0)\qquad \alpha=\text{const}>0$

蕴涵(10.5-1)式的平凡解均方指数稳定。

2) $\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)dt_1\Rightarrow+\infty$ 关于 t_0 一致成立，当 $t-t_0\to+\infty$，蕴涵(10.5-1)式的平凡解均方一致渐近稳定。

3) $\int_{t_0}^{t}\mu(t_1)dt_1\geqslant k=\text{const}$ 蕴涵(10.5-1)式的平凡解均方一致稳定。

这些结论立即可从(10.5-23)式获得。

考虑具有常系数的中立型线性随机大系统

$$\begin{cases}d[x(t)-(C_{ij})_{r\times r}x(t-\tau)]=[\text{diag}(\overline{A_{11}},\cdots,\overline{A_{rr}})x\\ +(A_{ij})_{r\times r}x(t)+(B_{ij})_{r\times r}x(t-\tau)]dt\\ +\sigma(t,x(t),x(t-\tau))dw(t) & (10.5\text{-}24)\\ x(t)=\Phi(t)\qquad t_0-r\leqslant t\leqslant t_0 & (10.5\text{-}25)\end{cases}$$

这里$\overline{A_{ii}},A_{ij},B_{ij},C_{ij}$分别是$n_i\times n_i,n_i\times n_j$常数矩阵。

$x(t),\Phi(t),\sigma(t,x,y)$见前面的定义。

$$\|\sigma_{ii}(t,x,y)\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{r}l_{ij}^2\|x_j\|^2+\sum_{j=1}^{r}\hat{l}_{ij}^2\|y_j\|^2$$

这里 $l_{ij},\hat{l}_{ij}$是常数，$i,j=1,2,\cdots,r$ 。

定理 10.5.3 假设

1) 存在常数 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,r$， 使得

$$\| e^{A_{ii}(t-t_0)} \| \leqslant \sqrt{\frac{M_i}{7r}} e^{-\lambda_i(t-t_0)} \qquad t \geqslant t_0 \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

2) $I_{r\times r} - \hat{H}(\hat{h}_{ij})_{r\times r}$是一个$M$矩阵。

这里 $\hat{H} = (\hat{h}_{ii})_{r\times r} = \Big[\frac{M_i}{\lambda_i^2}(\| A_{ij} \|^2 + \| B_{ij} \|^2 + \| \overline{A}_{ii} \|^2 \| C_{ij} \|^2)$

$$+ \frac{M_i}{2\lambda_i}(l_{ij}^2 + l_{ij}^{-2} + 7r \| C_{ij} \|^2)\Big]_{r\times r}$$

则(10.5-24)式的平凡解是全时滞均方指数稳定的。

特别地,如果

$$\max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big[\sum_{j=1}^{r}\frac{M_i \| A_{ij} \|^2}{\lambda_i^2} + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i \| B_{ij} \|^2}{\lambda_i^2} + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i \| \overline{A}_{ii} \| \| C_{ij} \|^2}{\lambda_i^2} + \sum_{j=1}^{r} 7r \| C_{ij} \|^2 + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i l_{ij}^2}{2\lambda_i} + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i l_{ij}^{-2}}{2\lambda_i}\Big] < 1 \qquad (10.5\text{-}26)$$

则 $\varepsilon = \varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$ 可以作为(10.5-24)式的均方指数稳定的指数估计式,即

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\lg(E \| \boldsymbol{x}(t) \|^2) \leqslant -\varepsilon$$

这里 ε 是下列不等式的解

$$\max_{1\leqslant i\leqslant r}\Big[\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\frac{M_i \| A_{ij} \|^2}{\lambda_i - \varepsilon} + \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\frac{M_i \| B_{ij} \|^2}{\lambda_i - \varepsilon}e^{\varepsilon\tau} + \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i}\cdot\frac{M_i \| \overline{A}_{ij} \|^2 \| C_{ij} \|^2}{\lambda_i - \varepsilon}e^{\varepsilon\tau} + \sum_{j=1}^{r} 7r \| C_{ij} \|^2 e^{\varepsilon\tau} + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i l_{ij}^2}{2\lambda_i - \varepsilon} + \sum_{j=1}^{r}\frac{M_i l_{ij}^{-2}}{2\lambda_i - \varepsilon}e^{\varepsilon\tau}\Big] < 1 \qquad (10.5\text{-}27)$$

证:显然

$$\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_i(t-t_1)} dt_1 \leqslant \frac{1}{\lambda_i} = \eta_i$$

取 $\mu(t) = \mu = \text{const} > 0$ 和 $0 < \mu < \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\lambda_i$

则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_i}\int_{t_0}^{t} M_i e^{-\int_{t_1}^{t}(\lambda_i-\mu)dt_2} \| A_{ij} \|^2 dt_1 \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i}\int_{t_0}^{t-\tau} M_i e^{-\int_{t_1+\tau}^{t}\lambda_i dt_2+\int_{t_1}^{t}\mu dt_2} \| B_{ij} \|^2 dt_1 \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_i}\int_{t_0}^{t-\tau} M_i e^{-\int_{t_1+\tau}^{t}\lambda_i dt_2+\int_{t_1}^{t}\mu dt_2} \| \overline{A}_{ij} \|^2 \| C_{ij} \|^2 dt_1 \\
&\quad + 7r \| C_{ij} \|^2 e^{-\int_{t-\tau}^{t}\mu dt_2} + \int_{t_0}^{t} M_i e^{-\int_{t_1}^{t}(2\lambda_i-\mu)dt_2} \iota_{ij}^2 dt_1 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t-\tau} M_i e^{-\int_{t_1+\tau}^{t}2\lambda_i dt_2+\int_{t_1}^{t}\mu dt_2} \cdot \iota_{ij}^{-2} dt_1 \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda_i}M_i \frac{1}{\lambda_i-\mu}\left[\| A_{ij} \|^2 + \| B_{ij} \|^2 e^{\mu\tau} + \| \overline{A}_{ii}^2 \| C_{ij} \|^2 e^{\mu\tau} \right] \\
&\quad + 7r \| C_{ij} \| 2e^{\mu\tau} + \frac{M_i\iota_{ij}^2}{2\lambda_i-\mu} + \sum_{j=1}^{r} \frac{M_i\hat{l}_{ij}^2}{2\lambda_i-\mu} e^{\mu\tau} = h_{ij}^*
\end{aligned}
\tag{10.5-28}
$$

$\forall \tau>0$,取 $0<\mu\ll 1$,使得

$$0 < e^{\mu\tau} - 1 \ll 1$$

由连续性可知,$I-\hat{H}(\hat{h}_{ii})$ 是一个 M 矩阵,蕴涵 $I-H^*(h_{ij}^*)$ 也是一个 M 矩阵,故定理 10.5.1 的条件成立。

这样,(10.5-24)式的平凡解是全时滞均方指数稳定的。

根据 M 矩阵的性质,知(10.5-27)、(10.5-28)式中任何一个条件成立,蕴涵 $I-H^*(h_{ij}^*)$ 是一个 M 矩阵,故结论成立。

§6 随机滞后型泛函微分方程的指数稳定性[207]

由于化学工程、航空工程,特别是随机系统的控制的发展,需要研究随机泛函微分方程,Kolmanovskii & Nosav[200] 最先研究了滞后型随机泛函微分方程

$$d\boldsymbol{x}(t) = f(t, \boldsymbol{x}_t)dt + g(t, \boldsymbol{x}_t)dW(t) \quad t \geqslant 0 \tag{10.6-1}$$

的稳定性。

他们得到了如下的抽象结果,若存在 Ляпунов 泛函 $V\in C[[0,+\infty)\times C([-\tau,0],R^n),R_+)$与正数 c_1、c_2、c_3,使得

$$c_1|\varphi(0)|^p\leqslant V(t,\varphi)\leqslant c_2\|\varphi\|^p$$
$$(t,\varphi)\in[0,+\infty)\times C[[-r,0],R^n]$$

及
$$EV(t_2,x_{t_2})-EV(t_1,x_{t_1})\leqslant -c_3\int_{t_1}^{t_2}E\|x(s)\|^p\mathrm{d}s$$
$$0\leqslant t_1<t_2<\infty \tag{10.6-2}$$

则(10.6-1)式的零解 p 阶矩渐近稳定,这显然是常微中 Ляпунов 直接法的推广,但由于构造 Ляпунов 泛函很困难,且定理的条件没有直接用到 $f(t,x_t)$,$g(t,x_t)$的性质。

英国毛学荣教授将 Разумихин 定理成功地推广到随机泛函微分方程(10.6-1),得到一些首创性结果,现予以介绍,先引进一些记号。

以 $C^b_{\mathscr{F}_{t_0}}([-r,0],R^n]$表示所有 $\mathscr{F}_0$ 可测,有界的 $C[[-r,0],R^n]$表示随机变量族,对于 $p>0$ 和 $t\geqslant0$,以 $L^p_{\mathscr{F}_t}[[-r,0],R^n]$表示所有 F_t 可测,$C[[-r,0],R^n]$表示随机变量 $\varphi=\{\varphi(\theta):-\tau\leqslant\varphi\leqslant0\}$,使得 $E\|\varphi\|^n<\infty$。

此外,对每个函数 $V(t,x)\in C^{1,2}[[t_0-\tau,\infty)\times R^n,R_T]$,定义一个算子 LV 从$C[0,\infty)\times C([-\tau,0],R^n)$映射到 R

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)=\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t}+\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x}f(t,\varphi)$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^T(t,\varphi)\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x\partial x}g(t,\varphi)] \tag{10.6-3}$$

以 $E\mathscr{L}V(t,x_t)$表示函数 V 沿(10.6-1)式的解 $x(t)=x(t,\xi)$的导数。

定理 10.6.1 设 λ,p,c_1,c_2 都是正常数,且 $q>1$ 假设存在 $V\in C^{1,2}([t_0-\tau,\infty)\times R^n,R_+)$使得

$$c_1\|x\|^p\leqslant V(t,x)\leqslant c_2\|x\|^p$$
$$\text{对所有}(t,x)\in[t_0-\tau,\infty)\times R^n\text{ 成立,} \tag{10.6-4}$$

且 $E\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant -\lambda EV(t,\varphi(0)) \quad t\geqslant 0 \quad (10.6\text{-}5)$

对于 $\psi\in L^p_{\mathscr{F}_t}[[-r,0],R^n]$

$$EV(t+\theta,\varphi(\theta)<qEV(t,\varphi(0)) \quad \text{在} -\tau\leqslant\theta\leqslant 0 \text{ 成立} \quad (10.6\text{-}6)$$

则对于所有 $\xi\in C^b_{\mathscr{F}_{t_0}}[[-\tau,0],R^n]$有

$$E\mid \boldsymbol{x}(t,\xi)\mid^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}E\parallel\xi\parallel^p\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \text{在 } t\geqslant t_0 \text{ 成立} \quad (10.6\text{-}7)$$

这里 $\gamma=\min\{\lambda,\lg(q)/\tau\}$。

证:固定任意始值 $\xi\in C^b_{\mathscr{F}_0}[[-r,0],R^b]$,简记 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\xi)$,$\forall\,\varepsilon\in(0,\gamma)$,令 $\tilde{\gamma}=\gamma-\varepsilon$,定义

$$U(t)=\max_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}[\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\theta)}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta)]\quad t\geqslant 0 \quad (10.6\text{-}8)$$

注意到 $E(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\parallel\boldsymbol{x}(s)\parallel^{\gamma}<\infty$,对所有 $\gamma>0$,以及 $\boldsymbol{x}(t)$,$V(t,\boldsymbol{x})$是连续的,$EV(t,\boldsymbol{x}(t))$连续,故 $U(t)$有定义且连续,因而断定

$$D^+U(t)\overset{\text{def}}{=}\limsup_{h\to 0^+}\frac{U(t+h)-U(t)}{t}\leqslant 0 \quad \text{对所有 } t\geqslant 0 \text{ 成立} \quad (10.6\text{-}9)$$

对每个 $t\geqslant t_0$,定义

$$\tilde{\theta}=\max\{\theta\in[-\tau,0]:\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\theta)}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))=U(t)\}$$

显然,$\tilde{\theta}$ 有定义,$\tilde{\theta}\in[-r,0]$,且

$$U(t)=\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\tilde{\theta})}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))$$

若 $\theta<0$,则

$$\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\theta)}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))<\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\tilde{\theta})}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))$$

对所有 $\tilde{\theta}<\theta\leqslant 0$ 成立。

易见,对所有 $h>0$ 充分小,有

$$\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+h)}EV(t+h,\boldsymbol{x}(t+h))<\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t+\tilde{\theta})}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta))$$

因此 $\quad U(t+h)\leqslant U(t) \quad$ 且 $\quad U(t)\leqslant 0 \quad$ 若 $\tilde{\theta}=0$,则

$$e^{\tilde{\gamma}(t+\theta)}EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta)) \leqslant e^{\tilde{\gamma}t}EV(t,\boldsymbol{x}(t))$$

对所有 $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$

$$EV(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta)) \leqslant e^{-\tilde{\gamma}\theta}EV(t,\boldsymbol{x}(t)) \leqslant e^{\tilde{\gamma}\tau}EV(t,\boldsymbol{x}(t))$$

对所有 $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$ 成立。 (10.6-10)

计及 $EV(t,\boldsymbol{x}(t))=0$ 或 $EV(t,\boldsymbol{x}(t))>0$

若 $EV(t,\boldsymbol{x}(t))=0$,则(10.6-10)式和(10.6-4)式可推出 $\boldsymbol{x}(t+\theta)=0$ 几乎必然成立,对所有 $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$,由于 $\boldsymbol{f}(t,0) \equiv \boldsymbol{g}(t,0) \equiv 0$,故 $\boldsymbol{x}(t+h)=0$ 几乎必然成立,对所有 $h>0$,因此 $U(t+h)=0$ 且 $U(t)=0$。

若 $EV(t,\boldsymbol{x}(t))>0$,则(10.6-10)式蕴涵

$V(t+\theta,\boldsymbol{x}(t+\theta)) < qEV(t,\boldsymbol{x}(t))$ 对所有 $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$ 成立。

因为 $e^{\tilde{\gamma}\tau} < q$,这样,由条件(10.6-5)式有

$$ELV(t,\boldsymbol{x}_t) \leqslant -\lambda EV(t,\boldsymbol{x}(t))$$

因此,由 Itô 公式,能得到对所有 $h>0$,有

$$e^{\tilde{\gamma}(t+h)}EV(t+h,\boldsymbol{x}(t+h)) - e^{\tilde{\gamma}t}EV(t,\boldsymbol{x}(t))$$
$$= \int_t^{t+h} e^{\tilde{\gamma}s}[\tilde{\gamma}EV(s,\boldsymbol{x}(s)) + E\mathscr{L}V(s,\boldsymbol{x}_s)]ds$$

注意 $\tilde{\gamma}EV(t,x(t)) + E\mathscr{L}V(t,\boldsymbol{x}_t) \leqslant -(\lambda-\tilde{\gamma})EV(t,\boldsymbol{x}(t)) < 0$

从 V 的连续性可知,对所有充分小的 $h>0$。

$\tilde{\gamma}EV(s,\boldsymbol{x}(s)) + E\mathscr{L}V(s,\boldsymbol{x}_s) \leqslant 0$ 当 $t \leqslant s \leqslant t+h$ 成立

因此

$$e^{\tilde{\gamma}(t+h)}EV(\boldsymbol{x}(t+h,t+h)) \leqslant e^{\tilde{\gamma}t}EV(t,\boldsymbol{x}(t))$$

故对所有充分小的 $h>0$ $U(t+h)=U(t)$

$$U(t)=0$$

不等式(10.6-9)获证,(10.6-9)式可推出

$U(t) \leqslant U(0)$, 对所有 $t \geqslant t_0$ 成立。

由 $U(t)$ 的定义和条件(10.6-4),便有

$$E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p \leqslant \frac{c_2}{c_1}E\|\xi\|^p e^{-\tilde{\gamma}t} = \frac{c_2}{c_1}E\|\xi\|^p e^{-(\gamma-\varepsilon)t}$$

由于 ε 的任意性,故定理结论(10.6-7)式成立。

定理 10.6.2 设 $p\geqslant 0$,且存在一常数 $K>0$,使得对(10.6-1)式的每个解满足

$$E(\|f(t,x_t)\|^p+\|g(x_t)\|^p)\leqslant K\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|x(t+\theta)\|^p\quad t\geqslant 0 \tag{10.6-11}$$

则定理 10.6.1 的结论(10.6-6)式蕴涵

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\lg\|x(t,\xi)\|\leqslant-\frac{\gamma}{p}\qquad \text{a.s.} \tag{10.6-12}$$

特别地,若定理 10.6.1 的所有条件成立,则(10.6-1)式的零解是几乎必然指数稳定的。

证:固定任意 $\xi\in C^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$,记 $x(t)=x(t,\xi)$,对每个正整数 $k\geqslant 2$。

$$E\|x_{t_0+k\tau}\|^p=E(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau}\|x((k-1)\tau+h)\|^p)$$

$$\leqslant 3^{p-1}\Big[E\|x(k-1)\tau\|^p+E\Big(\int_{t_0+(k-1)\tau}^{t_0+k\tau}\|f(t,x_t)\|\,\mathrm{d}t\Big)^p$$

$$+E\Big(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau}\Big\|\int_{(k-1)\tau}^{(k-1)\tau+h}g(t,x_t)\mathrm{d}B(t)\Big\|^p\Big)\Big] \tag{10.6-13}$$

但由 Hölder 不等式,由条件(10.6-11)和定理 10.6.1 便有

$$E\Big(\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\|f(x_t,t)\|\,\mathrm{d}t\Big)^p\leqslant\tau^{p-1}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}E\|f(t,x_t)\|^p\mathrm{d}t$$

$$\leqslant K\tau^{p-1}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}(\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}E\|x(t+\theta)\|^p)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{Kc_2\tau^p}{c_1}E\|\xi\|^p\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{Kc_2\tau^p}{c_1}E\|\xi\|^p\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma} \tag{10.6-14}$$

另一方面,由 Burkholder－Davis－Gundy 不等式,有

$$J\overset{\text{def}}{=}E\Big(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau}\Big|\int_{(k-1)\tau}^{(k-1)\tau+h}g(x_t,t)\mathrm{d}B(t)\Big|^p\Big)$$

$$\leqslant C_p E\left(\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} |g(x_t,t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}} \qquad (10.6\text{-}15)$$

此处 C_p 是仅依赖于 p 的正常数,以及条件(10.6-11)式

$$|g(t,\varphi)|^p \leqslant K\|\varphi\|^p \qquad (t,\varphi)\in C((0,+\infty)\times C[-\tau,0],R^n)$$

设 $\sigma\in(0,\frac{1}{3^{p-1}K})$充分小,使得

$$\frac{3^{p-1}K\sigma}{1-3^{p-1}K\sigma} < \mathrm{e}^{-\gamma\tau} \qquad (10.6\text{-}16)$$

便能从(10.6-15)式推得

$$J \leqslant C_p E\Big[\big(\sup_{(k-1)\tau\leqslant t\leqslant k\tau}\|g(t,x_t)\|\big)\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\|g(t,x_t)\|\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant \sigma E\big(\sup_{(k-1)\tau\leqslant t\leqslant t_k\tau}\|g(t,x_t)\|^p\big) + \frac{C_p^2}{4\sigma}E\Big[\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}\|g(t,x_t)\|\mathrm{d}t\Big]^p$$

$$\leqslant K\sigma E\big(\sup_{(k-1)\tau\leqslant t\leqslant k\tau}\|x_t\|^p\big) + \frac{C_p^2\tau^{p-1}}{4\sigma}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau}E\|g(t,x_t)\|^p\mathrm{d}t$$

$$\leqslant K\sigma(E\|x_{k\tau}\|^p + E\|x_{(k-1)\tau}\|^p) + \frac{Kc_2C_p^2\tau^p}{4\sigma c_1}E\|\xi\|^p\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma}$$

$$(10.6\text{-}17)$$

代(10.6-7)、(10.6-14)和(10.6-17)式到(10.6-13)式然后用(10.6-16)式能得到

$$E\|x_{k\tau}\|^p \leqslant \mathrm{e}^{-\tau\gamma}E\|x_{(k-1)\tau}\|^p + C\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma} \qquad (10.6\text{-}18)$$

这里 C 是不依赖 k 的常数,由数学归纳法,能从(10.6-18)式推出

$$E\|x_{+k\tau}\|^p \leqslant \mathrm{e}^{-k\tau\gamma}E\|\xi\|^p + kC\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma}$$

$$\leqslant (C\mathrm{e}^{2\tau\gamma} + E\|\xi\|^p)(k+1)\mathrm{e}^{-k\tau\gamma} \qquad (10.6\text{-}19)$$

今指出(10.6-19)式蕴涵(10.6-12)成立。

设 $\varepsilon\in(\sigma,\gamma)$任意,由(10.6-19)式有

$$P\{\omega: \|x_{k\tau}\| > \mathrm{e}^{-(\gamma-\varepsilon)k\tau/p}\}$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{(\gamma-\varepsilon)k\tau}E\|x_{k\tau}\|^p \leqslant C\mathrm{e}^{2\tau\gamma} + E\|\xi\|^p(k+1)\mathrm{e}^{-\varepsilon k\tau}$$

由著名的 Borel－Cantell 引理,可知对几乎所有的 $\omega\in\Omega$

$$\| x_{k\tau} \| \leqslant e^{-(\gamma-\varepsilon)k\tau/p} \qquad (10.6\text{-}20)$$

成立，除对有限个 k，因此存在一个 $k_0(w)$ 对所有 $w \in \Omega$，(10.6-20)式对所有 $k \geqslant k_0$ 成立。

因此几乎所有 $\omega \in \Omega$。

$$\frac{1}{t}\lg | x(t) | \leqslant -\frac{k\tau(\gamma-\varepsilon)}{p[(k-1)\tau]}$$

若 $\qquad (k-1)\tau \leqslant t \leqslant k\tau \qquad k \geqslant k_0$，因此有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lg \| x(t) \| \leqslant -\frac{\gamma-\varepsilon}{p} \qquad \text{a.s.}$$

令 $\varepsilon \to 0$，可得到(10.6-12)式。

定理 10.6.3 设 $p \in (0,1)$，且存在常数 $K>0$，使得对方程(10.6-11)的每个解有估计式

$$E\Big(\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}[\| f(t+\theta, x_{t+\theta}, t+\theta) \|^p + \| g(t+\theta, x_{t+\theta}) \|^p]\Big)$$
$$\leqslant K \sup_{-2\tau\leqslant r\leqslant 0} E \| x(t+r) \|^p \qquad t \geqslant \tau \quad (10.6\text{-}21)$$

则(10.6-21)蕴涵

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lg \| x(t,\xi) \| \leqslant -\frac{\gamma}{p} \qquad \text{a.s.} \quad (10.6\text{-}22)$$

证：固定任意的 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$，令 $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t,\xi)$，注意对任何 $a,b,c \geqslant 0$ 成立。

$$(a+b+c)^p \leqslant [3(a \vee b \vee c)]^p \leqslant 3^p(a^p \vee b^p \vee c^p)$$
$$\leqslant 3^p(a^p + b^p + c^p)$$

对每个 $k \geqslant 2$ 的整数有

$$E\| x_{k\tau} \|^p = E\Big(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau} \| x(k-1)\tau + h) \|^p\Big)$$
$$\leqslant 3^p\Big[E\| x_{k\tau} \|^p + E\Big(\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \| f(t,x_t) \| \mathrm{d}t\Big)^p$$
$$+ E\Big(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau} \Big\| \int_{(k-1)\tau}^{(k-1)\tau+h} g(t,x_t)\mathrm{d}B(t) \Big\|^p\Big)\Big] \qquad (10.6\text{-}23)$$

由条件(10.6-21)和(10.6-7)式有

$$E\Big(\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \| f(t,x_t) \| \mathrm{d}t\Big)^p \leqslant \tau^p E\Big(\sup_{(k-1)\tau\leqslant t\leqslant k\tau} \| f(t,x_t) \|^p\Big)$$

$$\leqslant K\tau^{p}\left(\sup_{(k-2)\tau\leqslant t\leqslant k\tau}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^{p}\right)\frac{Kc_{2}\tau^{p}}{c_{1}}E\|\xi\|^{p}\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma}$$

(10.6-24)

再用 *Burkholder－Davis－Gundy* 不等式

$$E\left(\sup_{0\leqslant h\leqslant\tau}\left\|\int_{t_0+(k-1)\tau}^{t_0+(k-1)\tau+h}g(t,\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}B(t)\right\|^{p}\right)$$

$$\leqslant C_{p}E\left(\int_{t_0+(k-1)\tau}^{t_0+k\tau}\|g(t,\boldsymbol{x}_t)\|^{2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C_{p}\tau^{\frac{p}{2}}E\left[\sup_{t_0+(k-1)\tau\leqslant t\leqslant t_0+k\tau}\|g(t,\boldsymbol{x}_t)\|^{p}\right]$$

$$\leqslant KC_{p}\tau^{\frac{p}{2}}\left[\sup_{t_0+(k-2)\tau\leqslant t\leqslant t_0+k\tau}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^{p}\right]$$

$$\leqslant\frac{Kc_{2}C_{p}\tau^{\frac{p}{2}}}{c_{1}}E\|\xi\|^{p}\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma} \qquad (10.6\text{-}25)$$

这里 C_p 是仅依赖于 p 的正常数，代(10.6-7)、(10.6-24)和(10.6-25)式到(10.6-23)式便可得到：

$$E\|\boldsymbol{x}_{k\tau}\|^{p}\leqslant C\mathrm{e}^{-(k-2)\tau\gamma} \qquad (10.6\text{-}26)$$

这里 C 是一个不依赖 k 的常数，从(10.6-25)式可推出结论(10.6-22)式来。

§7 随机中立型泛函微分方程指数稳定性[196,208]

本节介绍随机中立型泛函微分方程更一般的 p 阶指数稳定性及几乎必然指数稳定性的 *Разумихин* 型定理[208]，它推广了文献[196,198]的结果，然后应用这些新结果研究具有可变时滞的随机中立型微分差分方程的相应指数稳定性。

考虑 n 维随机中立型泛函微分方程

$$\mathrm{d}[\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}_t)]=f(t,\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}t+g(t,\boldsymbol{x}_t)\mathrm{d}w(t)$$

(10.7-1)

在 $t\geqslant 0$ 时，初始条件 $\boldsymbol{x}_0=\xi$，其中 $G:C([-\tau,0],R^{n})\rightarrow R^{n}$，$f$：

$R_+ \times C([-\tau,0],R^n) \to R^n$, g: $R_+ \times C([-\tau,0],R^n) \to R^{n\times m}$ 均为连续泛函，$x_t = \{x(t+\theta): -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\}$ 是 $C([-\tau,0],R^n)$ 值的随机过程，$\xi = \{\xi(\theta): -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\} \in L^p_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$，其中，$L^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0],R^n)$，记 $\mathscr{F}_t$ 可测 $C([-\tau,0],R^n)$ 值的随机变量 $\varphi = \{\varphi(\theta): -\tau \leqslant \theta \leqslant 0\}$，使 $\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E|\varphi(\theta)|^p < \infty$，记 $L^p_{\mathscr{F}_\infty}([-\tau,0],R^n) = \bigcup\limits_{t\geqslant 0} L^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0],R^n)$，为讨论(10.7-1)的稳定性，设 $G(0) \equiv 0$，$f(t,0) \equiv g(t,0) \equiv 0$，并设(10.7-1)式的解存在唯一且 p 阶均值有限，其解记为 $x(t,\xi)$，定义算子 $\mathscr{L}V: R_+ \times C([-\tau,0],R^n) \to R$，有

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) = V_t(t,\varphi(0)-G(\varphi)) + V_x(t,\varphi(0)-G(\varphi))f(t,\varphi) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^T(t,\varphi)V_{xx}(t,\varphi(0)-G(\varphi))g(t,\varphi)]$$

定理10.7.1 设

1) $\exists k \in (0,1)$，$p > 1$ 使 $\forall \varphi \in L^p_{\mathscr{F}_\infty}([-\tau,0],R^n)$

$$E\|G(\varphi)\|^p \leqslant k \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\varphi(\theta)\|^p$$

2)存在正数 $c_1, c_2, \lambda, \bar{q} > (1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$，函数 $V(t,x) \in C^{2,1}([-\tau,\infty)\times R^n, R_+)$，使得

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \forall (t,x) \in [-\tau,\infty)\times R^n$$

且 $\forall (t,\varphi) \in R_+ \times L^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0],R^n)$，当

$$EV(t+\theta,\varphi(\theta)) < \bar{q}EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)) \qquad -\tau \leqslant \theta \leqslant 0$$

时，有

$$E\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant -\lambda EV(t,\varphi(0)-G(\varphi))$$

则 $\forall \xi \in L^p_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$，有

$$E|x(t,\xi)|^p \leqslant M\mathrm{e}^{-\bar{r}t} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\xi(\theta)\|^p \qquad t \geqslant 0 \tag{10.7-2}$$

即(10.7-1)式的零解 p 阶矩指数稳定，其中

$$\bar{r} = \min\{\lambda, \tau^{-1}\lg\bar{q}(1+(\bar{q}k)\frac{1}{p})^{-p}\} > 0, M = c_1^{-1}c_2\frac{(1+k^{\frac{1}{p}})^p}{[1-(k\mathrm{e}^{\bar{r}\tau})^{\frac{1}{p}}]^p}$$

为证明定理 10.7.1,先证明两个引理,以下设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1, q>1$。

引理 10.7.1 设定理 10.7.1 的条件满足,则 $\forall \varphi \in L_{\mathscr{F}_\infty}^p([-\tau,0],R^n), t\geqslant 0$,有

$$EV(t,\varphi(0)-G(\varphi))\leqslant c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\varphi(\theta)\|^p \tag{10.7-3}$$

证:应用 Hölder 不等式与已知条件

$$\begin{aligned} & EV(t,\varphi(0)-G(\varphi)) \\ & \leqslant c_2(1+\varepsilon^q)^{p-1}(E\|\varphi(0)\|^p+\varepsilon^{-p}E\|G(\varphi)\|^p) \\ & \leqslant c_2(1+\varepsilon^q)^{p-1}(1+\varepsilon^{-p}k) \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\varphi(\theta)\|^p \end{aligned}$$

取 $\varepsilon=k^{\frac{1}{pq}}$,即可得(10.7-3)式。

引理10.7.2 设定理 10.7.1 条件满足,$s\geqslant 0, 0<r<\tau^{-1}\cdot\lg k^{-1}$,$x(t)$为方程(10.7-1)式的解,若$\forall 0\leqslant t\leqslant s$,有

$$e^{rt}EV(t,x(t)-G(x_t))\leqslant c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\varphi(\theta)\|^p \tag{10.7-4}$$

则 $\forall -\tau\leqslant t\leqslant s$,有

$$e^{rt}E|x(t)|^p\leqslant c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p(1-(ke^{r\tau})^{\frac{1}{p}})^{-p} \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\varphi(\theta)\|^p \tag{10.7-5}$$

证:因 $ke^{r\tau}<1$,故 $\alpha\overset{\text{def}}{=}(ke^{r\tau})^{\frac{1}{p}}<1$,令 $\varepsilon=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$,由 Hölder 不等式与假设,有

$$\begin{aligned} & E\|x(t)\|^p\leqslant(1+\varepsilon^q)^{p-1}(E\|x(t)-G(x_t)\|^p+\varepsilon^{-p}E\|G(x_t)\|^p) \\ & \leqslant(1+\varepsilon^q)^{p-1}(c_1^{-1}EV(t,x(t)-G(x_t))+\varepsilon^{-p}k \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|x(t+\theta)\|^p) \end{aligned}$$

由已知条件(10.7-4)式,对 $0\leqslant t\leqslant s$,有

$$\begin{aligned} e^{rt}E\|x(t)\|^p\leqslant(1+\varepsilon^q)^{p-1}[& c_1^{-1}\sup_{0\leqslant t\leqslant s} e^{rt}EV(t,x(t)-G(x_t))+ \\ & \varepsilon^{-p}k\sup_{0\leqslant t\leqslant s} e^{rt}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|x(t+\theta)\|^p] \end{aligned}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon^{q})^{p-1}\Big[c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p + \varepsilon^{-p}k\mathrm{e}^{r\tau}\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant s}\mathrm{e}^{rt}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p\Big]$$

$$= (1-\alpha)^{-p+1}c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p + \alpha\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant s}\mathrm{e}^{rt}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p. \tag{10.7-6}$$

显然 $-\tau\leqslant t\leqslant 0$ 时,(10.7-6)仍成立,而 $\alpha<1$,故

$$\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant s}\mathrm{e}^{rt}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p \leqslant (1-\alpha)^{-p}c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p$$

$$= c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p(1-(k\mathrm{e}^{r\tau})^{\frac{1}{p}})^{-p}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p$$

定理 10.7.1 的证明　因 $\bar{q}>(1-k^{\frac{1}{p}})^{-p}$,故 $\bar{q}>(1+(\bar{q}k)^{\frac{1}{p}})^p$,因此 $\bar{r}>0$,下面令 $\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\xi(\theta)\|^p>0$, $r\in(0,\bar{r})$,因此 $0<r<\min\{\lambda,\tau^{-1}\lg k^{-1}\}$,下面证明 $\forall\, t\geqslant 0$。

$$\mathrm{e}^{rt}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_t))\leqslant c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p \tag{10.7-7}$$

下面用反证法来证明(10.7-7)式成立,若(10.7-7)式不成立,则由引理 10.7.2,必 $\exists\, s\geqslant 0$,使 $\forall\, 0\leqslant t\leqslant s$,有

$$\mathrm{e}^{rt}EV(t,\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}_t))\leqslant \mathrm{e}^{rs}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s))$$

$$= c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p \tag{10.7-8}$$

并 $\exists\,\{t_j\}$, $j=1,2,\cdots$,使 $t_j\downarrow s$, 且

$$\mathrm{e}^{rt}EV(t_j,\boldsymbol{x}(t_j)-G(\boldsymbol{x}_{t_j}))>\mathrm{e}^{rs}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s)) \tag{10.7-9}$$

由引理 10.7.2,从(10.7-8)式可推出　$\forall\,-\tau\leqslant\theta\leqslant s$

$$\mathrm{e}^{rt}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p\leqslant c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^{-p}[1-(k\mathrm{e}^{r\tau})^{\frac{1}{p}}]^{-p}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p$$

$$= c_1^{-1}[1-(k\mathrm{e}^{r\tau})^{\frac{1}{p}}]^{-p}\mathrm{e}^{rs}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s))$$

由已知条件 2), $\forall\,-\tau\leqslant\theta\leqslant s$

$$\mathrm{e}^{rt}EV(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant c_1^{-1}c_2[1-(k\mathrm{e}^{r\tau})^{\frac{1}{p}}]^{-p}\mathrm{e}^{rs}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s))$$

特别地, $\forall\,-\tau\leqslant\theta\leqslant 0$

$$EV(s+\theta,\boldsymbol{x}(s+\theta))\leqslant c_1^{-1}c_2[1-(ke^{r\tau})^{\frac{1}{p}}]^{-p}e^{r\tau}EV(s,\boldsymbol{x}(s)$$
$$-G(\boldsymbol{x}_s))\leqslant \bar{q}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s,s)) \qquad (10.7\text{-}10)$$

(10.7-10)式中利用了 $e^{r\tau}[1-(ke^{r\tau})^{\frac{1}{p}}]^{-p}<\bar{q}$,因此由(10.7-10)式与已知条件 2),有

$$E\mathscr{L}V(s,\boldsymbol{x}_s)\leqslant -\lambda EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s))$$

因 $r<\lambda$,而 f、g、G 与解 $\boldsymbol{x}(t)$ 连续,故必存在充分小 $h>0$,使 $s\leqslant t\leqslant s+h$ 时

$$E\mathscr{L}V(t,\boldsymbol{x}_s)+rEV(t,\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}_t))\leqslant 0$$

由 Itô 公式

$$e^{r(s+h)}EV(s+h,\boldsymbol{x}(s+h)-G(\boldsymbol{x}_{s+h}))-e^{rs}EV(s,\boldsymbol{x}(s)-G(\boldsymbol{x}_s))$$
$$\cdot\int_s^{s+h}e^{rt}[rEV(t,\boldsymbol{x}(t)-G(\boldsymbol{x}_t))+E\mathscr{L}V(t,\boldsymbol{x}_t)]dt\leqslant 0$$

而这与(10.7-9)式矛盾,因此(10.7-7)式成立,则由引理 10.7.2,$\forall t\geqslant 0$,有

$$e^{rt}E\|\boldsymbol{x}(t)\|^p\leqslant c_1^{-1}c_2(1+k^{\frac{1}{p}})^p(1-(ke^{r\tau})^{\frac{1}{p}})^{-p}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}E\|\boldsymbol{x}(\theta)\|^p \qquad (10.7\text{-}11)$$

在(10.7-11)式中令 $r\to\bar{r}$,则得(10.7-2)式,定理 10.7.1 得证。

定理 10.7.2 设存在 $k\in(0,1)$,$p\geqslant 2$,使 $\forall\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_\infty}([-\tau,0],R^n)$

$$\|G(\varphi)\|^p\leqslant k\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\varphi(\theta)\|^p \qquad (10.7\text{-}12)$$

且 $\forall(t,\varphi)\in R_+\times L^p_{\mathscr{F}_\infty}([-\tau,0],R^n)$,有

$$E\|f(t,\varphi)\|^p+E[\mathrm{trace}g^T(t,\varphi)g(t,\varphi)]^{\frac{p}{2}}$$
$$\leqslant K\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}E\|\varphi(\theta)\|^p \qquad (10.7\text{-}13)$$

这里 K 为一确定的正数,并设存在 $r,M>0$,有

$$E\|\boldsymbol{x}(t,\xi)\|^p\leqslant Me^{-rt}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}E\|\xi(\theta)\|^p \qquad t\geqslant 0$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}t^{-1}\lg\|\boldsymbol{x}(t,\xi)\|\leqslant\frac{-\bar{r}}{p}\qquad \text{a.s.} \qquad (10.7\text{-}14)$$

即(10.7-1)式的平凡解几乎必然指数稳定,这里 $\bar{r}=\min\{r,\tau^{-1}\lg k^{-1}\}$,$\xi\in L^p_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$,特别地,若(10.7-12)、(10.7-13)式与定理 10.7.1 条件 2)满足,则(10.7-1)式的平凡解几乎必然指数稳定。

证明:由 Doob 鞅不等式,Höledr 不等式与已知条件,易推出

$$
\begin{aligned}
& E(\sup_{0\leqslant\theta\leqslant\tau}\|x(k\tau+\theta)-G(x_{k\tau+\theta})\|^p) \\
\leqslant & 3^{p-1}(E|x(k\tau)-G(x_{k\tau})|^p+E\|\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}f(t,x_t)\mathrm{d}t\|^p \\
& +E\sup_{0\leqslant\theta\leqslant\tau}\|\int_{k\tau}^{k\tau+\theta}g(t,x_t)\mathrm{d}w(t)\|^p) \\
\leqslant & 3^{p-1}[2^{p-1}(E|x(k\tau)|^p+E|G(x_{k\tau})|^p) \\
& +(\tau^{p-1}+C_p\tau^{\frac{p}{2}-1})\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}K\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\|x(t+\theta)\|^p\mathrm{d}t] \\
\leqslant & Ce^{-\bar{r}K\tau}
\end{aligned}
\tag{10.7-15}
$$

其中 $C=3^{p-1}[2^{p-1}(1+k)+(\tau^p+C_p\tau^{\frac{p}{2}})K]Me^{\bar{r}\tau}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}E\|\xi(\theta)\|^p$,$C_p$是一与 p 有关的正数,$\forall\bar{\varepsilon}\in(0,\bar{r})$,由(10.7-15)式可推出

$$p(w:\sup_{0\leqslant\theta\leqslant\tau}\|x(k\tau+\theta)-G(x_{k\tau+\theta})\|^p)>\mathrm{e}^{-(\bar{r}-\bar{\varepsilon})k\tau})\leqslant C\mathrm{e}^{-\bar{\varepsilon}k\tau}$$

由 Borel－Cantelli 引理,对几乎所有的 $\omega\in\Omega$,$\exists k_0$ 当 $t>k_0\tau$ 时

$$\|x(t)-G(x_t)\|^p\leqslant\mathrm{e}^{-(\bar{r}-\bar{\varepsilon})(t-\tau)}$$

而$|x(t)-G(x_t)|^p$ 在$[0,k_0\tau]$上有限,因此对几乎所有 $\omega\in\Omega$,$\exists H(w)$,有

$$|x(t)-G(x_t)|^p\leqslant H\mathrm{e}^{-(\bar{r}-\bar{\varepsilon})t}\qquad t\geqslant0 \tag{10.7-16}$$

类似于引理 10.7.2 的证明,从(10.7-16)式可推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{(\bar{r}-\bar{\varepsilon})t}\|x(t)\|^p\leqslant(1-\bar{a})^{-p+1}H+\bar{a}\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{(\bar{r}-\bar{\varepsilon})t}\|x(t)\|^p$$

这里 T 为任意大于 0 的数,$\bar{a}=[k\mathrm{e}^{(\bar{r}-\bar{\varepsilon})\tau}]^{\frac{1}{p}}$,因此

$$(1-\bar{a})\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{e}^{(\bar{r}-\bar{\varepsilon})t}\|x(t)\|^p\leqslant(1-\bar{a})^{-p+1}H+\bar{a}\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant0}\mathrm{e}^{(\bar{r}-\bar{\varepsilon})t}\|x(t)\|^p$$

因此
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}t^{-1}\lg\|x(t)\|\leqslant-\frac{\bar{r}-\bar{\varepsilon}}{p}\qquad \text{a.s.}$$

令 $\bar{\varepsilon}\to 0$,即可得(10.7-14)式。

作为定理 10.7.1、定理 10.7.2 的应用,下面考虑 n 维具有可变时滞的随机中立型微分差分方程

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}[\boldsymbol{x}(t)-\overline{G}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\delta_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\delta_u(t)))] \\
&=\overline{f}((t,\boldsymbol{x}(t)),\boldsymbol{x}(t-\delta_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\delta_u(t)))\mathrm{d}t \\
&+\overline{g}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\delta_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\delta_u(t)))\mathrm{d}\omega(t)
\end{aligned}
\tag{10.7-17}
$$

在 $t\geqslant 0$ 时,初始条件 $\boldsymbol{x}_0=\xi\in L^p_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],R^n)$,$\delta_i:R_+\to[0,\tau]$ $(1\leqslant i\leqslant u)$连续,$\overline{f}:R_+\times R^n\times R^{n\times u}\to R^n$,$\overline{g}:R_+\times R^n\times R^{n\times u}\to R^{n\times m}$,$\overline{G}:R^n\times R^{n\times u}\to R^n$,下面设(10.7-17)式有唯一连续解,记为 $\boldsymbol{x}(t,\xi)$,并设 $\overline{f}(t,0,\cdots,0)\equiv\overline{g}(t,0,\cdots,0)\equiv 0$,$\overline{G}(0,0,\cdots,0)\equiv 0$,并用 $L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,R^n)$记 R^n 值 $\mathscr{F}$可测的随机变量 $\boldsymbol{x}$ 且 $E\|\boldsymbol{x}\|^p<\infty$。

推论 10.7.1 设

1)存在正数 $c_1,c_2,p>1$,函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{2,1}([-\tau,\infty]\times R^n,R_+)$,使 $\forall(t,\boldsymbol{x})\in[-\tau,\infty]\times R^n$

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|^p\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant c_2\|\boldsymbol{x}\|^p$$

2) $\exists k_i>0(0\leqslant i\leqslant u)$,使 $\overline{k}=\sum\limits_{i=0}^{u}k_i<1$,且 $\forall(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u)\in R^n\times R^{n\times u}$

$$\|\overline{G}(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u)\|^p\leqslant k_0\|\boldsymbol{x}\|^p+\sum_{i=1}^{u}k_i\|y_i\|^p$$

3) 设 $\overline{q}>[1-\overline{k}^{\frac{1}{p}}]^{-p}$,$\exists\lambda>0$,使 $\forall,\boldsymbol{x},\overline{y}_i\in L^p\mathscr{F}(\Omega,R^n)(1\leqslant i\leqslant u)$,当 $EV(t,\boldsymbol{x})<\overline{q}EV(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))m$,或 $\exists i\in\{1,\cdots,u\}$,$EV(t-\delta_i(t),\overline{y}_i)<\overline{q}EV(t-\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))$时,有

$$
\begin{aligned}
&E[V_t(t-\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)) \\
&+V_x(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))\overline{f}(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)) \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{trace}\overline{g}^T(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)V_{xx}(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)
\end{aligned}
$$

$$\cdot \overline{g}(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))$$
$$\leqslant -\lambda EV(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))]$$

则(10.7-17)式的平凡解是 p 阶矩指数稳定,若 $p\geqslant 2$, $\exists \overline{k}_i>0(0\leqslant i\leqslant u)$, $\forall(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)\in R_+\times R^n\times R^{n\times u}$,有

$$\| \overline{f}t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)\|^p+(\mathrm{trace}\overline{g}^T(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u)\overline{g}$$
$$\cdot(t,\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))^{\frac{p}{2}}\leqslant \overline{k}_0\|\boldsymbol{x}\|^p+\sum_{i=1}^{u}\overline{k}_i\|\overline{y}_i\|^p \tag{10.7-18}$$

则(10.7-17)式的零解也是几乎必然指数稳定的。

证:$\forall t\geqslant 0,\varphi\in C([-\tau,0],R^n)$,定义

$$\overline{f}(t,\varphi)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\overline{f}(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_u(t)))$$
$$\overline{g}(t,\varphi)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\overline{g}(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_u(t)))$$
$$\overline{G}(t,\varphi)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\overline{G}(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_u(t)))$$

然后应用定理 10.7.1 与定理 10.7.2 可以直接导出推论 10.7.1。

推论10.7.2 设定理 10.7.1 的条件 1)、2)满足,且 $\exists\lambda>0$, $\lambda_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,使 $\forall(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_n)\in R^n\times R^{n\times u}$,有

$$V_t(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u))+V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u))$$
$$\cdot\overline{f}(t,\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[\overline{g}^T(t,\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u)$$
$$\cdot V_{\boldsymbol{xx}}(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u)\overline{g}(t,\boldsymbol{x},y_1,\cdots,y_u))]$$
$$\leqslant -\lambda V(t,\boldsymbol{x}-\overline{G}(\boldsymbol{x},\overline{y}_1,\cdots,\overline{y}_u))+\sum_{i=1}^{u}\lambda_i V(t-\delta_i(t),y_i)$$

若 $\lambda>\sum_{i=1}^{u}\lambda_i[1-\overline{k}^{\frac{1}{p}}]^{-p}$,则(10.7-17)式的平凡解是 p 阶矩指数稳定,若还设 $p\geqslant 2$,且推论 10.7.1 中(10.7-18)式满足,则(10.7-17)式的平凡解几乎必然指数稳定。

证明:因 $\lambda>\sum_{i=1}^{u}\lambda_i[1-\overline{k}^{\frac{1}{p}}]^{-p}$,故必存在 $\overline{q}>[1-\overline{k}^{\frac{1}{p}}]^{-p}$,且 $\lambda>\sum_{i=1}^{u}\lambda_i\overline{q}$,然后应用定理 10.7.1 与定理 10.7.2 可以导出推论

10.7.2。

例 1　考虑随机中立型线性变时滞微分方程

$$d[x(t)-Gx(t-\delta(t))]=[Ax(t)+Bx(t-\delta(t))]dt+Cx(t-\delta(t))d\omega(t) \qquad (10.7\text{-}19)$$

其中 A、B、C、G 均为 $n\times n$ 常数矩阵，$w(t)$是一维 Brown 运动，$\delta:R_+\to[0,\tau]$，$\|G\|<1$，$p\geqslant 2$，并设 $A+A^T$ 负定，$\lambda \overset{\text{def}}{=} -\lambda_{\max}(\frac{A+A^T}{2})>0$，令 $V=\|x\|^p$，则 $V_x=p\|x\|^{p-2}x^T$，$V_{xx}=p\|x\|^{p-2}I+p(p-2)\|x\|^{p-4}xx^T$，因此 $\forall(x,y)\in R^n\times R^n$

$$\begin{aligned}&p|x-Gy|^{p-2}(x-Gy)^T(Ax+By)+\frac{1}{2}y^TC^T(p\|x-Gy\|^{p-2}I)\\&\cdot Cy+\frac{1}{2}y^TC^Tp(p-2)\|x-Gy\|^{p-4}(x-Gy)(x-Gy)^TCy\\&\leqslant-[\lambda p-(p-1)\|AG+B\|-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\|C\|^2]\\&\cdot\|x-Gy\|^p+(\|AG+B\|+(p-1)\|C\|^2)\|y\|^p\end{aligned}$$

则由定理 10.7.4 知，当

$$\begin{aligned}&\lambda p-(p-1)\|AG+B\|-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\|C\|^2\\&>(\|AG+B\|+(p-1)\|C\|^2)(1-\|G\|)^{-p}\end{aligned}$$

时，(10.7-19)式的零解 p 阶矩指数稳定，也几乎必然指数稳定。

§8　对随机神经网络稳定性分析的应用[189,190,194,195]

本节，简略地叙述上述随机微分方程和随机泛函微分方程的稳定性的基本理论对随机神经网络稳定性分析的应用，这里仅介绍结论，其证明读者可以从§8 标题中所列的参考文献中找到，或者可从前几节的定理的证明中自己推导出来。

考虑具有随机干扰的 Hopfield 神经网络

$$\begin{cases}dx(t)=[-Bx(t)+Ag(x(t))]dt+\sigma(x(t))dW(t)\\x(0)=x_0\in R^n \qquad t\geqslant 0\end{cases} \qquad (10.8\text{-}1)$$

这里

$$B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n) \qquad b_i = \frac{1}{C_i R_i}$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \qquad a_{ij} = \frac{T_{ij}}{C_i}$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{col}(g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n)) \qquad g_i(x_i)x_i > 0 \qquad x_i \neq 0$$

g_i 为 sigmoidal 函数， $\| g_i(x_1) \| \leqslant \beta_i \| x_i \|$

$W(t)=\mathrm{col}(W_1(t), \cdots, W_m(t))$是定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 m 维布朗运动。

定理 10.8.1 如果存在一个对称正定矩阵 $Q=(q_{ij})_{n\times n}$和两个数$\mu\in R$ 及$\rho\geqslant 0$,使得$\forall \boldsymbol{x}\in R^n$,有

$$2\boldsymbol{x}^T Q[-B\boldsymbol{x}+Ag(\boldsymbol{x})]+\mathrm{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\sigma(\boldsymbol{x})]\leqslant \mu \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} \quad (10.8\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{x}^T Q\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\boldsymbol{x}\geqslant \rho(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x})^2 \quad (10.8\text{-}3)$$

则对于$\forall \boldsymbol{x}_0\neq 0$,有

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\lg(\| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \|)\leqslant -(\rho - \frac{\mu}{2}) \quad \text{a.s.} \quad (10.8\text{-}4)$$

特别地,若 $\rho > \frac{\mu}{2}$,则(10.8-1)式的零解几乎必然指数稳定。

注 可构造 Ляпунов 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$,而证略之。

推论 10.8.1 若存在一个对角正定矩阵 $Q=\mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$和实数 $\mu>0, \rho\geqslant 0$,使得$\forall \boldsymbol{x}\in R^n$,有

$$\mathrm{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\sigma(\boldsymbol{x})] \leqslant \mu(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x}^T Q\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\boldsymbol{x} \geqslant \rho(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x})$$

令

$$h_{ij} = \begin{cases} 2q_i[-b_i + (0 \vee a_{ii})\beta_i] & i = j \\ q_i \mid a_{ij} \mid \beta_j + q_j \mid a_{ji} \mid \beta_i & i \neq j \end{cases}$$

$\lambda_{\max}(H)$表示 $H=(h_{ij})_{n\times n}$的最大特征值。

当 $\lambda_{\max}(H)\geqslant 0$ 时

$$\lim \sup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\lg(\| \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) \|)\leqslant -(\rho - \frac{1}{2}[\mu + \frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} q_i}]) \quad \text{a.s.}$$

当 $\lambda_{\max}(H)<0$ 时

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg(\|x(t,x_0)\|)\leqslant-(\rho-\frac{1}{2}[\mu+\frac{\lambda_{\max}(H)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}q_i}])\quad \text{a.s.}$$

故当 $\lambda_{\max}(H)\geqslant 0,\frac{1}{2}[\mu+\frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}q_i}]<\rho$,(10.8-1)式的零解是几乎必然指数稳定的。

或当 $\lambda_{\max}(H)<0,\frac{1}{2}[\mu+\frac{\lambda_{\max}(H)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}q_i}]<\rho$,(10.8-1)式的零解是几乎必然指数稳定的。

推论 10.8.2 假设 $b_i=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\quad 1\leqslant i\leqslant n$ 成立,且存在 n 个正数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,使得

$$\beta_j^2\sum_{j=1}^{n}q_i[0\vee\operatorname{sgn}(a_{ii})]^{\delta_{ij}}\leqslant q_jb_j\qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

这里 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ 且假设 $\operatorname{trace}[\sigma^T(x)Q\sigma(x)]\leqslant\mu x^TQx$

$$x^TQ\sigma(x)\sigma^T(x)Qx\geqslant\rho(x^TQx)^2\qquad\forall x\in R^n$$

这里 $Q=\operatorname{diag}(q_1,\cdots,q_n)$ 和 $\mu>0,\rho\geqslant 0$。则(10.8-1)式的解满足

$$\lim\sup\frac{1}{t}\lg(\|x(t,x_0)\|)\leqslant-(\rho-\frac{\mu}{2})\qquad\forall x_0\neq 0$$

特别地若 $\frac{\mu}{2}<\rho$,则(10.8-1)式的零解是几乎必然指数稳定的。

从上面这些理论结果,推出一个有趣的事实,任何一个确定性的神经网络(10.8-1)(即 $\sigma=0$),可以通过随机振动实现稳定性化,正如自动控制理论中的镇定一样,从实用的观点看,仅限于选择线性随机振动,即

$$\sigma(x(t))\mathrm{d}\omega(t)=\sum_{k=1}^{m}B_kx(t)\mathrm{d}W_k(t)\qquad(10.8\text{-}5)$$

从而(10.8-1)式变为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=[-Bx(t)+Ag(x(t))]\mathrm{d}t+\sum\limits_{k=1}^{m}B_kx(t)\mathrm{d}W_k(t)\\x(0)=x_0\in R^n\end{cases}$$

$$(10.8\text{-}6)$$

这里 $$\text{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}\sigma(\boldsymbol{x})] = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}^T B_k^T Q B_k \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}^T Q\sigma(\boldsymbol{x})\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\boldsymbol{x} = \text{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x})Q\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T Q\sigma(\boldsymbol{x})]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}^T B_k^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T Q B_k \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{x}^T Q B_k \boldsymbol{x})^2$$

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = (B_1\boldsymbol{x}, \cdots B_m\boldsymbol{x})$$

由定理 10.8.1 可导出如下有用的结果。

定理 10.8.2 设存在一个对称正定矩阵

$$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n}$$

和两个数 $\mu\in R$ 和 $\rho\geqslant 0$，使得 $\forall\, \boldsymbol{x}\in R^n$。

$$2\boldsymbol{x}^T Q[-B\boldsymbol{x} + \dot{A}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}^T B_k^T Q B_k \boldsymbol{x} \leqslant \mu \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$$

和 $$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{x}^T Q B_k \boldsymbol{x})^2 \geqslant \rho(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x})^2 \text{ 成立，则}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{1}{t}\lg(\|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)\|) \leqslant -\left(\rho - \frac{\mu}{2}\right) \quad \text{a.s.}$$

若 $\rho - \frac{\mu}{2}$，则(10.8-6)的平凡解几乎必然指数稳定。

例 1　　令 $B_k = \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{I}, 1\leqslant k\leqslant m$

这里 I 是一个单位矩阵，$Q_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 均为实数，则神经网络(10.8-6)式就变为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = [-B\boldsymbol{x}(t) + A\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} Q_k \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}W_k(t) \tag{10.8-7}$$

选择矩阵 Q 为一单位矩阵，此时

$$\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}^T B_k Q B_k \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \|B_k\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} w^2 Q_k^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{10.8-8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{x}^T Q B_k \boldsymbol{x})^2 = \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{x}^T Q_k \boldsymbol{x})^2 = \sum_{k=1}^{m} Q_k^2 \|\boldsymbol{x}\|^4 \tag{10.8-9}$$

因此有 $2x^TAg(x)\leqslant 2\|x\|A\| \|g(x)\|\leqslant 2\overline{\beta}\|A\| \|x\|^2$

这里 $\overline{\beta}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\beta_k$　　$\|\cdot\|$ 表示矩阵的算子范数,即

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x\in R^n, \|x\| = 1\}$$

因此 $$\alpha x^T\varphi[-Bx+Ag(x)]\leqslant 2(\overline{\beta}-\underline{b})\|x\|^2 \quad (10.8\text{-}10)$$

这里 $$\underline{b}=\min b_i$$

综合(10.8-8)、(10.8-9)、(10.8-10)式和定理 10.8.2, $\forall x_0 \neq 0$。

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\lg(\|x(t,x_0)\|)\leqslant -\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}Q_k^2-(\overline{\beta}-\underline{b})\right) \qquad \text{a.s.}$$

特别地,当$\sum\limits_{k=1}^{m}Q_k^2>2(\overline{\beta}-\underline{b})$ 时,神经网络(10.8-6)式的零解 $x=0$ 几乎必然指数稳定。

如果取 $Q_k=0$,当 $2\leqslant k\leqslant m$,则(10.8-6)变为更简单的方程

$$dx(t)=[-Bx(t)+Ag(x(t))]dt+Q_1x(t)d\omega_1(t) \quad (10.8\text{-}11)$$

即仅用一个布朗运动作为随机振动的源,只要 $Q_1^2>2(\overline{\beta}-\underline{b})$,就能保证这个随机神经网络零解几乎必然指数稳定。

下面考虑随机时滞神经网络

$$\begin{cases} dx(t) = [-Bx(t)+Ag(x(t-\tau))]dt+\sigma(x(t) \\ \qquad\cdot x(t-\tau))d\omega(t) \qquad t\geqslant 0 \\ x(0) = \xi(s) \qquad -\tau\leqslant s\leqslant 0 \end{cases} \quad (10.8\text{-}12)$$

B,A 与(10.8-1)式定义相同。

$x(t-\tau)=\mathrm{col}(x_1(t-\tau),\cdots,x_n(t-\tau))$,$\sigma\in C[R^n\times R^n, R^{n\times n}]$,满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件,$\sigma(0,0)=0$。

定理 10.8.3　若存在几个正数 $d_i, i=1,2,\cdots,n$,使得矩阵 $H=\begin{pmatrix} C & A \\ A^T & D\end{pmatrix}$ 负定,这里

$$C = \mathrm{diag}(-2b_1+d_1\beta_1^2,\cdots,-2b_n+d_1\beta_n^2)$$

$$D = \mathrm{diag}(-d_1,\cdots,-d_n)$$

设 $-\lambda$ 为 H 的最大特征值,且存在 $\mu\in(0,\lambda)$,使得

$$\operatorname{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\leqslant\mu\|\boldsymbol{x}\|^2+\lambda\|g(\boldsymbol{y})\|^2$$

$$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n\times R^n \qquad (10.8\text{-}13)$$

则(10.8-12)的任意解有二阶矩 ляпунов 指数估计式

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg[E(\|\boldsymbol{x}(t,x_0)\|^2)]\leqslant-\varepsilon$$

$\varepsilon\in(0,\lambda-\mu)$是方程

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\varepsilon d_i\tau_i\beta_i^2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+\varepsilon)=\lambda-\mu$$

的唯一解,即(10.8-12)的零解是均方指数稳定性的。

定理10.8.4 假设定理 10.8.3 的条件(10.8-13)式代之以

$$\operatorname{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\mu_ix_i^2+\delta_iy_i^2)+\lambda\|g(\boldsymbol{y})\|^2$$

$$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R^n\times R^n$$

其它条件不变,这里

$$u_i+\delta_i<\lambda \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

则(10.8-12)式的解的二阶矩 Ляпунов 指数有估计式

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg[E(\|\boldsymbol{x}(t,\xi)\|^2]\leqslant-\varepsilon$$

这里 $\varepsilon\in(0,\min(\lambda-\mu_i-\delta_i))$是方程

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}((\varepsilon d_i\tau_i\beta_i^2+\delta_i)\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_i}+\mu_i+\varepsilon)=\lambda$$

的解,换言之,(10.8-12)式的零解均方指数稳定。

例 2 考虑一个二维的具有时滞的 Hopfield 型随机网络

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t+$$

$$\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}g_1(x_1(t-\tau_1))\\g_2(x_2(t-\tau_2))\end{bmatrix}\mathrm{d}t+B_1\begin{bmatrix}g_1(x_1(t-\tau_1))\\g_2(x_2(t-\tau_2))\end{bmatrix}\mathrm{d}\omega(t)$$

$$(10.8\text{-}14)$$

这里,$I_i(i=1,2)$是两个正的常数,且

$$g_i(x_i)=\frac{\mathrm{e}^{x_i}-\mathrm{e}^{-x_i}}{\mathrm{e}^{x_i}+\mathrm{e}^{-x_i}}$$

故 $\beta_i=1$　　令 $d_1=4, d_2=2$，则

$$H=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

易验证 H 负定，H 的最大特征值为 $-\lambda=-0.2474$。

求方程

$$\max\{4\varepsilon\tau_1 e\varepsilon\tau_1+\varepsilon_1\varepsilon\tau_2 e^{\varepsilon\tau_2}+\varepsilon\}=0.2474 \tag{10.8-15}$$

的解，例如 $\tau_1=\tau_2=1$。

则方程(10.8-15)变为

$$4\varepsilon e^{\varepsilon}+\varepsilon=0.2474$$

有解　$\varepsilon=0.04762$

现考虑 $\omega(t)$ 是一实值的布朗运动，且 B_1 是一个 $n\times n$ 的常数矩阵，使得

$$\|B_1\|^2\leqslant 0.2474$$

选取 $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=Bg(\boldsymbol{y})$　　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^2$

这里 $g(\boldsymbol{y})=(g_1(\boldsymbol{y}_1),g_2(\boldsymbol{y}_2))^T$

使得

$$\text{trace}[\sigma^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\leqslant\|Bg(\boldsymbol{y})\|^2\leqslant\|B_1\|^2|g(\boldsymbol{y})|^2$$
$$\leqslant 0.2474|g(\boldsymbol{y})|^2$$

故随机时滞系统(10.8-14)式的最高阶矩 Ляпунов 指数不大于 $-\varepsilon$。

例如取 $\tau_1=\tau_2=12$，则(10.8-14)式的最高的二阶矩 Ляпунов 指数不大于 -0.04762。

参 考 文 献

1 Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, м:физматгиз,1959

2 Четаев И.Г.运动稳定性．王光亮译.北京.国防工业出版社,1959

3 Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М:Hayka,1976

4 Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, М:физматгиз, 1959

5 Massra J. L. On Liapunoffs condition of stability. Annals of Mathematics, 1949,50.(3).705～721

6 Красовский Н. Н. Теория управления движением Линейные системы. М: Наука, 1968

7 Красовский, Н. Н. К. Теории второго метода А. М. Ляпунов исследовдния устойчивости двиожения Локл. АН СССР-1956-109, 460～463

8 Персидский К. П. К теории устойчивости решений дфференуциальных уравнений уМН. том 1946,1.5～6

9 Персидский К. Г. К. теория устойчивости интегралов систем дфференуиалъных уравненй Чзв физ-мат об-ва прп казанск гос. ун-те,1936,Т.8,47～85

10 Малкин. И. Т. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптоической устойчвости ПММ,1954,Т.18:2с,129～138

11 Малкин. И. Г. об общение основной теоремы Ляпунов об устойчивостп движения. Д окл АН СССР 1938.18.3.162～164

12 Барбашин, Е, А. Красовский Н. Н. О существоваиин функчий Ляпунов в слуиае асимлтотической устойчивости в целом пмм-1754.18.3с.345～350

13 Марачков. В. П. Об одной теореме устойчивостп, Изв. физ-мат. общества и научно-исслед ин-та математики и механики при Казанск: ун-те. Сер. 3-1940. 12с. 171～174

14 许淞庆.常微分方程稳定性理论.上海:上海科学技术出版社,1962

15 秦元勋,王联,王慕秋.运动稳定性理论与应用.北京:科学出版社,1980

16 黄琳.稳定性理论.北京:北京大学出版社,1992

17 高为炳.运动稳定性基础.北京:高等教育出版社,1987

18 舒仲周.运动稳定性.四川:西南交通大学出版社,1989

19 冯纯伯,费树岷.非线性控制系统分析与设计.北京:电子工业出版社,1998

20 王照林.运动稳定性及其应用.北京:高教出版社,1992

21 林振声,杨信安.微分方程稳定性理论.福州:福建科技出版社,1987

22 Плисс В. А. Некоторые проблемы теорин устойчивости движения В целом лгд. изд-

во лгу 1958

23 LaSalle J. and Lefschtz S. Stability by Liapunov's direct method with application New York Academic Press, 1964

24 邓宗琦,肖冬梅,肖会敏.数学控制论及应用.武汉:华中师范大学出版社,1997

25 贺建勋,王志成.常微分方程.长沙:湖南科学出版社,1980

26 钱学森,宋健.工程控制论,上、下册.北京:科学出版社,1980,1981

27 Yoshizawa T. Stability Theory by Lyapunov's Second Metheod. The Math. Soc. of Japan. Takyo, 1996

28 Hahan. W. Stability of Mation, Springer－Verlag Bearlin－New York, 1967

29 Rouche. N. Habets. P. and Laloy M. Stability Theory by Lyapunov's direct Method, Springer－Verlag. 1977

30 LaSalle J P.动力系统的稳定性.廖晓昕,李立鹏,邹应译.武汉:华中理工大学出版社,1987

31 Bhatia, N P Szegö. G P 动力系统的稳定性.俞伯本译,张芷芬校.北京:高等教育出版社,1998

32 R. Reissing. G. Sansone. R. cont. Nonlineor differential equations of higher order nwrd-hoff Internatial publishing legder. 1974

33 Д имидович, Ъ П. Лектяии по математический теория устойчивости М. Наука, 1967

34 Yoshizawa T.稳定性理论与周期解、概周期解的存在性.郑祖庥等译.南宁:广西人民出版社,1985

35 Michel A N.大型动态系统的定性分析.郑应平译,沈阳:辽宁科学技术出版社,1985

36 尤秉礼.常微分方程补充教程.北京:人民教育出版社,1981

37 廖晓昕.稳定性的数学理论和应用.修订版.武汉:华中师范大学出版社,1998

38 徐道义.关于稳定性的几个基本定理.数学季刊,1992,17:61～67

39 王天成.时变动力系统的不稳定性.烟台师范学院学报,1997,13:87～89

40 赖定文.关于稳定性定理的一点补充.科学通报,1984,19(2):1161～1163

41 刘自成.两个稳定性定理的改进,华中师范大学学报 微分方程专辑,1986,135～137

42 张炳根.二阶常微分方程的全局稳定性.数学学报,1959,9:442～444

43 Чжан бн-ган(张炳根)устойчиивости неленейных систем автоматическоо релумрован,中国科学,1961,10(6):625～631

44 李森林.方程 $\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n} f_s(x_j)(s=1,2,\cdots,n)$ 的解的全局稳定性及应用(Ⅰ)(Ⅱ).数学学报,1964,(3)4:353～366,571～577

45 李森林.方程$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n}f_{sj}(t)x_j+X_s(t_1,x_1,\cdots,x_n)(s=1,2,\cdots,n)$的解的稳定性.数学学报,1965,15(2):217～226

46 廖晓昕.高维非线性自治系统的全局稳定性和不稳定性.中国科学 数学专辑(Ⅰ),1979,124～134

47 廖晓昕.广义分离变量型自治系统的全局稳定性及应用.数学学报,1981(5):641～649

48 Liao Xiaoxin . Partial stability, boundeness, dissipatin property for nonlinear system with separtating variables. Science China Ser. A,1992,35(9):1025～1039

49 Liao Xiaoxin, Fu Yuli and Guo Yunxia. Partial dissipative property for a class of nonlinear systems with separted variables. J. Math. Anal. Appl,1993,173(1):103～145

50 Лурье, А. И. Некторые нелиненные задачи теорпиавтоматического регулированння Гостехцзндат,1951

51 Лурье, А. И. постников. В. Н. К Теории устойчивости регулируемых сисгем ПММ, 1944,8:3 ,246～248

52 Летов. А М. 李惠译,北京:科学出版社,1959

53 Айерман, М. А. Гантмахер ф. р. Абсолсотпа устойчивость резгулируемых сисгем Цзп. АН СССР,1963

54 Lefschitz S. Stablity of Nonlinear Control Systems. Academic press,New York - London,1965

55 赵素霞.关于直接调节系统的绝对稳定性.数学学报,1979(4):404～419

56 朱思铭.直接控制系统的绝对稳定性准则.中山大学学报,1979(3):20～28

57 谢惠民.绝对稳定性理论和应用.北京:科学出版社,1986

58 李森林.几类直接控制系统绝对稳定性的充分及必要条件.应用数学学报,1983(4):458～467

59 廖晓昕.关于控制系统绝对稳定性准则.应用数学与力学,1982(2):235～247

60 廖晓昕.n 维 Lurie 型直接控制系统在主要情况下绝对稳定的充要条件.数学物理学报,1985(3):329～336

61 Liao xiaoxin. Necessary and sufficient conditions for absolut stability of Lurie indirect control systems. Science in China Series A,1989,32(9):1047 - 1061

62 Liao xiaoxin. NASCS for the absolute stability of Lurie direct control systems. Acta Mathematica Scientia,1989,9(1):75～82

63 Meyer. KR. Stability of a lurie type eguations in Lecture Notes in Math. Springer Berlin. 1973(312):145～150

64 Popov. V. M. Absolute stability of nonlinear systems of autmatic contral. A. u. T. 1961(22):961～979

65 ЧжсАо. Суся об ущербности S-прояедуры в слуцае бесконеного сектора абсолтногой устойчивостп. А. и. Т. 1986(11):171~173

66 Popov. V. M. Hyperstability of control systems Springer - Verlay, 1973

67 程远纪.控制系统无穷扇形的绝对稳定性.数学学报,1990,33(3):289~294

68 廖晓昕.一般 Лурье 控制系统绝对稳定的新判据.数学学报,1990,33(21):841~852

69 Liao xiaoxin. Robust absolute Stability for interval yacubovich type control systems. Chinese Science Bulletin, 1991, 36(21):1769~1773

70 Lixo xiaoxin. Absoluto stability of general Lurie control systems. Acta Mathematica Scientia, 1991(1):1~12

71 Liao xiaoxin, Wu weihua, Shu weihua. On absolute stability of nonlinear nonstationary control systems. J. Central China Normal Univ, 1993, 27(3):273~279

72 Liao xiaoxin, Wang xiaojun, Shu weihua, Wu weihua. Absolute stability of control systems with muti - nonlinear feedback terms. Acta Mathematica Scientia. 1996, 16(3): 302~307

73 Барабанов. Н. Е. устойчивость инеустойчивост многосвязных систем регулирования снеедлнствнных состянчем равновеспя А. Н. Т. 1984(6):5~13

74 Маигарищ Б. ж устойчивость и каиество процессов нелинейных систем автоматического управления издателытво《Hayka》АЛМА-АТА, 1980

75 彭乐群.绝对稳定性的几个等价条件.湖南数学年刊,1986,1

76 王国荣.几类控制系统的稳定性.湖南大学学报.1981,3:82~93

77 裘晓刚,舒仲周.控制系统第二标准型的绝对稳定性.应用数学与力学,1986,9(8):785~800

78 Liao Xiaoxin. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. Kluwer Academic Publiser, China Science press, 1993

79 叶伯英.二阶直接控制系统绝对稳定的充要条件. 数学杂志,1987,7(1):75~77

80 廖晓昕,吴卫华.线性动力系统部分变元稳定的充要条件.科学通报,1989,18:1369~1371

81 王晓君.多项式稳定的几何判据,应用数学与力学,1988,9(5):445~450

82 王晓君.线性控制系统稳定性的几何判据.华中师范大学学报,1987,3:332~337

83 张维.Popov 频率判据方法的简化.工程数学学报,1994,11(1)

84 廖晓昕,王晓君.冻结系数法的改进.自动化学报,1986,12(4):413~417

85 Popov. V. M. On a certain critical case in absolute stability. 1 Telemch, 1962, 23:4~24

86 Zhang Wei. The Criterions for absolute stability of direct control systems of Lurie type. Appl. Math and Mech. 1989. 10(10):955~967

87 孙继涛.关于区间矩阵的稳定性.自动化学报,1991,17(6):746~748

88 Hopfield J. Neural networks and physical systems with emergent collective computertational abilite. Proc. Nate. Acad. Sci. U. S. A. 1982, 79:2554~2558

89 Hopfield J J. Neurons with graded response have colleftive computational properties like those of two-state neurons Proc. Natl. Acad. sci. U. S. A. 1984,81:3088~3092

90 Hopfield J J and Tank D W. Neural computation of decisions optimiaztion problems, Biol cyhern 1985, 52:141~152

91 Hopfield J J, Tank D W. Computing with neural circuites model Science 1986, 233: 3088~3092

92 A. Guess et. al Neural network architecture for control syst. mag 22-25, Aprl 1988

93 廖晓昕.神经网络的稳定性和优化计算.科学,1992,44(3):33~34

94 廖晓昕,吴新余.关于非线性 CAM 神经网络的稳定性分析.南京邮电学院学报,1993,13(2)

95 廖晓昕. Stability of Hopfield-type neurul networks(1), Science in China(A), 1995, 38(4):407~418

96 Liao xiaoxin, Liao yang. Stability of Hopfield - type neural networks(Ⅱ) Science in China(A), 1997. 40(8):813~816

97 吴佑寿.何振亚.1997 年中国神经计算科学大会论文集.北京:人民邮电出版社,1997

98 阮炯.具有非对称矩阵的 Hopfield 连续神经网络的稳定性.复旦大学学报,1992,31(2):227~232

99 梁学斌,吴立德. Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及应用.中国科学,1995,25(5):523~532

100 Zhai Qiliang, Liao Xiaoxin. Stability of CAM Neural Network Model.北京国际神经网络会议论文集.北京:科学出版社,1992

101 Liao Xiaoxin. Stability of general ecological systems and neural networks systems, Proc of the first world congress of nonlinear Analysts Walter, de Gruyter Berlin. New York, 1996, 1325~1340

102 焦李成.神经网络系统理论.西安:西安电子科技大学出版社,1991

103 Liao Xiaoxin. Stability of a class of nonlinear continuous neural networks. Proc of the first world congress of nonlinear Analysts Walter. de Gruyter Berlin. New york. 1996, 1427~1435

104 徐秉铮,张百灵,韦岗.神经网络理论与应用.广州:华南理工大学出版社,1994

105 Chua L. O Yang L. Cellular neural networks Theory. IEEE Trans on Circuits and Syst, 1988, 35(10):1257~1272

106 胡守仁等.神经网络导论.长沙:国防科技大学出版社,1992

107 王永骥等.神经元控制.北京:机械工业出版社,1998

108 廖晓昕.细胞神经网络的数学理论(Ⅰ),中国科学(A),1994,24(9):902~910

109 廖晓昕.细胞神经网络的数学理论(Ⅱ),中国科学(A),1994,24(10):1037~1046

110 廖晓昕,费奇,孙德保,齐欢.联想记忆神经网络吸收区域的估计.电子科学学刊,1998,20(5):611~618

111 廖晓昕,王晓君,傅予力,沈轶.论细胞神经网络的理论基础.电子科学学刊,1998,20(5):694~699

112 杨叔子,廖晓昕,史铁林等.人工神经网络有关理论与应用的研究 .1997年 中国神经计算科学大会论文集(一).北京:人民邮电出版社,1997,25~30

113 Liao Xiaoxin and Yang Shuzi. A Sympotic behavior of artificial neural metworks Proc. the international conference on artificial intelligence for Engineering Edited Huang XinHan Yang Shuzi. WuHan: HuaZhong Univ of Sci & Tech. Press. 1998, 24~49

114 王联.常差分方程稳定性理论中的若干问题.常微分方程与控制论 .武汉学术讨论会论文集.武汉:华中师范大学出版,1987,31~56

115 Lakshmikanthan V. Trigiante D. Theory of Difference Equations, New York. Acad. Prees, 1988

116 Keltey W G. Peterson A. C. Difference Equations. New York: Acad Press, 1991

117 Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis Combridge. Combridge University Press, 1985

118 Han H S and Lee J G. Necessary and sufficient conditions for stability of timevarying discrete interval matrices, Int J. Control, 1994, 59: 1021 - 1029

119 T. Mori, On the relationship hetween the spectral radius and stability radius for discrete systems. IEEE Trans. Auto. Control. 1990, 35: 835~836

120 L. Wang and Y. Zhang, Stability of nonlinear analytic difference equations, Atca Mathematica Sinica, 1995, 38: 355~362

121 马万彪.具有变时滞的变系数线性差分系统零解的指数稳定性.数学年刊,1998,9A(2):224~222

122 马万彪.离散系统解的比较原理及在稳定性理论中的应用.内蒙古师大学报,1987,3:9~16

123 斯力更,马万彪.具变量时滞的非线性时变离散系统零解全局指数稳定性.内蒙古师大学报,1988,1:1~5

124 徐道义.线性时变离散系统的稳定性.科学通报,1983,18:1152

125 徐道义.离散系统稳定性的一个定理.科学通报,1984,4:256

126 徐道义,徐安石.非线性泛涵差分系统的吸引区域.科学通报,1998,43,(17):1828~1830

127 Heinen J A. Difference inequality and comparision theorems for stability of discrete

systems, Int. J. System, 1979, 711～718

128 廖晓昕. 论离散型 Лурье 控制系统绝对稳定的充要条件. 数学年刊, 1989, 10A (5): 628～635

129 廖晓昕, 李立鹏. 离散动力系统稳定性的代数判据. 数学物理学报, 1986, 6(4): 375～383

130 Liao Xiao Xin and Wang Xiao Jun. Stability for Differential Difference Equrtions. J. of Math. Anal and Appl, 1993, 173(1): 84～102

131 肖会敏, 刘永清. 线性时变离散系统的稳定性, 控制理论与应用. 1991. 8(2): 206～213

132 Hale J K, Ettore F, Infante and Pete Tsen F. Stability in linear delay equations, J. Math. Anal. Appl, 1985, 105: 533～555

133 Wu Jonggu. On the convexity of asymptotically stable cone of differential difference equations. J. Schuan Univ, 1985, 2: 26～30

134 Liao Xiao xin. Lumped iteration method for stability analysis of large－scale dynamical systems of mutral type. Sci China 1986, Ser A(29): 225～240

135 Liao Xiao xin, Wang Xiao jun and Fu Yuli. Stability and decay rate of interval deday dynamical systems. Appl. Math. J. of chinese univ, 1992, 7(3): 391～402

136 廖晓昕. 大系统稳定性的分块估值比较法. J. of Central China Normal Univ, 1989, 23(1)1～12

137 廖晓昕. 一类分离变量的线性微分方程组的全局稳定性. 数学杂志, 1982, 2: 155～160

138 廖晓昕. $Det[\lambda E - A - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{\lambda\tau}]$零点的双曲稳定分布. 科学通报, 1985, 9: 310

139 Liao Xiao Xin and Jia Li. Robust Interval Stability. Persitence and Partial Stability on Lotka－Volterra Systems with Time－delay. Appl math and computation, 1996, 75: 103～115

140 Guan Z H and Liu Y. Stability analysis of nonlinear measure large scale systems. J. of Systems Science and Systems Engineneering, 1994, 2(2): 134～142

141 K. Gopaisamy. A Simple Stability critenon for linear neutral differential systems J. S. Funkcialaj ekvacioj, 1985, 28: 33～38

142 Huimin Xiao. The stability of time－varging discrete systems with time－delay J. of Math. Anal. and Appl, 1994, 188(1): 66～67

143 Huimin Xiao et. al. Distance－stability of disckete systems Advances in modelling & Simulation. AMSE Press, 1992, 31(2): 13～18

144 Xiao Huimin et. al Distance－boundedness of discrete systems Advance in Modelling & Analysis. AMSE Press, 1992 33(1): 35～43

145 David Herty. The maxional eigenvalue and stability of a classe of real systemtiric interral matrices. IEEE Tran on circuits and systems I. Fundamental Theory and Appl, 1993,40(1):50～57

146 傅予力,廖晓昕.一种新的 Razumikhin 稳定定理.中国学术期刊(科技快报),1998,7:890

147 李森林.泛函微分方程稳定性的 V 函数法及应用.中国科学(A),1986,11:1143～1152

148 章毅.中立型时滞大系统的稳定性.中国科学 A,1988,4:337～347

149 章毅.时滞大系统的稳定性分析.数学学报,1990,33(3):381～387

150 徐道义.区间矩阵稳定性的简捷判据.数学学报,1986,29(3):309～312

151 徐道义.Stability of linear systems with time－varing delay 1988,33(8):626～631

152 廖晓昕.区间动力系统的 Robust 稳定性进展.数学进展,1992,4:168～184

153 徐道义.具有滞后的变系数系统的稳定性.应用数学学报,1989,12(1):124～128

154 谢胜利.关于中立型大系统的稳定性.科学通报,1987,32(12):891～896

155 谢胜利.一类含时滞的抛物型泛函微分方程解的稳定性.科学通报,1991,36(18):1435～1436

156 谢胜利.线性定常中立型大系统的稳定性.控制理论与应用,1989,6(3):74～78

157 谢胜利.一类具有变量时滞的中立型大系统 C^1 稳定性.数学年刊,1990,112A:164～171

158 陈伯山.非自治系统渐近稳定性.科学通报,1990.35(4):250～252

159 俞元洪.超越函数 $\mathrm{Det}(a_{ij}+b_{ij}e^{-h\tau}-a_{ij}\lambda)_{n\times n}$的零点分布在复平面左半部的代数判定.科学通报,1984,23:1413～1415

160 张作元.The algebra priaciple for retarded type differential difference system. $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ unconditional stability .1988,33:2.94－98

161 陈强.泛函微分方程稳定性的一类判别准则.数学年刊,1985,5A(4):703～710

162 麦结华.多项式函数簇的零点的区域稳定性.数学年刊,1995,15A5:604～613

163 廖晓昕,罗琦,梅正,胡伟湘.关于区间矩阵稳定性,可控性,可观性的注记.自动化学报,1998,24(6):829～833

164 钟守铭.具有时滞的细胞神经网络的稳定性.电子学报,1997,25(2):125～127

165 李森林,温立志.泛函微分方程.长沙:湖南科技出版社,1987

166 郑祖庥.泛函微分方程理论.合肥:安徽教育出版社,1994

167 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlqg,1997

168 Tingxio Wang. Uniform boundedness with condition $V'(t,x_t)\leqslant-\gamma(t)W_4(m(x_t))-W_5(D(t,x_t))+M$. Nonlinear Analysis. Theory. Methols & Applications, 1995,25(6):581～590

169 Tingxio Wang. Stability in abstract functional differential equations part Ⅰ: General theorems. J.Math. Analysis Applic. 1994,186(2):534～558

170 Burton T A. Uniform boundedness for delay equations. Acta math. Hung. 1990,56: 259～268

171 Burton T A. and Hatvani. L Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals. Tohoku Math. J. 1989,41:65～104

172 秦元勋,刘永清,王联,郑祖庥. 带有时滞的动力系统的运动稳定性.北京:科学出版社,1989

173 徐远道.泛函微分方程与测度微分方程.广州:中山大学出版社,1988

174 黄振勋,高国柱.时滞泛函微分方程的某些稳定性结果.复旦大学学报,1997,36(6):652～657

175 林伟等.分布参数控制系统.北京:国防工业出版社,1982

176 叶其孝,李正元.反应扩散方程引论.北京:科学出版社,1994

177 Hu yueming, Xiao Huimin, Liao xiaoxin. The stability of a class of large scale systems described by parbial differential equations. J. of Central China Nornal Univ. 1991. 25 (1):131～136

178 Kanch. H. Distribuded Parameter Haat Exchangers－Modeling Dynamics and control, In: Tzafestas, S. G. ed. Distributed Parameter Control Systems. Oxford, Pergamon Press, 1982

179 V. Lakshmikanthan and S. Leela. Differential and Integral Inequalities Theory and Applications. Acdemic. Press ,New York and London, 1969

180 Jianhong Wu. Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 119. Springer, 1998

181 He M X. Abstract functional differential equation－Liapunov functionals and the existence of periodic solutions Acta. Math. Siuica, 1988,32:425～430

182 Mengxing He etal. Lurie－type Abstract functional differential equations dynamical Systems & Appl, 1996,5:607～625

183 Xiaoxin Liao and Jia Li. Stability in Gilpin－Ayala competition. models with diffusion. Nonliuear Analysis Theory. Methods & Appl. 1997,20(10):1751－1758

184 Allen L J S. Persistence and extinction in Lotka－Volterra reaction diffusion equations. Math. Biosci, 1983,65:1～12

185 Berettae & Takouchi Y. Global asymptotical stability of Lotka－Volterra diffusion with continuous time delay SIAM. J. Appl. Math, 1988,48:627～651

186 Takeuchi Y. Global stability in generalized Lotka－Volterra diffusion systems. J. Math. Anal. Appl. 1986,116:209～221

187 Takeuchi, Y. Diffusion effect on stability of Loika－Volterra models. Bull. Math. Bi-

ol. 1988,48:585～601

188 Suzanne M Lenhart. Stability of functional partial differential equations J. of Differential Equations, 1985, 58:212～227

189 Liao Xiao xin and Mao x. Exponential stability and instability of stochastic neural networks. Stochastic Analysis and Applications,1996,14(2):165－185

190 Liao Xiao xin and Mao X. Stability of stochastic neural networks. Neural Paralled and Scientific Computations,1996,4:205～224

191 Liao Xiao xin and Mao X. Stability of large－scale neutral－type stochastic differential equations. Dynamics of Continuous. Discrete and Impulsive Systems,1997,3(1):43～56

192 Liao Xiao xin and Mao Xuerong. Stability of neutral stochastic differential equations. Chinese Science Bulletin,1997,42(13):1143～1144

193 Liao Xiao xin and Mao Xuerong. Almost sure exponential stabilit of neutral differential difference equations with damped stochastic perturbations. Journal URL,1996.1(8):1～16

194 Liao Xiao xin and Mao X. Exponetial stability in mean square at stochastic neural networks with delays. 11th IFAC SYSID'97 SICE preprints 2(Japan,1997,841～846)

195 廖晓昕,毛学荣.随机时滞 Hopfield 神经网络的均方指数稳定性.华中理工大学学报,1997,25(6):95～97

196 Mao X. Razumikhin－type theorems on exponential stabiltiy of nearal stochastic functional differential equations SIAM. J. math Anal. 1997.28.389～400

197 Mao Xuerong. Exponential stability of stochastic differential equations. New York. Marcel Dekker In C,1994

198 Mao Xuerong. Differential Equations and Applications. Horwood Publishing,1997

199 Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications. New York: Academic Press,1976

200 Kolmanoskii V B and Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations New York: Academic Press,1986

201 Kolmannovskii V B and Myshkis A. Applied Theory of Funtional Differential Equations. Kluwer Academic Pubishers,1992

202 黄志远.随机分析学基础.武汉:武汉大学出版社,1988

203 胡宣达.随机微分方程稳定性理论.南京:南京大学出版社,1986

204 张炳根.随机复合系统的稳定性.数学研究与评论.1983,3(4):55～61

205 沈轶,廖晓昕.随机时滞神经网络的指数稳定性.中国学术期刊科技快报,1998,1:120

206 沈轶,廖晓昕.随机中立型泛函微分方程的指数稳定性.中国学术期刊科技快报,

1998,1:120

207 沈轶,付莉红,廖晓昕.具有可变时滞的随机系统的指数稳定性.华中理工大学学报,1998,10:1~3

208 沈轶,廖晓昕.随机中立型泛函微分方程指数稳定性的 Razumikhin 定理.科学通报,1998,43(21):2272~2275

209 Forzi M. Dannan Saber Elaydi. Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations J. Math. Anal. and Appl. 1986, 113:562~577

210 Fu Yuli. On Lipschitz stability for. F. D. E. Proc. Ordinary Differential Equations and Control Theory.武汉:华中师范大学出版,1987

211 Danal F M and Elaydi. Lipschitz stability of nonlinear Systems of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 1989,143:517~529

212 Stepanov A V. Generalizations in the Problem of Lipschitz Stability. J. of Math. Sci. 1998,90(6):2524~2526

213 张书年.关于稳定性的拉茹米辛型定理.数学年刊,1998,19(A):73~82

214 傅予力,廖晓昕.泛函数微分方程有界性的 Razumikhin 型新定隐.中国学术期刊(科技快报),1998,4(7):890

215 徐道义,马志霞,郭庆义.差分不等式与离散系统的吸引域.数学年刊,1999.20A(1):21~26

216 徐安石.无穷时滞泛函数分方程解的一致渐近稳定性.科学通报,1998,43(9):918~920

217 Mohammed S-E A. Stochastic Functional Differential Equations. Longman Scientific and Technical,1986

218 Burton T A. A differential equation of lurie type proc. The american mathemaical society,1972,36(2):491~486

内 容 简 介

本书以李雅普诺夫函数、泛函法为主，辅以拉萨尔不变原理、比较原理及代数方法，用统一观点和近代手段介绍了各种方程所描述的动力系统的稳定性。全书共 10 章，第一章扼要地介绍了动力系统的概念及书中要用的主要数学工具。第二、三章集中概括地叙述了常微分方程李雅普诺夫稳定性经典理论及推广。第四章论述了非线性控制系统绝对稳定性的充要条件及新的充分条件。第五章叙述了两类连续神经网络的稳定性。四、五章可视为李雅普诺夫稳定性理论、方法的实际应用。第六章详细地阐述了差分方程动力系统的稳定性。第七章给出了微分差分方程稳定性的基本理论和方法及较多的实例。第八章介绍了泛函微分方程稳定性的基本结果。第九章叙述了用偏微分分方程、偏泛函微分方程描述的动力系统的稳定性。最后一章是介绍随机微分方程及随机泛函微方程的各种稳定性及对随机神经网络的应用。

Throughout this book, by the thread of Liapunov function and functional method, associated with LaSalle invariance principle, comparison principle and algebraic method, we attempt to study stability theory of dynamical systems generated by wide ranges of equatios, via an uniform point of view and modem methods. There are ten chapters in this book. Chapter 1 is a concise introduction

of concepts abouts dynamical systems and preliminary of mathematical knowledge which will be used in this book. The classical Liapunov's theory for dynamical systems generate by ordinary differential equations and may developments of it are presented generally in chapter 2 and 3. Chapter 4 specifies necessary and sufficient conditions of absolute stability and many sufficient conditions derived by them. In chapter 5, two classes of artificial neural networks (Hopfield neural network and cellular neural network)are studied. Chapter 4 and 5 can be regarded as the applications of Liapunov's stability theory. Actually, there are many examples of the applications in other chapter. Stability of discrete dynamical systems is one of the modem topics of stability. Chapter 6 deals with stability of discrete dynamical systems generated by difference equations. In chapter 7, for dynamical systems generated by differential – difference equations, basic theory and methods of stability are presented with many practical examples. For functional differential equations, we give an outline of theoretical results and methods ,without too many examples, since most of examples for functional differential equations, in fact, are appeared as differential – difference equations. Stability of dynamical systems generated by partial differential equations and partial functional differential equations are studied in chapter 9. Stability results of stochastic differential equations and stochastic functional differential equations are presented in the last chaper, which include the work of the author cooperated with professor Xuerong Mao in Britain.

[General Information]
书名=动力系统的稳定性理论和应用
作者=廖晓昕
页数=542
SS号=10188795
DX号=
出版日期=2000年04月第1版
出版社=国防工业出版社